7.6.18.

ELEMENTARE MECHANIK

EIN LEHRBUCH

ENTHALTEND: EINE BEGRÜNDUNG DER ALLGEMEINEN MECHANIK; DIE MECHANIK DER SYSTEME STARRER KÖRPER: DIE SYNTHETISCHEN UND DIE ELEMENTE DER ANALYTISCHEN METHODEN, SOWIE EINE EINFÜHRUNG IN DIE PRINZIPIEN DER MECHANIK DEFORMIERBARER SYSTEME

1st edition

VON

GEORG HAMEL
DR. PHIL.
O. Ö. PROFESSOR DER MECHANIK AN DER K. K. DEUTSCHEN FRANZ-JOSEPH-TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU BRÜNN

MIT 265 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1912

VORREDE.

Es sei mir gestattet, über Ziel und Aufbau meiner „Elementaren Mechanik“ einiges zu sagen.

Dieses Buch enthält die Grundlagen, die Mechanik starrer Körper und eine ganz knappe Einführung in die Mechanik deformierbarer Körper.

Auf die Grundlagen wurde besonderer Wert gelegt. Es war einmal nötig, die anerkannten Schwierigkeiten (siehe die berühmte Vorrede von Hertz), welche die sogenannte klassische Mechanik bietet, zu überwinden und nicht zu umgehen. Es wurde deshalb kein neues System gebaut, sondern das alte nach bestem Können begründet.

Vor allem mußte einmal die Frage gründlich erörtert werden, was „Kraft“ eigentlich ist, es mußte gesagt werden, daß sie kein „Ding“ ist, also auch keine „Ursache einer Bewegung“ sein kann, daß sie aber auch ebensowenig nur ein konventionelles Wort für das Produkt aus Masse und Beschleunigung ist. Sie ist vielmehr eine „Form“ unserer Naturerkenntnis. Ich habe dies zwar schon an anderer Stelle ausgeführt; hier mußte dasselbe in neuer Weise, von einem wesentlich elementareren Standpunkte aus geschehen. Überhaupt habe ich es als eine Hauptaufgabe angesehen, elementar darzustellen und der historischen Entwicklung nach Möglichkeit gerecht zu werden. Man wolle also auch das Buch nicht etwa als ein eigentliches Lehrbuch der Grundlagen ansehen: es fehlen alle Unabhängigkeits- und Existenzbeweise.

Zu dem Kraftbegriff tritt als gleich wichtig der Begriff der „Ursache“. Unter Weiterbildung Machscher Ideen wurde versucht, diesem Begriff für die Mechanik wissenschaftliche Existenzberechtigung zu geben. Eine gewisse Differenz gegen den populären Ursachbegriff mußte dabei natürlich zugelassen werden.

Nachdem das Newtonsche Grundgesetz gewonnen ist, lasse ich eine elementare, wenn auch nicht strenge Ableitung des Schwerpunktsatzes und eine Betrachtung der am häufigsten vorkommenden Kräfte (Reibung usw.) folgen, um das Material zur Einübung des Newtonschen Grundgesetzes zu haben.

Der zweite Abschnitt ist ganz der Statik gewidmet; er enthält die analytischen und graphischen Methoden der Statik des einzelnen starren Körpers, der Systeme starrer Körper, die Statik des Fadens und des steifen Seiles und als Schluß eine Darstellung des d'Alembertschen Prinzips als Übergang zur Kinetik.

Von der Theorie der Fachwerke und der Gewölbe habe ich nur das Wesentlichste und Einfachste aufgenommen. Dagegen enthält der zweite Abschnitt wohl den ersten Versuch einer Theorie der Seilsteifigkeit. Wenn ich mich entschlossen habe, die unvollkommene Skizze aufzunehmen, so geschah es, um zu weiteren Überlegungen und zu Experimenten anzuregen, die uns hier wie noch vielfach in der technischen Mechanik dringend nottun.

Der dritte Abschnitt enthält zunächst die Grundlagen einer allgemeinen Mechanik: strenge Ableitung des Schwerpunktsatzes und des Momentensatzes für beliebige Systeme auf Grund der Mechanik des Volumelementes. Nicht also aus der sogenannten Punktmechanik, die überhaupt (bis auf eine kurze Darstellung am Schlusse des ersten Abschnittes, aus historischen Gründen) aus diesem Buche verbannt ist. Daß unsere Lehrbücher sonst noch immer die Punktmechanik traktieren, ist ein seltsamer Anachronismus: Punktmechanik paßte ausgezeichnet ins 18. Jahrhundert, aber nicht mehr in unsere Zeit, für die weder das Planetenproblem die einzige eines Mathematikers würdige Aufgabe der Mechanik ist, noch auch das Molekel die Quintessenz einer naturwissenschaftlichen Weltanschauung. Man wende mir auch nicht ein, daß die Ableitung der beiden Hauptsätze der Mechanik durch die Auflösung des Körpers in diskrete Punkte leichter wird: die in diesem Buche angestellten Überlegungen sind doch alle dann nötig, wenn man sich der sogenannten Mechanik der Kontinua zuwendet, d. h. der Mechanik deformierbarer Medien. Man hat bei dem üblichen Lehrgang nur die intellektuelle Unreinlichkeit mit in den Kauf zu nehmen, daß man Sätze, die für Punktsysteme bewiesen sind, ohne weiteres auf Kontinua übertragen muß. Da ist es schon einfacher, man beschäftigt sich gleich mit stetig ausgedehnten Körpern und nennt das neue nötige Grundgesetz der Mechanik (ich habe ihm den Namen Boltzmanns gegeben) offen und ehrlich.

Überhaupt gibt es in diesem Buche nur Körper, die sich berühren und keine Punkte, Kurven und Flächen, auf denen bewegliche Punkte verpflichtet sind, sich zu bewegen. Das ist eine ganz unnötige Abstraktion.

Auf die allgemeine Mechanik folgt die Mechanik des einzelnen starren Körpers, dann die Mechanik starrer Systeme. Zunächst wurde konsequent die synthetische Methode durchgeführt, damit ihre Vorzüge und Nachteile deutlich hervortreten. (Es gibt noch ein Buch, das die synthetischen Methoden rein und bis zu einer gewissen Virtuosität ausgebildet hat, das ist die kleine „Theoretical mechanics" von Love.) Erst hinterher folgen die analytischen Methoden: das Prinzip der virtuellen Arbeiten, die Lagrangeschen Gleichungen. Diese können jetzt ihre Überlegenheit bei schwierigeren Problemen zeigen, und vor allem sind sie deshalb unentbehrlich, weil man mit ihrer Hilfe erst einsieht, daß die Methoden der Mechanik die erforderliche Anzahl reiner, d. h. von den Reaktionskräften explizit unabhängiger Gleichungen geben.

Für die analytischen Methoden ist die Unterscheidung zwischen „eingeprägten" und „Reaktionskräften" wesentlich. Die Namen stammen von meinem verehrten Lehrer Heun, dessen Bücher auch neben dem von Webster die meines Wissens einzigen Lehrbücher sind, welche den Unterschied deutlich hervorheben. Daß die anderen Bücher richtige konkrete Resultate bringen, spricht mehr für den guten mechanischen Genius ihrer Verfasser als für die Richtigkeit ihrer Lehrsätze. Die Unterscheidung ist unentbehrlich und nicht etwa eine Finesse. Ich glaube, daß die hier gegebene Definition der Reaktionskräfte neu ist.

Das Hamiltonsche Prinzip und die nichtholonomen Systeme fanden in diesem elementaren Lehrbuche keinen Platz mehr.

Auf die Stereokinetik folgt etwas aus der Kinetik der Seile und Drähte. Es ergab sich dabei ungezwungen die Möglichkeit, an einem nicht ganz trivialen Schwingungsproblem etwas aus der modernen, namentlich von Hilbert so sehr geförderten Theorie der linearen Integral- und Differentialgleichungen zu bringen, womit ich hoffe, dem einen oder anderen Leser einen Gefallen zu tun. Die Konvergenzbeweise fehlen natürlich.

Mit den beiden Schlußparagraphen bin ich absichtlich über den elementaren Charakter des Buches hinausgegangen. Ich wollte gar keine Ausführungen bringen, sondern nur die Elastizitätstheorie und die Hydromechanik prinzipiell an die allgemeinen Grundlagen anschließen, damit die Mechanik doch als ein Ganzes erscheine. Ein Lehrbuch über feste elastische Körper wollte ich deshalb nicht schreiben, weil wir in Love und Föppl ausgezeichnete Lehrbücher dieser Disziplin besitzen und weil ich in dieser Sache noch keine Lehrerfahrung habe; über flüssige Körper aber deshalb nicht, weil wir in Lamb und Wien gute Bücher haben und uns v. Mises ein Lehrbuch für Ingenieure versprochen hat. Ich brauchte deshalb in diesem Punkte auch gar keine Rücksichten auf Anfänger zu nehmen und konnte einmal die Theorie der endlichen Verschiebungen darstellen, was mir deshalb notwendig schien, weil die Untersuchungen St. Vénants, Kirchhoffs, Boussinesqs, Fingers und Duhems noch fast ganz unbekannt sind, Love nicht einmal eine Andeutung darüber enthält und selbst die Enzyklopädie auf halbem Wege stehen bleibt, indem sie zwar die wenig schönen Methoden der genannten Autoren skizziert, die schönen Resultate aber verschweigt. Mein Weg ist neu, auch habe ich konsequent den augenblicklichen Ort als unabhängige Variable eingeführt, wodurch sich allerdings im Resultat nur Zeichen ändern; endlich habe ich die Prinzipien der Thermodynamik in den Vordergrund gestellt. Im letzten Paragraphen, in dem ich die Kinetik der Flüssigkeiten prinzipiell entwickle, kam es mir vor allem auf einen vollständigen thermodynamischen Ansatz der turbulenten Gasbewegung an. In der Literatur fand ich nur eine kurze Notiz in dem Enzyklopädieartikel von Hobson und Diesselhorst darüber. Ich will aber nicht unerwähnt lassen, daß mir der Rat meines Freundes, des Herrn Professors Dr. Arthur Szarvassi dabei sehr förderlich war.

Für Leser, welche in der Vektorrechnung noch wenig bewandert sind, ist eine Skizze dieses überaus bequemen Hilfsmittels angeschlossen. Ich bediene mich, abgesehen von einer geringfügigen Modifikation, der Bezeichnungsweise Heuns, die mir für die Mechanik die zweckmäßigste zu sein scheint, weil sie in Druck, Schrift und Sprache gleich einfach und anschaulich ist. Ich konnte auf die Vektorrechnung nicht verzichten, weil Geschwindigkeit und Beschleunigung, Kraft und Momente Vektoren sind. Aber die Vektorrechnung ist nur soweit verwendet, als es nötig war.

Abgesehen von den Schlußparagraphen und einigen sonstigen Erweiterungen ist das Buch wesentlich meine Vorlesung, vermindert um die Hydromechanik. Dementsprechend sind die technischen Anwendungen in den Vordergrund gestellt. Ich habe aber das Buch absichtlich nicht „Technische Mechanik“ genannt, weil es doch vor allem auf die Entwicklung der Grundprinzipien ankam. Eine wirkliche technische Mechanik, wie ich sie mir denke, müßte von den Grundprinzipien ganz absehen und dafür die technischen Anwendungen vollständig darstellen. Es ist also dies Lehrbuch für alle Studenten der Mechanik gedacht; um die Linien der Untersuchung mehr hervortreten zu lassen, sind alle Aufgaben und kleineren oder spezielleren Anwendungen klein gedruckt worden. Dahingegen will es mir scheinen, daß heute bei der Bedeutung der Technik auch ein Physiker und ein Mathematiker, der etwas von der Mechanik zu wissen beansprucht, die wichtigsten Anwendungen auf den Maschinenbau und die Ingenieurwissenschaften wenigstens im Prinzip kennen sollte, sowie ein Techniker von der Astronomie wenigstens die Keplerschen Gesetze, das Gravitationsgesetz und seine elementarsten Folgerungen wissen muß.

Was die Astronomie der Mechanik im 18. Jahrhundert war, das ist ihr heute die Technik. Möge dieses Buch auch mit dazu dienen, das gegenseitige Verständnis von Theorie und Praxis zu fördern!

Ich habe mehr Literaturangaben gebracht, als es sonst in Lehrbüchern üblich ist. Denn nichts lähmt das Interesse der studierenden Jugend so sehr, als der Eindruck, es sei das Vorgetragene fertig und abgeschlossen. Also für die Jugend sind die Literaturangaben, damit sie weitere Wege findet, nicht für die Gelehrten.

Auch die historischen Angaben wollen anspruchslos ohne philologische Prätension genommen sein. Es kam mir nur darauf an, Verständnis für das Werdên meiner Wissenschaft zu erwecken und gute alte Gedanken in dem modernen ökonomischen Betriebe der Wissenschaft nicht untergehen zu lassen. Es steckt oft erstaunlich Tiefes in einem angeblichen „Wortstreit“ der Alten.

Vielleicht darf ich zum Schlusse noch meiner Lehrer gedenken, die vielfach ungenannt, doch wohl dem Kenner sichtbar hinter dem Buche stehen; es sind August Ritter (†), Felix Klein und Karl Heun. Diese drei haben persönlich mein Interesse der Mechanik gewonnen; ich möchte aber noch einen ganz alten als vierten nennen: Immanuel Kant, den Philosophen, der am tiefsten erkannt hat, wie eng Philosophie und exakte Wissenschaften zusammengehören.

Und nun zur Jugend: Mein Freund und früherer Assistent Herr Professor v. Mises in Straßburg hat das ganze Buch im Fahnensatz gründlich durchgesehen und mir sehr wertvolle Verbesserungsvorschläge gemacht. Auch ein großer Teil der Aufgaben stammt von ihm. Ich spreche ihm meinen wärmsten Dank für sein lebhaftes unermüdliches Interesse aus.

Einige andere Aufgaben hat Herr Dipl.-Ing. Kurt v. Sanden, jetzt in Kiel, beigesteuert.

Mein jetziger Assistent, Herr Dr. Alfred Lechner, hat mich bei der Satzkorrektur wesentlich unterstützt, die Aufgaben durchgerechnet und die Register angefertigt. Herr Rudolf Kreutzinger, Assistent bei unserer Lehrkanzel für Geometrie, hat nach meinen Skizzen die Figuren gezeichnet. Ich bin der Mühewaltung beider Herren zu großem Danke verpflichtet.

Endlich gebührt dem Verlag mein bester Dank für das große Entgegenkommen, mit dem er meine Wünsche zur Ausstattung des Buches berücksichtigt und größere Korrekturen während des Druckes gestattet hat.

Brünn, im November 1911. G. HAMEL.

INHALT.

Erster Abschnitt.

Die Grundbegriffe.

Kapitel I.

Begründung des kinetischen Kraftbegriffes.

Kapitel II.

Die sogenannte Punktmechanik.

Dritter Abschnitt.

Allgemeine Mechanik.

Kapitel VIII.

Grundlagen einer allgemeinen Mechanik.

Kapitel IX.

Ebene Bewegung des starren Körpers.

Anhang.

Regelmäßig gebrauchte Bezeichnungen.

(i. d. R. bedeutet: in der Regel.)

1. t die Zeit, τ_0 Periode oder Umlaufszeit, ω Winkelgeschwindigkeit, als Vektor $\bar{\omega}$. m die Masse, μ spezifische Masse, dm Masse eines Volumelementes. g Fallbeschleunigung, $G = mg$ das Gewicht, $\mu g = \gamma$ das spezifische Gewicht. dV Volumelement, dF Flächenelement, $\mathfrak{S}$ Summation (Integration) über Volumina oder Flächen, $\int$ Integration nach der Zeit (i. d. R.), $\sum$ Summation über eine Reihe einzelner Größen. $T = \mathfrak{S}\, dm r^2$ Trägheitsmoment, $D_{xy} = \mathfrak{S}\, dm xy$ Deviationsmoment, σ Trägheitsradius, s Schwerpunktsabstand (i. d. R.).

2. $\bar{r}$ Ortsvektor, $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$ Geschwindigkeit (als Vektor), $\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt}$ Beschleunigung. $\bar{k}$ endliche, $d\bar{k}$ unendlich kleine Kraft, K Resultierende (i. d. R.), $\bar{\varkappa}$ spezifische Kraft pro Volumseinheit (oder Längeneinheit), $\bar{\sigma}$ pro Flächeneinheit (= Spannung, Druck im allgemeinen Sinne). N Normaldruck, R Reibung (i. d. R.), $\bar{D}$ Resultierende aus beiden (i. d. R.), f Reibungskoeffizient, φ Reibungswinkel (i. d. R.), S Fadenspannung (nur in den letzten Paragraphen: Entropie).

3. $|\bar{k}|$ oder, wenn Mißverständnis ausgeschlossen, einfach k Absolutwert des Vektors $\bar{k}$. Die Indizes x, y, z bezeichnen im allgemeinen die Komponenten eines Vektors nach den Achsen, nur $\bar{\sigma}_x$ bezeichnet die Spannung auf ein Flächenelement senkrecht zur x-Achse, die Komponenten sind hier X_x, Y_x, Z_x genannt.

4. $dA = \bar{k} \cdot d\bar{r}$ Arbeit der Kraft $\bar{k}$ bei der Verschiebung $d\bar{r}$ (allgemein $\bar{a} \cdot \bar{b}$ das innere Produkt der Vektoren $\bar{a}$, $\bar{b}$). U das Potential einer Kraft, $\bar{k} = -\frac{dU}{d\bar{r}} = -\operatorname{grad} U$, $L = \bar{k} \cdot \bar{v}$ die Leistung. E die kinetische Energie (lebendige Kraft).

5. $\bar{M} = \overline{rk}$ Moment einer Kraft (allgemein $\overline{ab}$ das äußere Produkt), $\bar{J} = \mathfrak{S}\, dm \overline{rv}$ der Impulsvektor.

6. $\frac{d}{dt}$ zeitliche Ableitung an ein und derselben Materie (materielle Fluxion) in bezug auf ein ruhendes Koordinatensystem. Auch durch einen übergesetzten Punkt bezeichnet: $\bar{v} = \dot{\bar{r}}$. $\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}t}$ dasselbe, bezogen auf ein bewegtes System. $\frac{\partial}{\partial t}$ zeitliche Ableitung bei festgehaltenem Orte (lokale Fluxion).

7. $=$ Gleichheit auf Grund mechanischer Gesetze, $\equiv$ Gleichheit auf Grund mathematischer Identität oder infolge Definition. (Nur wenn nötig, unterschieden.) $\doteq$ angenähert gleich, $\ll$ sehr klein gegen, $\gg$ sehr groß gegen.

8. Die mit einem Stern (*) bezeichneten Größen beziehen sich auf den Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt.

Erster Abschnitt.

Die Grundbegriffe.

Kapitel I.

Begründung des kinetischen Kraftbegriffes.

§ 1. Einleitung.[1])

1. Die Aufgabe der Mechanik besteht darin, die Bewegungserscheinungen in der uns umgebenden Natur zu untersuchen. Dabei kann es aber nicht ihr Endziel sein, lauter einzelne Bewegungen in allen ihren Sonderheiten möglichst naturgetreu zu beschreiben: so wichtig eine solche Einzelerscheinung im Leben eines Menschen oder aber ganzer Völker sein kann, so gleichgültig ist sie an sich für die Wissenschaft. Eine Anhäufung von noch so gutem Beobachtungsmaterial ist noch keine Wissenschaft, sondern nur Stoff zu einer solchen. Der menschliche Geist muß diesem Stoff noch die Form geben.

Eine solche Form ist notwendig. Jede Einzelerscheinung an sich ist im Grunde genommen unverständlich.

Eine Tatsache bleibt eine Tatsache; mag sie noch so scharf beobachtet sein, sie ist allein noch kein Gegenstand des Denkens, das Beziehungen zwischen mehreren Dingen festzustellen sucht. Wir sehen das am besten am Verhalten des unwissenschaftlichen Menschen: er beobachtet manchmal vielleicht schärfer wie der experimentierende Forscher, aber jede ungewohnte Erscheinung ist ihm ein Wunder. Macht er sie aber zum Gegenstand seines Denkens, und bleibt sie als Tatsache allein, so setzt er sie doch wenigstens in Verbindung mit Phantasieprodukten, Dämonen usw.; wird sie ihm aber auch nur zur Gewohnheit, so vollzieht er schon einen ersten formgebenden Akt des Denkens: er faßt mehrere ähnliche Erscheinungen zu einer Klasse zusammen. Dasselbe muß jeder Naturforscher tun: er klassifiziert die Tatsachen.

Ist dieser erste Schritt vollzogen, so ist die Bahn für das kausale Denken frei, für eine wissenschaftliche Formulierung und Beantwortung

1) Der Anfänger mag diese Einleitung durchlesen und dann gleich zum Studium von § 2 übergehen.

der Frage: warum? Es kann jetzt die Frage gestellt werden: Durch welche anderen Klassen von Erscheinungen ist eine bestimmte Klasse von Ereignissen erfahrungsgemäß bedingt? Wollte man das Kausalitätsprinzip so formulieren, daß man fragt: Durch welche Ereignisse oder Daten A, B, C . . . ist das eine Ereignis X bedingt, so stellte man eine Frage, die keine Wissenschaft beantworten kann. Wie sollte jemand durch Erfahrung wissen können, wodurch das eine Ereignis X bedingt ist? Wo doch ein Ereignis einfach da ist inmitten unendlich vieler anderer! Aber für Klassen von Erscheinungen hat die Behauptung ihrer Abhängigkeit einen erforschbaren Sinn, denn Individuen einer Klasse können immer wieder vorkommen, die Abhängigkeit kann also durch wiederholte Erfahrung, ja durch künstlich gewollte Erfahrung (Experimente) als eine immer wiederkehrende, d. h. als eine gesetzmäßige erkannt werden.

So sind die Prinzipien der Klassifikation und der Kausalität die Grundlagen alles wissenschaftlichen Denkens, also auch notwendige Grundprinzipien für die Mechanik.

Die Individuen einer Klasse werden natürlich irgendwie voneinander verschieden sein. Es muß aber ein Gemeinsames geben, das für die Individuen einer Klasse typisch ist. Dieses Typische muß gesucht werden.

So werden wir auch die Bewegungserscheinungen in Klassen teilen und das Typische dieser Klassen suchen. Als solches werden wir für jede Klasse eine Kraft kennen lernen.

Dem Kausalitätsbedürfnis werden wir dann dadurch entsprechen, daß wir nach den Ursachen einer Kraft fragen, d. h. festzustellen suchen, von welchen Daten eine Kraft erfahrungsgemäß bedingt ist.

Wir können so zusammenfassen, daß wir mit Schell (Theorie der Bewegung und der Kräfte) sagen:

Die Mechanik ist die Lehre von den Bewegungen und von den Kräften.

2. Über die Stellung der Mechanik zu den anderen Wissenschaften. Es dürfte nach dem Vorhergesagten klar sein, daß die Mechanik zunächst eine Naturwissenschaft, also eine Erfahrungswissenschaft ist. Soweit sie sich die Aufgabe stellt, wirklich Bewegungserscheinungen zu klassifizieren und die zugehörigen Kraftgesetze zu finden, ist sie ein Zweig der Physik. Sie bedarf also weitgehend der Erfahrung und der Experimente; Kraftgesetze a priori, ohne solche Beobachtungsdaten finden zu wollen, muß im allgemeinen als eine verfehlte Spekulation bezeichnet werden, die sich gewöhnlich bitter rächt. Namentlich der Techniker darf sich bei der Verantwortung seines Berufes niemals auf willkürliche, nicht durch die Erfahrung geprüfte Annahmen verlassen.

Daß sich die Mechanik außerdem bei der Darstellung der einzelnen Bewegungserscheinungen und ihrer gegenseitigen Abhängigkeit eines strengen Schlußverfahrens, also der allgemeinen reinen Logik und der exakten Sprache der Mathematik sowie der anschaulichen der Geometrie bedienen wird, ist zu erwarten. Und bei dem Alter und der Durchbildung, welche die Mechanik erfahren hat, ist die Beziehung sogar recht eng.

Aber die Verwandtschaft von Mechanik, Mathematik und Geometrie ist noch viel näher und innerlicher. Oben wurde der empirische Charakter der einzelnen Kraftgesetze der Mechanik gehörig betont; was aber die Grundlagen der Mechanik im ganzen angeht, so sind ihre Gesetze zu einem großen Teil Formen, deren Auffindung vielleicht durch die Erfahrung angeregt ist, die aber trotzdem, ebenso wie die Grundsätze der Mathematik und der Geometrie, apriorisch sind, d. h. vor aller Erfahrung bestehen und nur ihren Inhalt durch die Erfahrung erhalten.

3. Die Erkenntnisquellen der Mechanik. Man hat oft behauptet, daß Mechanik und mit ihr alle Naturwissenschaft nur auf Erfahrung begründet sei, sogar die Geometrie sollte als oberste Naturwissenschaft nicht ausgeschlossen sein. Wir haben aber schon gleich zu Anfang darauf hingewiesen, daß bloße Tatsachen, und nur solche liefert uns die Erfahrung (wenn sie es allein vermag?), noch keine Wissenschaft ausmachen, daß es noch einer besonderen Tätigkeit des Menschen bedarf, der ordnenden und verbindenden Denkarbeit. Wider die Erfahrung als alleinige Quelle aller Naturwissenschaft spricht aber noch manches andere.

Wir suchen vor allem wenigstens für die allgemeinen Fundamente bestimmte exakte Sätze. Solche aber kann Erfahrung nie liefern. Denn jedes ihrer Resultate ist mit Beobachtungsfehlern behaftet, auch zeigt es sich, und das werden wir im Laufe dieses Buches besonders hervorheben, daß auch das von den Fehlern „gereinigte" Resultat noch nicht immer direkt verwendbar ist, daß es noch zerschnitten, präpariert werden muß, um in die Fächer der Wissenschaft eingeordnet werden zu können. Man spricht wohl von einem „Idealisieren", aber das ist nur ein unbestimmter, nichtssagender Ausdruck, er gibt weder Richtung noch Ziel. Und doch ist die Frage nicht abzuweisen: Nach welchen Prinzipien findet die Idealisierung statt?

Es ist an sich klar und kann auch ausführlich gezeigt werden (siehe das geistvolle Buch des Franzosen Poincaré: Wissenschaft und Hypothese, auch sein zweites Werk: Wert der Wissenschaft), daß, rein logisch genommen und der Erfahrung entsprechend, die „Idealisierung" und damit die Verwissenschaftlichung des Beobachtungsmaterials in sehr verschiedener Weise möglich ist.

Und doch hat sich allmählich ein ganz bestimmter Aufbau einer jeden Wissenschaft herangebildet, deren Fundamente schon teilweise recht fest stehen. Auch gibt es gewisse allgemeine Grundsätze, die wohl kein Physiker heute mehr opfern möchte. Wie steht es denn nun mit den Ansprüchen dieser Grundsätze auf allgemeine Zustimmung? Handelt es sich um eine bloße Konvention, die bequem ist und jederzeit abgestreift werden kann?

Das Beispiel der Geometrie wird uns den Weg zeigen. Man hat entdeckt, daß es vom rein logischen Gesichtspunkte aus eine Geometrie gibt, in der es nicht durch jeden Punkt nur eine Parallele zu einer gegebenen Geraden gibt, in der die Winkelsumme im Dreiecke folglich nicht zwei Rechte beträgt. An der rein logischen Existenz dieser Geometrie, d. h. an ihrer inneren Widerspruchslosigkeit ist nicht zu zweifeln. Kann man nun, etwa durch Messen der Winkel, praktisch feststellen, welche Geometrie richtig ist, diese oder unsere Euklidische? Nein, denn einmal gestatten Messungen keine absolut exakte Entscheidung, dann aber beruht die Messung auf Annahmen physikalischer Natur, z. B. der, daß die Lichtstrahlen wesentlich geradlinig laufen. Aber woher weiß man das? Nur durch physikalische Experimente, die sich wiederum auf die Annahme der Euklidischen Geometrie stützen. Und wäre es nicht viel plausibler, im Falle, daß die Messung eine erkennbare Abweichung der Winkelsumme von zwei Rechten ergeben hätte, die Abweichung auf eine Krummlinigkeit der Lichtstrahlen zurückzuführen als auf die Annahme einer nichteuklidischen Geometrie? Zweifellos das erstere, denn die Geometrie ist das Allgemeinere, das aller Naturwissenschaft Übergeordnete, das erst die Möglichkeit der Erfahrung (der Messung) gibt, das also einer festen Begründung vor aller Erfahrung, a priori, wie Kant sagt, bedarf.

Auch sind wir ja in Wahrheit nicht durch irgendwelches Messen von der Richtigkeit der Grundlagen der Geometrie überzeugt, wir kommen darauf durch eine besondere, über das rein Logische hinausgehende Art des Denkens, die Kant reine Anschauung nannte, die man vielleicht besser anschauliches Denken oder noch besser konstruktives Denken nennt: Wir konstruieren uns in Gedanken den Raum und seine Geometrie, den wir dann allen Messungen und Beobachtungen zugrunde legen.

Solcher konstruktiver, apriorischer, also nicht durch die Erfahrung gegebener (vielleicht wohl von ihr angeregter), sondern durch anschauliches Denken selbst geschaffener Elemente des wissenschaftlichen Erkennens bedarf aber eine jede Naturwissenschaft.

Wir nannten schon die Prinzipien der Klassifikation und der Kausalität, sie sind ganz sicher apriorischer Natur, denn keine Erfahrung kann sie uns aufzwingen.

Ein drittes Prinzip deuteten wir vorhin auch schon an: das Prinzip der Zerlegung resp. der Zusammensetzung. Die Bewegungserscheinungen lassen sich nicht direkt in Klassen teilen, sie müssen erst zerlegt werden. Oder, was dasselbe ist: Jede Bewegungserscheinung ist eine Zusammensetzung vieler, vielleicht unendlich vieler einfacher, idealer Bewegungen, von denen dann jede einer Klasse (einer Kraft) zugehört. So ist gewissermaßen eine Erscheinung mehreren Klassen zugeordnet.

Dieses dritte Prinzip blieb den Alten ganz verborgen, erst der große englische Naturphilosoph Bacon of Verulam sprach es um 1600 aus: „Man müsse die Natur zerschneiden.“ Als Ganzes wären uns fast alle Naturerscheinungen unverständlich, sie wären so kompliziert und mannigfaltig, daß der Mensch bald jeden Versuch eines Verständnisses aufgeben müßte; nur in wenigen Fällen, wo eine Klasse, die an einer Erscheinung beteiligt ist, dominiert, würden wir vielleicht wenigstens ein angenähertes Gesetz erkennen können.

Diese Zerlegung resp. Zusammensetzung gehorcht nun einem vierten Prinzip, das man das der Gleichwertigkeit der Ursachen nennen kann. Ist eine Erscheinung E in mehrere einfache der Klassen K_1, K_2, K_3, . . . zerlegt, deren Ursachen je U_1, U_2, U_3, . . . seien, so muß E eine Funktion der U_1, U_2, U_3, . . . sein, die bei verschiedener Anordnung der U ungeändert bleibt: es gibt keine Reihenfolge der Ursachen. So selbstverständlich dieser Ausspruch erscheinen mag, er ist rein logisch nicht beweisbar: es ließe sich sehr wohl eine Rangordnung aller Ursachen denken. Aber diese Rangordnung wäre etwas ganz Unbegreifliches, ihre Einführung bedeutete den nackten Verzicht auf naturwissenschaftliche Erklärung.

Verwandt mit diesem Prinzip ist ein fünftes: Das Prinzip der Homogenität und der Isotropie des Raumes und der Zeit: es gibt keine ausgezeichneten Stellen und Richtungen im Raume und in der Zeit. Oder: alle Naturerscheinungen sind von ihrer Lage und Orientierung im Raume und in der Zeit unabhängig. Oder: Raum und Zeit können nicht als Ursache einer Erscheinung auftreten, Raum und Zeit sind nicht materiell, es sind eben Gedankenkonstruktionen, wie wohl zuerst Newton klar erkannte und aussprach. Ein Verzicht auf dieses Prinzip würde natürlich logisch denkbar sein, aber es führte etwas ganz Unerkennbares in den Ursachenzusammenhang ein und ist daher a priori abzuweisen.

Ist der Raum als solcher kein Objekt der Erfahrung, so liegt es nahe, ihn überall und zu jeder Zeit mit Dingen ausgefüllt zu denken, die Objekt der Erfahrung werden können, d. h. mit Materie. Wir fügen demnach als ein sechstes Prinzip das der Kontinuität hinzu: Alle physikalisch beobachtbaren Größen sind stetig (und stetig differentiierbar) durch den ganzen Raum und die Zeit verteilt. Auch dieses Prinzip ist mathematisch unbeweisbar, desgleichen empirisch, denn keine Erfahrung ist fein genug, um zu Differentialen herabzusteigen, und doch ist sein Ausspruch eigentlich das Naheliegende, Selbstverständliche. Soweit unsere Beobachtung reicht, erweist sich die Natur in einem gewissen Sinne stetig, d. h. es gibt allmähliche Übergänge: wozu also leere Räume und Unstetigkeiten einführen, wenn sich dieselben jeder Beobachtung entziehen und außerdem die Klarheit und Einfachheit unseres Vorstellungsbildes erheblich stören würden? Wir erfinden uns keine Hohlräume und Unstetigkeiten, da wir sie nicht brauchen und sie nur der lebendigen Auffassung des materiellen Zusammenhanges aller Dinge im Wege sind.

4. Die Grundanschauung der Mechanik. Die Kontinuitätshypothese führt uns zu einer weiteren Annahme, die als Grundanschauung der Mechanik bezeichnet werden kann. Ist die Materie stetig, so kann sich kein Teil derselben bewegen, ohne daß die Nachbarschaft in Mitleidenschaft gezogen wird. Ordnen wir nun einer jeden Bewegungsklasse eine Kraft zu, so muß in diesem Falle, wo die Bewegung eines Stückes Materie durch die Umgebung beeinflußt ist, die Ursache dieses Bewegungsanteils in der Nachbarschaft gesucht werden. Was ist nun aber anschaulich einleuchtender, als daß wir uns die Wirkung der Nachbarschaft auf unseren herausgegriffenen Teil in einem Druck (einer Spannung) vorstellen, d. h. in einer Kraft, die überall auf der Oberfläche unseres Stückes Materie verteilt ist? Wir bilden uns auf diese Weise die Anschauung eines dynamischen Zusammenhanges der Materie und sprechen den Grundsatz aus:

In der ganzen materiellen Natur herrschen Spannungen (Drucke), welche längs eines jeden Flächenelementes die sich dort berührenden materiellen Teile aufeinander ausüben.

Von diesen Spannungen haben wir, soweit wir selbst Objekt der Mechanik sind, auch eine direkte sinnliche Anschauung: Wir fühlen beständig an unserer Körperoberfläche Drucke der Umgebung auf uns, in unserem Körper Drucke der einzelnen Gliederteile gegeneinander und Spannungen in den Muskeln. Wenn die Geometrie, ohne an sich Objekt der räumlichen Erfahrung zu sein, doch vor allem dem Auge und dem Tastsinne verwandtschaftlich zugeordnet ist, indem diese Organe dem geometrischen Vorstellungsvermögen neue Anregung geben, so sind es vor allem der Muskelsinn und der Drucksinn (es gibt auf der Haut besondere Druckpunkte mit Sinnesorganen für Druck), welche ein Einfühlen in die Gesetze der Mechanik gestatten. Es kann dem Studierenden der Mechanik nicht warm genug empfohlen werden, als Beispiel für mechanische Sätze den eigenen Körper — sei es als druckempfangend oder druckausübend — zu betrachten.

5. Das Verhältnis der verschiedenen Erkenntnisquellen zueinander. Fügt man unseren sechs Prinzipien noch als Postulat hinzu, daß es überhaupt ein allgemeines Grundgesetz der Mechanik geben soll, welches den Bereich der zu irgendeiner Kraft gehörenden Bewegungen feststellen soll, so kann man zeigen, daß unsere Prinzipien ausreichen, den Kraftbegriff als Form vollständig festzulegen, derart, daß jedes empirisch gegebene Bewegungsgesetz für eine Klasse von Erscheinungen sich wesentlich nur in einer Weise in die entsprechende Form bringen läßt.[1]) Es gibt nur ein passendes Kleid für die Wirklichkeit, und für Willkür ist kein Raum mehr.

Das soll hier nicht näher ausgeführt werden. Aber es muß bebetont werden, daß jene Erkenntnisquellen allein nicht ausreichen, die postulierten Grundgleichungen der Mechanik abzuleiten. Diese Gleichungen, welche die Beziehung der Kraft zur Bewegung ausdrücken, oder mit anderen Worten, welche aussagen, wie groß der Umfang der durch eine Kraft bestimmten Klasse von Bewegungserscheinungen ist, müssen in ihrer speziellen, üblichen, auf Newton zurückgehenden Form als Ausfluß der bisherigen Erfahrung bezeichnet werden. Sie sind heute noch ausreichend und bequem genug, den Stoff der Tatsachen aus der Welt der Bewegungserscheinungen zu ordnen.

Jedes spezielle Kraftgesetz aber kann sicherlich nur mit Hilfe der Erfahrung, also durch Experiment und Beobachtung gefunden werden.

Um es also zusammenzufassen: *Raum, Zeit und Kraft sind apriorische Formen, welche allein aus der Anschauung und aus allgemeinen Forschungsprinzipien abgeleitet werden können. Ihre in der Mechanik übliche Beziehung zueinander muß als eine durch die Erfahrung eingegebene, aber in ihrer Allgemeinheit konventionelle Festsetzung bezeichnet werden, die sich bis heute noch als ausreichend erwiesen hat; jedes einzelne Kraftgesetz entstammt wesentlich der Erfahrung.* Damit ist zugleich der Unterschied der Mechanik gegen die ganz apriorische Geometrie gekennzeichnet.

Die Richtigkeit dieser Behauptung mag ein jeder Leser dieses Buches an dem gegebenen Material selbst nachprüfen.

6. Über den Begriff des Axioms. Soll eine Wissenschaft einen logisch denkenden Kopf befriedigen, so muß sie imstande sein, aus scharf formulierten Voraussetzungen ihre Folgerungen streng logisch abzuleiten, d. i. durch ein richtiges Schlußverfahren. Wir nennen nun jene Voraussetzungen Axiome, wenn sie den Bedingungen genügen: 1. sie sollen hinreichen, die in Behandlung stehende Wissenschaft zu begründen, soweit es sich um allgemeine Sätze dieser Wissenschaft handelt. Es dürfen also nicht unausgesprochene Voraussetzungen

1) Siehe des Verfassers Aufsatz: „Über Raum, Zeit und Kraft als apriorische Formen der Mechanik." Jahresberichte d. Deutsch. Mathematiker-Vereinigung 1909.

in den Beweisen allgemeiner Sätze unterlaufen. 2. sie sollen widerspruchsfrei sein, d. h. es sollen keine Folgerungen möglich sein, die einander widersprechen. 3. sie sollen möglichst unabhängig voneinander sein, d. h. es soll sich keine der Voraussetzungen aus den anderen beweisen lassen.

Wie steht es nun mit der Definition der in den Axiomen enthaltenen Begriffe?

Die Axiome selbst definieren die Grundbegriffe so weit, als es für die Wissenschaft als logische Disziplin nötig ist, nämlich in ihrer Beziehung zueinander. Mehr kann reine Logik nicht; sie schließt in Bekanntem weiter. Es muß also für ihr Schließen einen Ausgangspunkt geben, der selbst nicht logisch erschlossen ist; diesen Ausgangspunkt bilden die Axiome. Die in ihnen enthaltenen neuen Begriffe können nun nicht durch eine exakte Definition aus allgemeineren gewonnen werden, denn dann ließen sie sich eben logisch aus diesen ableiten und wir hätten keine neuen Begriffe, keine neue selbständige Wissenschaft.

Die Axiome einer neu zu begründenden Wissenschaft sind also keine analytischen Urteile, sondern synthetische, d. h. nicht erschlossene, sondern solche, welche die Grundbegriffe erst aufbauen (Kant). Aber sie bauen diese nur so weit, als sie die Beziehungen zwischen ihnen angeben. Die Grundbegriffe und die Axiome, welche sich über diese aussprechen lassen, entstammen ihrem vollen Inhalte nach eben nicht der reinen Logik, ihre Quellen liegen tiefer. Ob in der Anschauung, ob in den obengenannten sechs Prinzipien oder in der Erfahrung (und dann bis zu einem gewissen Grade auch in bloßer Konvention) soll in dem Worte Axiom nicht zum Ausdruck kommen.

Das Beispiel der Geometrie mag noch das Gesagte erläutern.

Wenn die Geometrie begründet ist, kann man definieren, was ein Kegelschnitt ist, denn man braucht zur Definition nur Begriffe und Sätze, die schon bekannt sind. Ehe man aber Geometrie kennt, kann man nicht exakt sagen, was ein Punkt oder eine Gerade ist. Denn das sind dann vollkommen neue Dinge, die nicht unter schon Bekanntes fallen. Ich kann wohl eine Beziehung aussprechen, z. B. die, daß zwei Punkte eine Gerade bestimmen, und ich kann so viele solcher Beziehungen aufstellen, als nötig sind, um alle geometrischen Beweise zu führen. Aber nur die Anschauung sagt mir, was Punkte, Geraden usw. eigentlich sind, und wie ich auf jene Beziehungen komme. So klar die Sache an sich ist, so lange hat es gedauert, bis sich dieser Standpunkt in der Geometrie (durch die Arbeiten Hilberts besonders) durchgesetzt hat. Dasselbe gilt für die Mechanik. Exakt definieren zu wollen, was absoluter Raum, Kraft, Masse usw. sind, ist ein vergebliches Unterfangen; vom rein logischen Standpunkte aus ist es nur möglich, die Beziehungen zwischen diesen mechanischen

Grundbegriffen aufzustellen, aus denen alle weiteren Sätze folgen. Vor dem logischen Aufbau soll aber im folgenden stets die Entwicklung der Begriffe und Grundsätze aus den anderen Erkenntnisquellen eingehend auseinandergesetzt werden. Der Studierende möge darauf achten, diese verschiedenen Darstellungen nicht miteinander zu verwechseln.

Im Gegensatz zum Axiom nennen wir Annahmen, welche zur Bewältigung eines speziellen Problems nötig sind und nur den Anspruch auf eine angenäherte Gültigkeit erheben, Hypothesen.

7. Schlußbemerkung. Die vorangehenden Betrachtungen zeigen, daß die Wissenschaft keineswegs mit der Erfahrung identisch ist. Unsere Erfahrungen, Messungen, Beobachtungen sind zunächst einmal alle mit einer Menge notwendiger Fehler und Ungenauigkeiten behaftet. Da die Wissenschaft präzise Aussagen erfordert, muß das Material erst von den Fehlern gesäubert und, da man diese nicht a priori kennt, in einem gewissen Grade frei idealisiert werden. Dann ist man, wenigstens im Anfange einer Wissenschaft, nicht immer imstande, gleich den ganzen Komplex der Erscheinungen zu meistern: man muß das Wesentliche herausgreifen. Was ist aber das Wesentliche? Endlich tut der Mensch, wie oben nachgewiesen, zum Aufbau einer Wissenschaft eine Menge von Eigenem hinzu, er schafft bis zu einem gewissen Grade die Formen a priori. Ist das nun alles willkürlich? Keineswegs, denn man wird zunächst daran festhalten müssen, daß am Ende einer Wissenschaft keine Lücke mehr zwischen ihr und der Erfahrung bestehen darf, dann aber müssen die menschlichen Zutaten in einem gewissen Sinne notwendig sein, d. h. sie müssen uns durch die Anschauung oder gewisse allgemeine denknotwendige Prinzipien wie die in Nr. 3, 4 dargestellten aufgezwungen werden. Ohne Hypothesen, oder sagen wir genauer ohne transzendentale Bestandteile, d. h. Bestandteile, die nicht unmittelbar in der Erfahrung, sondern vor der Erfahrung gegeben sind und nie durch Erfahrung erwiesen oder verworfen werden können, geht es nicht; aber überflüssige Hypothesen wird man nach Möglichkeit zu vermeiden trachten. Eine Annahme wie z. B. die von Molekülen oder materiellen Punkten, die uns weder durch die Anschauung noch durch jene in Nr. 3, 4 genannten Prinzipien noch auch durch die Erfahrung gegeben sind, können wohl vorübergehend nützlich sein, sie werden aber immer einen stark metaphysischen, unwissenschaftlichen Charakter beibehalten. In diesem Sinne sagte Newton: „Hypotheses non fingo: ich mache mir keine Hypothesen zurecht."

8. Die Einteilung der Mechanik. Jeder Behandlung einer mechanischen Aufgabe muß die Frage vorangehen: Welche Bewegungen sind überhaupt nach den geometrischen Bedingungen des Systems (bewegten Körpers) möglich? Die Disziplin, welche sich mit dieser Frage beschäftigt und die nur die Grundbegriffe Raum und Zeit benötigt, heißt: geometrische Kinematik. Entwickelt die Kinematik ihre Begriffe und Sätze unter Hinzuziehung des Begriffes Masse, so spricht man von Massenkinematik. Stellt man sich die Aufgabe, wirklich vorkommende Bewegungen zu untersuchen und irgendwelche Gesetze über sie auszusprechen, so hat man es mit Phoronomie zu tun. Ausdrücke und Betrachtungen, die sich irgendwie auf Kräfte beziehen, heißen dynamisch; das Problem, zu untersuchen, wie die Kräfte beschaffen sein müssen, damit Gleichgewicht herrscht, ist das Grundproblem der Statik. Das umgekehrte Problem der Phoronomie und zugleich das Hauptproblem der über ihre Anfänge hinaus entwickelten Mechanik, nämlich aus als bekannt angenommenen Kräften die Bewegung zu bestimmen, heißt Kinetik. Dabei stellt es sich heraus, daß bei gewissen idealisierten Systemen nur eine Klasse von Kräften gekannt zu werden braucht, wenn man die Bewegung bestimmen will; sucht man aber auch die andern, als unbekannt anzusehenden Kräfte (sogenannten Reaktionskräfte) zu berechnen, ein Problem, das für die Festigkeit des Systems von Wichtigkeit ist, so hat man es mit einer Aufgabe der Kinetostatik zu tun (Bezeichnung von C. Heun).

9. Literatur. Newton war wohl der erste, der in seiner „Philosophia naturalis“ vom Jahre 1687 eine allgemeine Mechanik zu begründen suchte. Der Inhalt seiner Prinzipien ist auch für uns im wesentlichen noch wahr, die Form bedarf der Modernisierung. Kant hat dann in seinen „Metaphysischen Anfangsgründen“ die Richtlinien gegeben, wie auf philosophischem Wege an eine Begründung der Prinzipien heranzutreten ist. Kants Schrift blieb den Physikern ziemlich unbekannt, ja die Physik wandte sich in den ersten beiden Dritteln des 19. Jahrhunderts mit Absicht von erkenntnistheoretischen Untersuchungen ab. Erst um 1870 entstand eine energische Umkehr, als Kirchhoff in seiner Mechanik sagte, die Wissenschaft habe nicht die Aufgabe, Naturerscheinungen zu erklären, sondern nur die, sie zu beschreiben, und Mach in seiner Mechanik versuchte, mit allen metaphysischen Hypothesen aufzuräumen und nur die Erfahrung als maßgebend für die Erkenntnis gelten zu lassen. Das geistvolle Werk Machs, das eine lebendige, anschauliche, kritisch-historische Darstellung der Mechanik enthält, kann dem Studierenden aufs wärmste empfohlen werden. Freilich mußte der extreme Empirismus und Phänomenalismus Machs den Konventionalismus Poincarés nach sich ziehen; da, wie des Längeren ausgeführt, die bloße Erfahrung unmöglich eine Wissenschaft schaffen kann, auch nicht in Verbindung mit der reinen Logik, so mußten die erforderlichen Zutaten willkürlich, konventionell erscheinen, sollte es eben keine anderen Erkenntnisquellen als Erfahrung und Logik geben. Damit aber wurde der Wert der Wissenschaft in Frage gestellt: Poincaré selbst hat sich in seinem zweiten Werk (der Wert der Wissenschaft) gegen einen übertriebenen Konventionalismus gewendet: die Konventionen müssen so beschaffen sein, daß sie sich möglichst gut den Erfahrungen anpassen, sie müssen bequeme Hilfsmittel sein. (Machs Prinzip der „Denkökonomie" ist ein ähnliches Prinzip.) Damit ist zweifellos der erste Schritt zur Wiedereinführung apriorischer Elemente getan; wir sind einen Schritt weiter gegangen und haben versucht, gewisse allgemeine Prinzipien des naturwissenschaftlichen Denkens deshalb als ökonomisch zu erweisen, weil sie notwendig sind; wir haben uns bemüht, die an dem Aufbau der Mechanik beteiligten konstruktiven Bestandteile des Denkens aufzuzeigen, unbeschadet der Abwehr überflüssiger metaphysischer Spekulationen, in der man wohl ganz den Bestrebungen Kirchhoffs und Machs beipflichten muß.

Da man nie eine Wissenschaft nur aus einem Buche lernen sollte, so seien hier noch einige Werke genannt, die der Student mit zu Rate ziehen mag. Von den klassischen Autoren der Mechanik (Galilei, Newton, Varignon, Euler, d'Alembert und Lagrange) muß des letzteren „Mécanique analytique" (1. Aufl. 1788) vor allem als das Fundamentalwerk bezeichnet werden, das jeder Liebhaber der Mechanik gelesen haben sollte. Von neueren Werken seien zunächst drei umfangreiche Standartwerke hervorgehoben:

1. †Appell, Mécanique rationelle (3 Bde.).

2. *Thomson-Tait, Natural Philosophy (2 Bde.).

3. Routh, deutsch von Schepp, Dynamik der Systeme starrer Körper (2 Bde.; namentlich zum Weiterstudium einzelner Kapitel geeignet), und Routh, Analytical statics (nur englisch; 2 Bde).

Dann drei kleinere Werke, welche die Mechanik in ganz origineller Weise zu begründen versuchen:

H. Hertz, Die Prinzipien der Mechanik.

L. Boltzmann, Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik

G. Jaumann, Die Grundlagen der Bewegungslehre von einem modernen Standpunkte aus dargestellt.

Endlich noch einige sehr gute Lehrbücher:

1. Föppl, Technische Mechanik (6 Bde.).

2. *Gray, Physik, Bd. 1, deutsch von F. Auerbach (ein gut geschriebenes, elementares Lehrbuch).

3. Heun, Kinematik (Bd. I einer allgemeinen Mechanik, enthält hauptsächlich die analytischen Methoden der Kinematik inkl. Massenkinematik).

4. Kirchhoff, Mechanik (ein seinerzeit grundlegendes Werk, siehe oben).

5. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte (2 Bde, sehr umfassend, enthält hauptsächlich die geometrischen Methoden).

6. *Webster, Dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies (eine deutsche Übersetzung dieses schönen Buches ist geplant).

7. †Whittaker, Analytical Dynamics.

8. Von den zahlreichen älteren französischen Werken über die sogenannte rationelle Mechanik sei nur der Cours mécanique von †Despeyrous wegen der wertvollen Noten von Darboux genannt,

9. von italienischen die angenehm knappe †Meccanica razionale von Marcolongo, deren erster Band jetzt auch in erweiterter deutscher Bearbeitung von Timerding vorliegt.

Die mit * versehenen Werke eignen sich in erster Linie für Physiker, die mit † versehenen in erster Linie für Mathematiker und Astronomen, Föppl vor allem für Techniker. Doch: es gibt nur eine Mechanik, und die kann man im Grunde genommen aus jedem guten Buche lernen.

Endlich sei Bd. IV (Mechanik) der Encyklopädie der math. Wissenschaften genannt; es ist dies ein Nachschlagwerk, das in knapper Form, meist ohne Beweise, Prinzipien, Werdegang und Resultate der Mathematik und ihrer Anwendungen bringt und zur schnellen Orientierung über einen Gegenstand und die ganze vorhandene Literatur dient. Und zwar umfaßt Bd. IV sowohl die theoretischen als auch die technischen Probleme der Mechanik. Als allgemeine Begleiter des Buches seien besonders Artikel IV, 6 Stäckel, Elementare Dynamik und IV, 1 Voss, Prinzipien der rationellen Mechanik empfohlen.

Speziälliteratur werden wir an geeigneter Stelle nachweisen.

In erkenntnistheoretischer Hinsicht sei außer auf die oben erwähnten Werke von Mach und Poincaré noch auf die Sammlung: „Wissenschaft und Hypothese“ hingewiesen, die Teubner herausgibt, besonders auf Natorp, „Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften“, wo man weiteren philosophischen Literaturnachweis findet. Das Interesse, das heute auch von naturwissenschaftlicher Seite Kant entgegengebracht wird, zeigt sich in dem Erscheinen des Buches: König, „Kant und die Naturwissenschaft“, das zur Einführung in erkenntniskritische Studien empfohlen werden kann.

§ 2. Über Raum, Zeit und Bewegung.

10. Über die Zeitmessung. Was Raum und Zeit sind, kann und braucht hier nicht gesagt zu werden. Es genügt zu bemerken, daß wir unseren Betrachtungen den aus der Schulgeometrie bekannten, sogenannten Euklidischen Raum zugrunde legen; von der Zeit brauchen wir nur zu wissen, daß man das Zeitintervall von einem willkürlich gewählten Anfangsmomente an durch eine stetig veränderliche Größe t messen kann. Wie mißt man diese Zeit t? „Mit der Uhr,“ wird die Antwort lauten; aber ein jeder weiß, daß alle Uhren, selbst die besten astronomischen Uhren, ein wenig falsch gehen. Wo ist also die Normaluhr? Man antwortet darauf weiter, daß die Erde unsere beste Uhr sei. Sie drehe sich gleichförmig um ihre Achse so, daß sie in einem Jahr $365\frac{1}{4}$ mal dieselbe Stelle der Sonne, aber, da sie sich in demselben Sinne wie um die eigene Achse auch noch einmal im Jahre um die Sonne herum drehe, $366\frac{1}{4}$ mal dieselbe Stelle einer bestimmten Richtung im Fixsternsystem zukehre. Man teilt dementsprechend das Jahr in $365\frac{1}{4}$ mittlere Sonnentage zu 24 Stunden zu 60 Minuten zu 60 Sekunden. Und diese Sekunde ist dann die Einheit unseres Zeitmaßes. Der Sterntag, d. h. die Zeit, die bei einer Umdrehung gegen den Fixsternhimmel verläuft, umfaßt also $\frac{365\frac{1}{4}}{366\frac{1}{4}} \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$ Sek., d. h. $\frac{365\frac{1}{4}}{366\frac{1}{4}} \cdot 86400 = 86164$ Sek. $= 23^h\,56'\,4''$. Um also die Zeit einer Sekunde festzustellen, beobachtet man die Zeit der Umdrehung der Erde gegen den Fixsternhimmel und teilt diese Zeit in 86164 gleiche Teile.

Aber diese Festsetzung kann unmöglich als eine Definition des Zeitmaßes angesehen werden. Zunächst einmal sind alle Zahlenangaben ungenau, ja sogar schwankend. Vor allem aber weiß man keineswegs sicher, daß sich die Erde gleichförmig dreht. Wir könnten das ja allerdings postulieren, da wir das Zeitmaß noch frei haben. Wenn uns dann aber die weiteren Prinzipien der Mechanik unabweisbare Gründe an die Hand geben, die eine Veränderung der Umdrehung der Erde als möglich, ja sogar als wahrscheinlich hinstellen? So kämen wir doch zu einem Widerspruch; wollten wir die Zeit durch die Umdrehung der Erde definieren, so dürfte eine widerspruchsfreie Mechanik gar nicht die Möglichkeit einer Veränderung dieses Zeitmaßes zulassen.

Das Analoge würde gelten, wenn wir irgendeinen anderen empirischen Naturvorgang der Zeitmessung zugrunde legen wollten.

Andererseits ist aber auch für die Mechanik die Zeitmessung nicht gleichgültig, denn je nach einer verschiedenen Zeitmessung wird sich ein und dieselbe Bewegung anders darstellen.

Wir postulieren deshalb die Existenz einer bestimmten Art der Zeitmessung — wir nennen das so gemessene t die absolute Zeit —, für welche die Prinzipien der Mechanik richtig sind. Wir haben von einer solchen Zeit zweifellos eine bestimmte innere Anschauung; empirisch angeben können wir diese Zeit aus den oben angeführten Gründen von vornherein nicht: erst die Mechanik selbst gibt uns die Mittel an die Hand, zu prüfen, inwieweit die durch unsere Uhren gemessene Zeit mit der absoluten Zeit übereinstimmt. Man kann vielleicht auch sagen, die absolute Zeit ist ein notwendiger Hilfsbegriff, den wir in die Mechanik einführen.

11. Der Begriff der Bewegung. Fassen wir zur Zeit t_1 einen bestimmten Raumpunkt X_1 ins Auge und ordnen wir ihm für alle $t > t_1$ stetig andere Raumpunkte X zu, so sagen wir, der Punkt habe sich in der Zeit $t - t_1$ von X_1 nach X hinbewegt. Einen Raumpunkt X legen wir in bezug auf ein sogenanntes rechtshändiges Koordinatensystem (siehe Fig. 1) Ox, y, z durch die gerichtete Strecke OX, oder wie wir sagen den Vektor $\bar{r}$ (sprich r-Vektor!) fest. Die Bewegung des Punktes X studieren heißt: $\bar{r}$ als Funktion der Zeit untersuchen. Diese funktionale Abhängigkeit

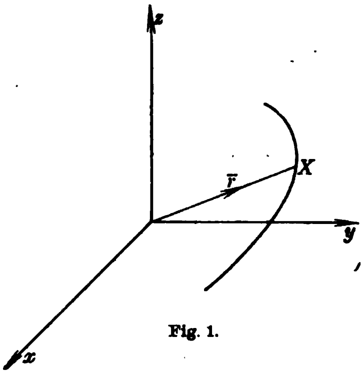


Fig. 1.

$$\bar{r} = \bar{f}(t)$$

oder in Koordinaten

$$x = x(t),$$
$$y = y(t),$$
$$z = z(t)$$

sei stetig und beliebig oft stetig differentiierbar: es wird also X eine stetige Kurve mit stetiger Tangente und regulärer Krümmung beschreiben: die sogenannte Bahnkurve des Punktes.

Sehr häufig wird man auch die Bewegung dadurch beschreiben, daß man die Bahnkurve in irgendeiner aus der Mathematik bekannten Weise darstellt und dann die Bewegung auf der Bahn dadurch schildert, daß man einen Parameter, etwa die von einer Anfangsstelle A an gezählte Bogenlänge s als Funktion der Zeit gibt:

$$s = \varphi(t).$$

12. Beispiele. In Beispielen werden wir oft statt eines mathematischen Punktes ganze Systeme betrachten, wenn die Punkte dieses Systems keine wesentlich verschiedene Bewegung ausführen, oder wenn es uns zur Beschreibung der Bewegung genügt, die Bewegung eines mittleren Punktes zu kennen.

Bei einem Eisenbahnzuge ist die Bahn dadurch gegeben, daß ihre Horizontalprojektion auf einer Landkarte eingezeichnet vorliegt, die Vertikalordinate als Funktion der Horizontallänge in einer sogenannten Längenprofilkurve. Die Bewegung eines Zuges wird dann entweder tabellarisch dadurch gegeben, daß die Bahnkilometer und die Fahrzeiten einander zugeordnet sind, oder in Form von graphischen Fahrplänen, indem man die Weglänge s als Funktion der Zeit t aufträgt. Das Anhalten auf Stationen ist offenbar durch eine horizontale Strecke gegeben. Da die Endpunkte dieser Strecken hauptsächlich wichtig sind, idealisiert man meist den graphischen Fahrplan dadurch, daß man die Enden der Haltestrecken durch gerade Linien verbindet. (In Fig. 2 gestrichelt.)

Betrachten wir als zweites Beispiel die Bewegung eines Punktes eines Schwungrades, das sich ohne Gestaltsänderung um eine feste Achse dreht, ohne längs derselben zu gleiten. Dann ist die Bahn des Punktes ein Kreis mit dem Radius r, wo r den Abstand des Punktes von der Achse bedeutet. Zählen wir einen Winkel ϑ von derselben Stelle A aus, von der aus wir s rechnen, so ist $s = r\vartheta$, und wir kennen die Bewegung, wenn wir ϑ als Funktion

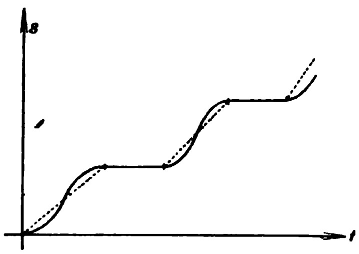


Fig. 2.

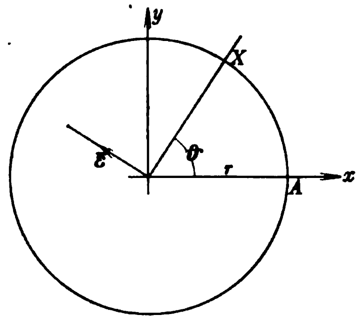


Fig. 3.

der Zeit geben. Das geschieht nun bei einem Schwungrad praktisch in der Weise, daß man die Touren zählt, d. h. zu jeder Zeit angibt, wieviel volle Umdrehungen N das Rad von Anfang an gemacht hat. Legt man N auch gebrochene Werte bei, so hat man offenbar $\vartheta = 2\pi N$ und $s = 2\pi r N$, so daß man mit N auch s als Funktion der Zeit kennt.

13. Die Beobachtungsmethoden für Bewegungen sind sehr mannigfaltig. Es sollen nur einige wichtigere hier kurz besprochen werden. Der Tourenzähler wurde schon vorhin erwähnt. Eine heute oft benutzte Methode ist die photographische: man nimmt z. B. ein bewegtes Objekt kinematographisch auf. Ist man imstande, auf den verschiedenen Platten Punkte zu identifizieren, so kennt man von ihrer Lage eine Zentralprojektion zu den Zeiten, wo eine Aufnahme stattfand. Besser ist die von O. Fischer in Leipzig angewandte Methode, die Bewegung eines Menschen zu studieren. An dem zu beobachtenden Punkte wird eine in regelmäßigen Intervallen aufleuchtende elektrische Glühlampe angebracht. Die Bewegung findet in verdunkeltem Raume bei offener Kamera statt. Auf der Platte wird man dann eine dichte Reihe feiner Lichtstriche erhalten, die verbunden die Zentralprojektion der Bahnkurve geben. Dadurch, daß man aber einzelne Punkte in bestimmten Zeitintervallen aufgenommen hat, hat man auch noch eine Zuordnung der Raumpunkte zur Zeit. Die Aufgabe, aus einer genügenden Anzahl von Zentralprojektionen die Raumkurve zu finden, gehört in die Photogrammetrie und kann hier nicht besprochen werden.

Endlich sei noch die sogenannte Stimmgabelmethode erwähnt. Denken wir uns der Einfachheit halber, das bewegte Objekt sei eine ebene Platte, die sich in bestimmter Richtung bewegt. Man läßt auf die Platte eine nicht mitbewegte Stimmgabel ihre Schwingungen in Form einer Schlängellinie aufzeichnen. Die Schwingungsrichtung der Stimmgabel sei senkrecht zur Bewegungsrichtung der Platte. Da man weiß, daß eine Stimmgabel ihre Schwingungen sehr genau zu gleichen Zeiten vollführt, so sind die Strecken AB, BC, CD (Fig. 4) Strecken, die zu gleichen Zeiten von der Platte zurückgelegt wurden.

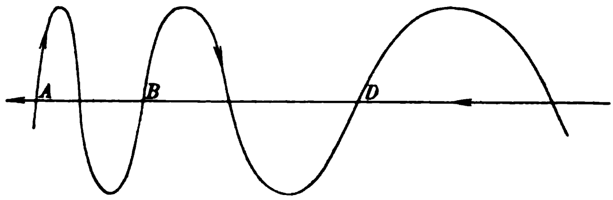


Fig. 4.

Will man nur die Gesamtzeit messen, die bei einer Bewegung verstreicht, so sind elektrische Kontaktmethoden am Platze: Ein Uhrwerk wird automatisch zu Beginn der Bewegung in Gang versetzt, am Ende gestoppt, so daß man die verstrichene Zeit bequem ablesen kann. Für feinere Beobachtungen nimmt man elektrischen Kontakt, für gröbere genügt eine von der menschlichen Hand bediente Stoppuhr.

Es gibt dann noch eine ganze Reihe von Geschwindigkeitsmessern, die aber schon mechanische Sätze voraussetzen und daher nicht besprochen werden sollen. (Ein Beispiel ist das Erdbebenpendel, siehe Nr. 73.)

14. Der absolute Raum. Unsere bisherigen Betrachtungen sind anwendbar in bezug auf irgendein Koordinatensystem: in den Beispielen haben wir stillschweigend eines genommen, das mit der Erde fest verbunden war. Nun ist es klar, daß, wenn man ein zweites Koordinatensystem nimmt, das gegen das erste selber bewegt ist, die Bewegungserscheinung eine ganz andere sein wird. (Man denke daran, welche eigentümlichen Bewegungen die doch ruhenden Gegenstände draußen für einen Reisenden im fahrenden Zuge machen.) Es kann also für die Mechanik nicht gleichgültig sein, auf welches System man im Prinzip alle Bewegungen bezieht. Aber man braucht jedenfalls ein solches System, damit die allgemeinen Aussagen der Mechanik einen bestimmten Sinn erhalten. Wir postulieren also ein ausgezeichnetes Koordinatensystem oder, was dasselbe ist, einen ausgezeichneten Raum, für den alle prinzipiellen Aussagen der Mechanik gelten sollen, und nennen ihn den absoluten Raum. Empirisch können wir diesen Raum ebensowenig a priori angeben wie die absolute Zeit: Erst die Mechanik selbst gibt die Mittel an die Hand, hinterher zu prüfen, wieweit in rohester Annäherung die Erde, in besserer Annäherung der mittlere Fixsternhimmel an Stelle des ruhenden Raumes gesetzt werden kann. Der absolute Raum ist also vom logischen Standpunkte aus und also auch vom rein wissenschaftlichen ebenso wie die absolute Zeit ein Gedankending, das wir einführen, um eine Form für die Erfahrungstatsachen der Mechanik zu schaffen. Aber es sind keine willkürlichen Dinge, sie werden uns zweifellos durch die innere Anschauung aufgenötigt. Denn vorstellen kann man sich eine Bewegung immer nur relativ zu einem Objekt; will man also die Bewegung im ganzen anschaulich fassen — und dadurch, daß sie aufs allgemeine geht, unterscheidet sich die Anschauung von der einzelnen Vorstellung —, so bedarf man eines letzten Substrats, hinsichtlich dessen sich alles andere bewegt, und dieses letzte ist der absolute Raum. Aber es handelt sich nur um eine Form unserer Anschauung, eine Art, die wirklichen Dinge zu ordnen; absoluter Raum und absolute Zeit sind selbst keine realen Dinge, keine Objekte der unmittelbaren Erfahrung: eine solche naive Ansicht ist seit Kants Erkenntniskritik unmöglich.

Wenn nichts Besonderes gesagt wird, soll im folgenden in prinzipiellen Fragen jede Bewegung stets auf den absoluten Raum bezogen werden; für empirische Beispiele identifizieren wir ihn vorerst mit der Erde. Erst später (§ 51) werfen wir die Frage nach dem hierdurch begangenen Fehler auf.

Aufgabe 1: Man entwerfe nach den Angaben des Kursbuches für irgendeinen Zug einen graphischen Fahrplan, nachdem man für die Zeit und die Wegstrecken geeignete Maßstäbe eingeführt hat.

§ 3. Die Geschwindigkeit.

15. Die Bahngeschwindigkeit. Betrachten wir nur die Bewegung in der Bahn, d. h. die Bogenlänge s als Funktion der Zeit t. Um nun Bewegungen ihrer Schnelligkeit nach zu vergleichen, wird man die zurückgelegten Wegstrecken auf die Zeiteinheit beziehen, d. h. den Ausdruck bilden $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, wenn Δt ein Zeitintervall t bis t' und Δs die zugehörige Wegstrecke bedeutet. $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ nennt man die mittlere Bahngeschwindigkeit in der Zeit t bis t'; dieser Ausdruck gibt an, wieviel Wegeeinheiten in dieser Zeit durchschnittlich pro Zeiteinheit zurückgelegt sind. Wissenschaftlich aber wäre dieser Ausdruck komplizierter zu behandeln als $s = \varphi(t)$ selber, da er eine Funktion zweier Variablen, von t und Δt ist.

Man geht deshalb zur Grenze über und nennt den Differentialquotienten

$$\lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} = \dot{\varphi}(t) = v$$

die Bahngeschwindigkeit zur Zeit t.

Sie kann positive und negative Werte annehmen, je nachdem die Bewegung in der Richtung wachsenden oder abnehmenden s stattfindet. Die geometrische Bedeutung von v in dem Wegzeitdiagramm, in dem der Weg s als Funktion von t dargestellt ist (Beispiel: Fig. 2), ist bekannt; es ist

$$v = \operatorname{tg} \alpha,$$

wenn α den Winkel bedeutet, den die Tangente an die Wegzeitkurve mit der t-Achse einschließt.

16. Beispiele. 1. Die „gleichförmige Bewegung in der Bahn" sei definiert durch einen konstanten Wert der Bahngeschwindigkeit $v = c$. Daraus folgt $s = ct + s_0$, wo s_0 die Stelle angibt, an der sich der Punkt zur Zeit $t = 0$ befand. Man überzeuge sich, daß bei der gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit und die mittlere Geschwindigkeit übereinstimmen.

2. Bei der Kreisbewegung war nach Nr. 12

$$s = r\vartheta = 2\pi r N.$$

Daraus folgt

$$v = \dot{s} = r\dot{\vartheta} = 2\pi r \dot{N}.$$

Man nennt nun $\dot{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{dt} = \omega$ die „Winkelgeschwindigkeit". $\dot{N}$ würde bedeuten: Touren pro Sekunde. Es ist jedoch gebräuchlich Touren pro Minute zu rechnen. Nennen wir die Anzahl der Touren pro Minute n, so ist

$$\dot{N} = \frac{1}{60} n \quad \text{und}$$

$$\omega = 2\pi \dot{N} = \frac{\pi}{30} n,$$

eine für die Umrechnung der Tourenzahl in die Winkelgeschwindigkeit wichtige Formel.

17. Über die Dimension der Geschwindigkeit ist folgendes zu bemerken: Man mißt eine Bahngeschwindigkeit gewöhnlich in Metern pro Sekunde und schreibt deshalb

$$[v] = [\mathrm{m}, \mathrm{sec}^{-1}]$$

oder, wenn man nur ausdrücken will, daß v eine Länge durch eine Zeit ist:

$$[v] = [l, t^{-1}].$$

In demselben Sinne ist zu schreiben

$$[\omega] = [\mathrm{sec}^{-1}],$$

$$[n] = [\mathrm{min}^{-1}],$$

da ein Winkel, gemessen durch das Verhältnis zweier Strecken, keine Dimension hat, d. h. von der Einführung irgendwelcher Maßeinheiten unabhängig ist, nachdem einmal festgesetzt ist, den Winkel im Bogenmaß zu messen, was in diesem Buche im allgemeinen stets geschehen soll.

Aufgaben: 2. Man berechne die mittlere Geschwindigkeit eines Zuges, der 70 km pro Stunde fährt, in m pro Sekunde.

3. Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit eines Rades, das 100 Touren pro Minute macht? Wie groß ist die Geschwindigkeit eines Punktes dieses Rades, der 1,2 m von der Achse entfernt ist?

4. Ein Mann von $h = 1{,}8$ m Höhe geht mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit von $c = 1{,}2$ m/sec. auf gerader horizontaler Bahn unter einer Laterne (leuchtendem Punkte) hindurch, die sich $a = 3$ m über dem Boden befindet. Wie schnell bewegt sich das Ende des Schattens des Mannes auf dem Boden? Der Einfachheit halber möge das Kopfende als ein Punkt (Helmspitze) angesehen werden.

5. Wie groß ist nach den Angaben von Nr. 10 die Winkelgeschwindigkeit der Erde? Wie groß ist die Geschwindigkeit eines Punktes, der auf dem Breitekreis von 30° ruht, wenn der Erdradius zu 6370 km angenommen wird?

18. Die Geschwindigkeit als Vektor. Durch eine naheliegende Verallgemeinerung der Betrachtungen von Nr. 15 gelangen wir zu einem vollkommeneren Geschwindigkeitsbegriff, der deshalb besser ist, weil er auch etwas über die Richtung der Bewegung aussagt.

Zur Zeit t befinde sich unser Punkt in X, zur Zeit $t' = t + \Delta t$ im Punkte X'. Die beiden Lagen seien durch die Vektoren $\bar{r}$ und $\bar{r}'$ gegeben. Wir bilden jetzt den Unterschied $\Delta\bar{r} = \bar{r}' - \bar{r}$, der offenbar nach Größe und Richtung die Strecke XX' darstellt, und dividieren durch Δt, d. h. wir verlängern XX' ohne Richtungsänderung im Verhältnis $1 : \Delta t$, so daß wir die Strecke XV' erhalten. Gehen wir jetzt zur Grenze $\Delta t = 0$ über, so rückt XV' in eine Strecke XV über, welche die Kurve in X berührt, und

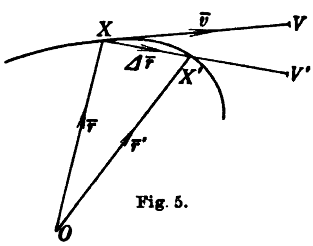


Fig. 5.

diese Strecke XV nennen wir die „Geschwindigkeit“ $\bar{v}$ schlechthin, oder, wenn wir den Unterschied hervorheben wollen, den Vektor der Geschwindigkeit. Es ist also

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}} = \bar{f}'(t).$$

$\bar{v}$ ist tangential zur Bahn und hat die augenblickliche Richtung der Bewegung. Die Größe aber von $\bar{v}$ ist

$$|\bar{v}| = \lim \left|\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}\right| = \left|\frac{ds}{dt}\right| = |v|.$$

Die Bahngeschwindigkeit und der Vektor der Geschwindigkeit haben also dieselbe Größe.

Sei $\bar{\sigma}$ ein Einheitsvektor (d. i. ein Vektor der Länge 1) in der Richtung wachsender Bogenlänge, so kann man schreiben

$$\bar{v} = v\bar{\sigma}.$$

Man überzeuge sich, daß

$$\bar{\sigma} = \frac{d\bar{r}}{ds}$$

ist.

Als gleichförmige Bewegung schlechthin definieren wir diejenige Bewegung, bei der $\bar{v}$ konstant nach Größe und Richtung ist: $\bar{v} = \bar{c}$. Daraus folgt durch Integration

$$\bar{r} = \bar{c}t + \bar{r}_0,$$

wo $\bar{r}_0$ den Ort angibt, an dem sich der Punkt zur Zeit $t = 0$ befand.

$$\bar{r} = \bar{c}t + \bar{r}_0$$

ist aber die Gleichung der Geraden in Parameterform (siehe Anhang). Bei einer gleichförmigen Bewegung bewegt sich also der Punkt in gerader Linie mit konstanter Geschwindigkeit, ein Resultat, das wohl jeder aus der Vorstellung der gleichförmigen Bewegung erwartet hat.

19. Darstellung der Geschwindigkeit in Koordinaten. Ist $\bar{r}$ durch die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z gegeben, so hat $\bar{v}$ die rechtwinkligen Komponenten $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. Denn $\Delta\bar{r}$ hat die Komponenten $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$; $\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$ hat also die Komponenten $\frac{x'-x}{\Delta t}, \frac{y'-y}{\Delta t}, \frac{z'-z}{\Delta t}$, da sich bei Verlängerung eines Vektors auch die Komponente im selben Verhältnis verlängert. Somit hat

$$\bar{v} = \lim \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$$

die Komponenten

$$\lim \frac{x'-x}{\Delta t} = \dot{x} \quad \text{usw.}$$

Um die rechtwinkligen Komponenten der Geschwindigkeit zu bekommen, hat man einfach die entsprechenden Komponenten des Ortsvektors $\bar{r}$ nach der Zeit zu differentiieren.

Beispiel der Kreisbewegung. Als Anfangspunkt nehmen wir den Mittelpunkt des Kreises, als x-Achse die Richtung nach dem Punkte A, die z-Achse stehe senkrecht zur Kreisebene (siehe Fig. 3). Dann ist

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta, \quad z = 0,$$

also, da $\dot{\vartheta} = \omega$,

$$\dot{x} = -r\sin\vartheta\cdot\omega = r\cos\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right)\omega$$

$$\dot{y} = r\cos\vartheta\cdot\omega = r\sin\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right)\omega,$$

$$\dot{z} = 0.$$

Daraus sieht man, daß bei positivem ω die Größe der Geschwindigkeit $r\omega$ ist, was wir schon wissen, und daß die Richtung der Geschwindigkeit mit der x-Achse den Winkel $\frac{\pi}{2} + \vartheta$ einschließt, also den Kreis tangiert. Bei negativem ω dreht sich die Richtung der Geschwindigkeit um.

Sei $\bar{\varepsilon}$ ein Einheitsvektor, senkrecht zu r im Sinne wachsenden ϑ's aufgetragen, so können wir das Resultat zusammenfassen:

Bei der Kreisbewegung ist

$$\bar{v} = \bar{\varepsilon} r \omega.$$

Denn beide Vektoren stimmen nach Größe und Richtung überein.

20. Ausdruck der allgemeinen, ebenen Bewegung in Polarkoordinaten. Nach Fig. 6 ist

$$x = r \cos \vartheta,$$

$$y = r \sin \vartheta;$$

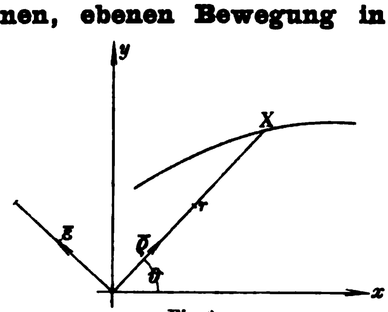


Fig. 6.

also, da $\dot{\vartheta} = \omega$,

$$\dot{x} = - r \sin \vartheta \cdot \omega + \dot{r} \cos \vartheta,$$

$$\dot{y} = \quad r \cos \vartheta \cdot \omega + \dot{r} \sin \vartheta,$$

oder

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \vartheta + r\omega \cos \left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right),$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \vartheta + r\omega \sin \left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right).$$

Es besteht also die Geschwindigkeit aus zwei Teilen, die sich vektoriell addieren: der eine Teil $\dot{r}$ schließt den Winkel ϑ mit der x-Achse ein und liegt also bei positivem $\dot{r}$ in Richtung des Radius der andere Teil $r\omega$ schließt mit der x-Achse den Winkel $\vartheta + \frac{\pi}{2}$ ein und steht also senkrecht zum Radius, bei positivem ω im Sinne wachsenden ϑ's. (Denn algebraischer Addition der Komponenten entspricht geometrische Addition der Vektoren selbst.)

Sei $\bar{\varrho}$ ein Einheitsvektor in der Richtung des Radius, $\bar{\varepsilon}$ ein Einheitsvektor senkrecht dazu im Sinne wachsenden ϑ's, so läßt sich das Resultat so schreiben:

$$\bar{v} = \bar{\varrho} \dot{r} + \bar{\varepsilon} r \omega.$$

Aufgaben: 6. Man zeichne die ebene Bahnkurve, die durch $x = \cos 2t$, $y = \sin 3t$ gegeben ist. Gibt es Stellen, wo die Geschwindigkeit null ist? Ist die Bewegung periodisch, d. h. wiederholt sie sich nach Ablauf einer bestimmten Zeit?

7. Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit der auf die Horizontalebene projizierten Bewegung in einer gewöhnlichen Schraubenlinie mit vertikaler Achse,

wenn der Radius a des Zylinders 200 m, die Steigung der Bahn $s = 2\frac{1}{2}\,\%_0$, die Bahngeschwindigkeit $c = 50$ km/Stunde beträgt? Wie drücken sich die rechtwinkligen Koordinaten von $\bar{r}$ und von $\bar{v}$ durch den Winkel ϑ aus, den die Horizontalprojektion von $\bar{r}$ mit der x-Achse einschlägt? (Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Schraubenlinie die x-Achse schneidet).)

§ 4. Der freie Fall. (Ein Problem der Phoronomie.)

21. Die vertikale Fallbewegung. Eine der alltäglichsten Bewegungserscheinungen ist der Fall der Körper, die, losgelassen oder sonst irgendwie ihrer Unterstützung beraubt, in der Luft „frei", d. h. ungehindert durch feste Körper, nach abwärts zu Boden sinken. Altertum und Mittelalter hatten sich vergeblich bemüht, dieser Erscheinung Herr zu werden: über die Behauptung, daß schwere Körper schneller fallen als leichte und den metaphysischen Versuch, dies damit zu erklären, daß die schwereren Körper untenhin, die leichteren obenhin gehören und also dieser natürlichen Lage zustreben, war man kaum hinausgekommen. Die noch am meisten physikalisch denkenden Köpfe hatten den vergeblichen Versuch gemacht, der Luft eine entscheidende Rolle beizumessen.

Es ist kein Wunder, daß die Alten kein Resultat erzielten, denn die Erscheinung ist so, wie sie sich darbietet, ungemein kompliziert. Man beachte, daß ja sogar einige Körper nicht fallen, sondern steigen: die Alten hätten das Feuer und den Geist genannt, wir würden brennende Gase, Luftfahrzeuge usw. erwähnen müssen. Mit einer bloßen Beschreibung der Vorgänge war hier gar nichts getan, es mußten vollständig neue Ideen auftreten.

Um 1600 sprach der englische Philosoph Bacon of Verulam das Prinzip aus: man müsse die Natur „zerschneiden" (dissecare naturam), so das „Wesentliche" herausgreifen und dieses zum Gegenstand der wissenschaftlichen Untersuchung machen.

Derjenige, der dieses an sich recht vage Prinzip in dem konkreten Beispiel der Fallbewegung durchführte, war Galileo Galilei. Seine heute noch sehr lesenswerten Untersuchungen wurden 1638 publiziert, es sind die berühmten „Discorsi", in Ostwalds Klassikersammlung deutsch erschienen.

Galileis Methode ist eine eigenartige, aber doch wieder typische Mischung experimenteller, logischer und intuitiver Forschungsmethoden.

Er beobachtete an schweren Körpern in der Voraussicht, daß sich bei ihnen das Wesentliche der Erscheinung reiner zeigen werde. So stellte er zunächst fest, daß alle Körper gleich schnell fallen, was allerdings schon vor ihm Benedetti behauptet hatte.

Aber wie fallen die Körper? Daß die Geschwindigkeit, wenn man losläßt, von null anfangend, stetig wächst, erkannte er leicht.

Zunächst versuchte er den Ansatz: die Geschwindigkeit möchte dem Wege proportional zunehmen. Aber bald erkannte er die logische Unmöglichkeit dieser Hypothese, denn aus

$$\frac{ds}{dt} = v = cs \quad \text{folgte} \quad \frac{ds}{s} = c\,dt$$

oder

$$\lg s = ct + \lg s_0 \quad (\lg s_0 \text{ Integrationskonstante}),$$

also

$$s = s_0 e^{ct}.$$

Sollte jetzt aber zu Anfang ($t = 0$), $s = 0$ sein, so verlangte dies $s_0 = 0$, d. h. dauernd $s = 0$, es käme keine Bewegung zustande.

Also versuchte Galilei, die Geschwindigkeit der Zeit proportional zu setzen:

$$v = gt,$$

wobei g für alle Körper dasselbe ist, und dieser Versuch gelang. Es folgt aus der Hypothese durch Integration

$$s = \frac{1}{2} gt^2 + s_0,$$

oder wenn s_0 und t so gemessen werden, daß zu Anfang s und t gleich null sind,

$$s = \frac{1}{2} gt^2;$$

die Wege wachsen mit dem Quadrate der Fallzeiten.

Experimentell bestätigen konnte Galilei dieses Gesetz mit seinen beschränkten Mitteln noch nicht. Aber aus Sätzen, die ihm aus der Statik für die schiefe Ebene bekannt waren, schloß er, daß für den Fall längs einer recht glatten schiefen Ebene dasselbe Gesetz gelten müsse, nur mit kleinerem g, wodurch die Erscheinung der Beobachtung leichter zugänglich wird. Und hier wies denn auch Galilei das Gesetz als befriedigend richtig nach.

Es ist nicht schwer, das Gesetz für die allgemeine vertikale Wurfbewegung zu erraten. Ist schon die Geschwindigkeit c zu Anfang vorhanden (nach unten positiv gerechnet), so wird man den Ansatz versuchen

$$v - c = gt,$$

d. h. die Geschwindigkeitsänderung der Zeit proportional zu setzen, woraus folgt

$$s = \frac{1}{2} gt^2 + ct + s_0,$$

s_0 gibt den Ort an, an dem sich der Punkt zur Zeit $t = 0$ befand.

22. Der schiefe Wurf. Welche Bewegung wird ein Körper ausführen, wenn wir ihm zu Anfang ($t = 0$) eine irgendwie gerichtete

Anfangsgeschwindigkeit $\bar{v}_0$ erteilen und ihn sich dann selbst überlassen?

Führen wir ein Koordinatensystem ein: $0, x, y, z$, die z Achse vertikal nach oben. Die Komponenten von $\bar{v}_0$ seien a, b, c.

Wie werden sich jetzt $\dot{x} - a$, $\dot{y} - b$, $\dot{z} - c$, die drei Geschwindigkeitsänderungen verhalten? Zunächst ist plausibel anzunehmen, daß sich $\dot{z} - c$, die vertikale Komponente, für sich genau so verhält, als wenn sie allein da wäre, d. h. es wird, unter Beachtung des Umstandes, daß jetzt z nach oben positiv gerechnet ist,

$$\dot{z} - c = -gt$$

sein.

Über $\dot{x} - a$ und $\dot{y} - b$ lehrt die Beobachtung, daß sie zweifellos abnehmen, denn schließlich fallen alle geworfenen Körper, wie Versuche zeigen, wesentlich nur noch vertikal. Aber diese Abnahme erweist sich um so geringer, je spezifisch schwerer die Körper sind, und Galilei vermutete deshalb in dieser Abnahme eine Erscheinung, die mit den Abweichungen der wirklichen Fallbewegung von dem in No. 21 besprochenen Galileischen Gesetz auf eine Stufe zu stellen sind. Demnach machte Galilei den Ansatz, daß sich die horizontalen Komponenten gar nicht ändern, daß also zu setzen sei:

$$\dot{x} - a = 0, \quad \dot{y} - b = 0,$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} x &= at + x_0 \\ y &= bt + y_0 \\ z &= -\frac{1}{2} gt^2 + ct + z_0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Wie sieht nun die *Bahnkurve* aus?

Legen wir den Anfangspunkte 0 in den Punkt, der bis jetzt die Koordinaten x_0, y_0, z_0 hatte, d. h. in den Anfangspunkt der Bewegung und die y-Achse so, daß $\bar{v}_0$ ganz in die xz-Ebene fällt, also $b = 0$ ist. Dann vereinfachen sich unsere Gleichungen zu

$$\begin{aligned} x &= at \\ y &= 0 \\ z &= -\frac{1}{2} gt^2 + ct. \end{aligned}$$

Daraus erkennt man zunächst:

Die Bewegung erfolgt in einer vertikalen Ebene.

Um die Bahnkurve zu erhalten, eliminieren wir t aus der ersten und dritten Gleichung und bekommen

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1}{2}\frac{g}{a^2} x^2 + \frac{c}{a} x \\ &= -\frac{1}{2}\frac{g}{a^2}\left(x - \frac{ac}{g}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{c^2}{g}. \end{aligned}$$

Daraus erkennt man:

Die Bahnkurve ist eine nach unten offene Parabel mit vertikaler Achse

$$x' = \frac{ac}{g} \quad \text{und} \quad z' = \frac{1}{2}\frac{c^2}{g}$$

geben den Scheitel der Parabel, denn ihre Gleichung lautet:

$$z - z' = -\frac{1}{2}\frac{g}{a^2}(x - x')^2.$$

$z' = \frac{1}{2}\frac{c^2}{g}$ ist die Wurfhöhe,

$2x' = \frac{2ac}{g}$ die Wurfweite.

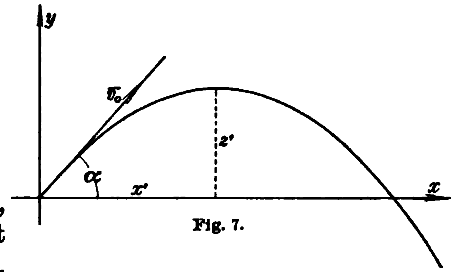


Fig. 7.

Ist α der Abgangswinkel, d. h. der Winkel, den $\bar{v}_0$ mit der Horizontalebene einschließt, so ergibt sich wegen $a = x_0 \cos\alpha$ und $c = v_0 \sin\alpha$

$$z' = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\sin^2\alpha; \quad 2x' = 2\frac{v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{V_0^2}{g}\sin 2\alpha.$$

Aufgaben: 8. Für welchen Abgangswinkel α ist bei gegebenem v_0 die Wurfweite ein Maximum?

9. Unter welchem Winkel α muß ich werfen, um bei gegebenem v_0 einen bestimmten Punkt mit den Koordinaten $z = z_1$, $x = x_1$ zu treffen? Gibt es mehrere Lösungen?

10. Man bestimme bei gegebenem v_0 die Einhüllende aller Wurfparabeln mit demselben Anfangspunkte, aber verschiedenem α. (Es empfiehlt sich, tg α als Parameter einzuführen.)

23. Vergleich des Galileischen Fallgesetzes mit der Erfahrung. Inwiefern hat Galilei das „Wesentliche" der Erscheinung „herausgeschnitten"? Versuche zeigen, daß zunächst bei schweren Körpern, solange sie sich mit nicht zu großer Geschwindigkeit, und ohne sich zu drehen, bewegen, die Galileischen Behauptungen recht gut stimmen. Man kann z. B. eine vertikale Platte fallen lassen und ihre Geschwindigkeit nach der in No. 13 besprochenen Stimmgabelmethode messen. In der kleinen sehr hübschen Schrift von Karl T. Fischer „Neue Versuche zur Mechanik" findet man die Methode und die Resultate angegeben. Für leichte Körper (Federn) oder Körper mit sehr großen Geschwindigkeiten (modernen Geschossen) oder aber Körper mit starken Drehbewegungen (Tennisbälle, Bumerang) stimmen die Gesetze ganz und gar nicht. So berechnet sich z. B. für ein Infanteriegeschoß mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 600$ m/sec. die maximale Wurfweite zu ca. 36 km, während sie in Wirklichkeit nur etwa 4 km beträgt; der günstigste Abgangswinkel liegt zwischen 30° und 35° statt bei 45° (siehe Aufgabe 8) und der höchste Punkt der Bahnkurve liegt nicht in der Mitte, sondern bei etwa $^3/_5$ der Wurfweite.

Sind nun die Galileischen Fallgesetze nur rohe Annäherungen vergänglicher Natur, oder sind sie mehr, geben sie wirklich das Wesentliche der Erscheinung wieder und wie erklären sich die Abweichungen?

Wir wissen heute, daß das Galileische Fallgesetz, richtig ausgesprochen, eines der am besten fundierten Naturgesetze ist, wir können g, allerdings auf wesentlich anderen Wegen sehr genau bestimmen: sein Wert schwankt etwas auf der Erdoberfläche, etwa zwischen 9,83 m/sec. am Pol und 9,78 m/sec. am Äquator. Der Mittelwert für unsere Breiten beträgt rund 9,81 m/sec. Ganz wenig, gerade noch an der Grenze des Meßbaren verändert sich auch g an ein und derselben Stelle mit der Zeit.

Weiter können wir sagen, daß die Abweichungen der wirklichen Fallbewegung von der Galileischen in erster Linie an einer Mitwirkung der Luft liegt, was schon Galilei ahnte, aber nicht beweisen konnte. Soweit es die Raumbeschränkung gestattet, erweisen moderne Experimente im luftleeren Raume das Galileische Gesetz als richtig. Tatsächlich bedeuten die Galileischen Fallgesetze auch für den lufterfüllten Raum einen bestimmten und wohlgetroffenen Ausschnitt aus der beobachteten Erscheinungsreihe; was das aber eigentlich heißen soll, können wir an dieser Stelle noch nicht sagen. Erst § 9 und besonders in No. 44, in der wir vom Kräfteparallelogramm reden werden, können wir die hier offen gelassene Frage beantworten.

24. Der typische Ausdruck für das Gesetz der Klasse aller Fall- und Wurfbewegungen. Sei $\bar{g}$ ein abwärts gerichteter Vektor von der Größe g, $\bar{r}_0$ ein Vektor mit den Komponenten x_0, y_0, z_0, so können wir das Gesetz der Fall- und Wurfbewegungen, das in den Gleichungen 1) in No. 22 ausgesprochen ist, so schreiben:

$$\bar{r} = \frac{1}{2}\bar{g}t^2 + \bar{v}_0 t + \bar{r}_0. \tag{I}$$

Dabei sind $\bar{g}$, $\bar{v}_0$, $\bar{r}_0$ konstante Vektoren, wenigstens in einem hinreichend kleinen Bereiche (siehe das oben in No. 23 über g Gesagte).

Aber diese Konstanten sind wesentlich verschieden: $\bar{g}$ ist eine feste Konstante, die für alle Fallbewegungen ein und dieselbe ist, ist also typisch für die Klasse der Fallbewegungen; $\bar{v}_0$ aber und $\bar{r}_0$ sind verschieden von Individuum zu Individuum.

Kann man nun nicht einen Ausdruck für das Gesetz I finden, das nur das typische $\bar{g}$ enthält, $\bar{v}_0$ und $\bar{r}_0$ aber nicht?

Sehr leicht, man braucht nur zweimal zu differentiieren und erhält sofort:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \bar{g}. \tag{II}$$

Umgekehrt folgt daraus durch zweimalige Integration wieder Gesetz I. Beide Gesetze sind also inhaltlich identisch. Aber wir haben jetzt einen typischen Ausdruck für das Gesetz der Klasse aller Fallbewegungen gefunden. Nennen wir $\bar{w} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ die Beschleunigung, so ist

für den Galileischen Ausschnitt der Klasse aller freien Fall- und Wurfbewegungen die Beschleunigung an ein und derselben Stelle der Erdoberfläche wesentlich konstant nach Größe und Richtung und für alle Körper ein und dieselbe.

So hat Galilei für eine Klasse von Bewegungserscheinungen, das Wesentliche herausgreifend, einen typischen Ausdruck gefunden und als Mittel, das Gesetz auszusprechen, den für die ganze Mechanik fundamentalen Begriff der Beschleunigung geschaffen.

§ 5. Die Beschleunigung.

25. Bahnbeschleunigung und Beschleunigung als Vektor.

1. Wir definieren die Bahnbeschleunigung w_t als zweite Ableitung der Weglänge s nach der Zeit:

$$w_t = \dot{v} = \ddot{s}.$$

Demnach ist die gleichförmige Bewegung in der Bahn durch $w_t = 0$ charakterisiert.

2. Analog sei die Beschleunigung als Vektor, oder die Beschleunigung schlechthin definiert durch

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}.$$

Wiederum ist die gleichförmige Bewegung dadurch charakterisiert, daß sie ohne Beschleunigung stattfindet.

Ist $\bar{w}$ konstant nach Größe und Richtung, so spricht man von einer gleichförmig beschleunigten Bewegung.

Gerade so, wie man (Nr. 19) die Komponenten von $\bar{v}$ nach einem rechtwinkligen Koordinatensystem dadurch erhält, daß man die entsprechenden Komponenten von $\bar{r}$ nach der Zeit differentiiert, so erhält man die Komponenten von $\bar{w}$ dadurch, daß man diejenigen von $\bar{v}$ nach der Zeit differentiiert, d. h.

$\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, sind die Komponenten von $\bar{w}$ nach den rechtwinkligen Achsen x, y, z.

Da eine Beschleunigung gemessen wird durch den Quotienten einer Länge durch das Quadrat einer Zeit, so schreibt man als Dimensionsformel

$$[w] = [l, t^{-2}] = [m, \sec^{-2}].$$

Aufgabe 11: Ein Förderkorb soll in eine Tiefe von 400 m so herabgelassen werden, daß seine Geschwindigkeit zunächst mit einer gleichförmigen Beschleunigung von 0,6 m/sek. auf den Wert von 4 m/sek. gebracht wird, dann eine Zeitlang auf diesem Wert verharrt und endlich mit einer Verzögerung (negativer Beschleunigung) von 0,4 m/sek. wieder auf Null zurückgeführt wird, so daß der Korb bei 400 m Tiefe stehen bleibt. Wieviel Zeit wird für jede dieser drei Bewegungsperioden verbraucht?

26. Zerlegung des Beschleunigungsvektors nach dem natürlichen Koordinatensystem der Bahnkurve. Nach Definition ist

$$\bar{w} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}.$$

Betrachten wir also $\bar{v}$ zu irgendeiner Zeit t und zu einer Nachbarzeit $t + \Delta t$. (Wir nehmen im folgenden an, daß $\Delta t > 0$ und daß $v > 0$ sei; die Betrachtungen lassen sich aber auf die anderen Fälle sofort übertragen.) Von einem Punkte C (Fig. 8) aus tragen wir nun eine Strecke $\overline{CV} = \bar{v}$ und eine zweite Strecke $\overline{CV'} = \bar{v}'$, d. h. gleich der Geschwindigkeit zur Zeit $t + \Delta t$ ab. Dann ist die Strecke $\overline{VV'}$ gleich $\Delta \bar{v}$.

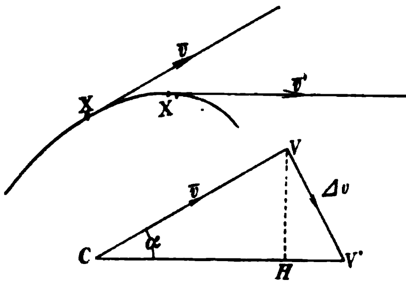


Fig. 8.

Diese Strecke zerlegen wir in die Strecke $\overline{VH}$ senkrecht zu CV' und in die Strecke $\overline{HV'}$, so daß $\bar{w}$ in zwei Teile zerfällt:

$$\bar{w} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2, \quad \bar{w}_1 = \lim \frac{\overline{VH}}{\Delta t} \quad \text{und} \quad \bar{w}_2 = \lim \frac{\overline{HV'}}{\Delta t} \text{ ist.}$$

Man sieht daraus zunächst, daß $\bar{w}$ ebenso wie die beiden Bestandteile $\bar{w}_1$ und $\bar{w}_2$ in die Ebene fällt, die durch zwei sogenannte benachbarte Tangenten gebildet wird, d. h. in die Schmiegungsebene der Kurve. Damit haben wir als ersten einen von Euler ausgesprochenen Satz:

Die ganze Beschleunigung liegt stets in der Schmiegungsebene der Bahn.

Die Normale zur Bahn, die senkrecht zur Schmiegungsebene steht, nennt man wohl auch die Binormale; man kann den Satz also auch so aussprechen:

Die Komponente der Beschleunigung in Richtung der Binormalen ist stets null.

Betrachten wir jetzt die Komponente $\bar{w}_1$. Da $\overline{VH}$ senkrecht zu CV' steht, d. h. in der Grenze senkrecht zu $\bar{v}$ steht, so wird $\bar{w}_1$ senkrecht zur Bahn stehen, während $\overline{HV'}$, als in der Richtung von $\bar{v}'$, d. h. in der Grenze in der von $\bar{v}$ gelegen, und somit auch $\bar{w}_2$ in die Bahnrichtung hineinfällt.

Ferner sieht man, daß $\overline{VH}$ stets nach der konkaven Seite der Bahnkurve hingerichtet ist, d. h. $\bar{w}_1$ fällt in die Richtung der sogenannten Hauptnormalen.

Bezeichnen wir nun den Kontingenzwinkel VCV' mit α, so ist wegen $VH = v \sin\alpha$

$$|\bar{w}_1| = \lim \left|\frac{\overline{VH}}{\varDelta t}\right| = \lim \left(\frac{VH}{\varDelta s}\cdot\frac{\varDelta s}{\varDelta t}\right) = v^2 \lim \frac{\sin\alpha}{\varDelta s} = v^2 \lim \frac{\alpha}{\varDelta s} = \frac{v^2}{\varrho},$$

wo ϱ den Krümmungsradius bedeutet.

Damit haben wir einen zweiten Satz, den man Huyghens verdankt:

Die zur Bahn senkrechte Komponente der Beschleunigung, die sogenannte „Zentripetalbeschleunigung“ w_ν ist gleich $\frac{v^2}{\varrho}$, wo ϱ den stets positiv zu zählenden Krümmungsradius der Bahn bedeutet. Die Zentripetalbeschleunigung ist stets nach der konkaven Seite der Bahn zu gerichtet.

Fassen wir endlich den zweiten Teil $\bar{w}_2$ ins Auge, so liegt er, wie schon bemerkt, in der Tangente der Bahn, und zwar ist mit Einschluß des Zeichens (positiv gerechnet in der Richtung wachsender Bogenlänge)

$$w_2 = \lim \frac{HV'}{\varDelta t} = \lim \frac{CV' - CH}{\varDelta t} = \lim \frac{CV' - CV\cos\alpha}{\varDelta t}$$

$$= \lim \frac{CV' - CV}{\varDelta t} + \lim \frac{CV(1-\cos\alpha)}{\varDelta t} = \lim \frac{\varDelta v}{\varDelta t} = \frac{dv}{dt};$$

denn es ist wegen $\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \cdots$

$$\lim \frac{CV(1-\cos\alpha)}{\varDelta t} = v\,\frac{1}{2}\lim\frac{\alpha^2}{\varDelta t} = 0.$$

d. h.:

Die orthogonale Komponente der Beschleunigung in der Richtung der Bahn ist gleich der Bahnbeschleunigung. (Newton.)

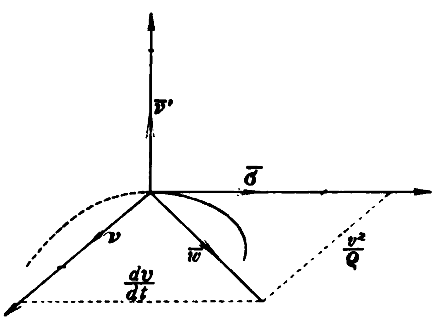


Fig. 9.

Damit sind wir am Ziel angelangt. Legen wir einen Einheitsvektor $\bar{\sigma}$ in die Richtung der Bahn im Sinne wachsender Bogenlänge, einen Einheitsvektor $\bar{\nu}$ in die Richtung der Hauptnormale, einen Einheitsvektor $\bar{\nu}'$ in die Richtung der Binormale, so daß $\bar{\sigma}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\nu}'$ ein rechtshändiges Koordinatensystem bilden, das sogenannte natürliche Koordinatensystem, so können wir unser Resultat so zusammenfassen:

$$\bar{w} = \frac{dv}{dt}\bar{\sigma} + \frac{v^2}{\varrho}\bar{\nu}.$$

Es liegt also die Beschleunigung stets nach der konkaven Seite der Kurve hin; ist die Bahnbeschleunigung null, so liegt $\bar{w}$ ganz in Richtung der Hauptnormalen.

Ist die Bahn gerade, so existiert nur die Bahnbeschleunigung

$$w_2 = w_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2},$$

die wir dann kurz die Beschleunigung w nennen.

Vergleichen wir unser Resultat mit der in Nr. 19 gewonnenen Formel

$$\bar{v} = \bar{\sigma} v$$

oder vielmehr mit der differentiierten

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{\sigma}\frac{dv}{dt} + \frac{d\bar{\sigma}}{dt}v$$

$$= \bar{\sigma}\frac{dv}{dt} + v^2\frac{d\bar{\sigma}}{ds},$$

so folgt:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = \bar{\nu}\frac{1}{\varrho},$$

eine rein geometrische Relation. Da $\bar{\sigma} = \frac{d\bar{r}}{ds}$ ist, so enthält sie erstens die bekannte Formel

$$\frac{1}{\varrho} = \left|\frac{d\bar{\sigma}}{ds}\right| = \left|\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2},$$

dann aber auch das anschaulich klare Resultat, daß $d\bar{\sigma}$ bei positivem ds in die Richtung der Hauptnormalen hineinfällt.

Beispiel der Kreisbewegung: Es war nach Nr. 19

$$v = r\omega = r\dot{\vartheta}.$$

Also ist die Bahnbeschleunigung

$$w_t = r\ddot{\vartheta} = r\dot{\omega}.$$

$\dot{\omega}$ heißt die „Winkelbeschleunigung".

Ihre Dimension ist

$$[\dot{\omega}] = [\sec^{-2}].$$

Zu dieser Komponente kommt noch die Zentripetalbeschleunigung hinzu, die deshalb, weil $r = \varrho$ und $v = r\omega$ ist, gleich ist

$$w_\nu = r\omega^2.$$

Aufgaben: 12. Man berechne nach den in Aufgabe 7 (Nr. 20) für die gleichförmige Bewegung in der gewöhnlichen Schraubenlinie gegebenen Daten die Beschleunigungskomponenten nach den drei Achsen, die Größe der Beschleunigung und unter Beachtung des Umstandes, daß die ganze Beschleunigung hier in die Hauptnormale hineinfällt, die Lage der Schmiegungsebene und den Krümmungsradius.

13. Wie groß ist für den in Aufgabe 5 (Nr. 17) genannten Punkt der Erde die Zentripetalbeschleunigung?

14. Man beweise die Formel $\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = \bar{\nu} \cdot \frac{1}{\varrho}$ direkt aus der Anschauung nach der in dieser Nummer gegebenen Methode.

15. Man zeige, daß in der Hauptformel $\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\bar{\sigma} + \frac{v^2}{\varrho}\bar{\nu}$ auf beiden Seiten, wie es sein muß, Größen gleicher Dimension stehen.

27. Ausdruck der Beschleunigung bei der allgemeinen ebenen Bewegung in Polarkoordinaten. In Nr. 20, 2. hatten wir für die Geschwindigkeit bei der ebenen Kreisbewegung bereits den Ausdruck gefunden:

$$\bar{v} = \bar{\varrho}\dot{r} + \bar{\varepsilon}r\omega.$$

Differentiieren wir ihn nach der Zeit, so erhalten wir

$$\bar{w} = \bar{\varrho}\ddot{r} + \dot{\bar{\varrho}}\dot{r} + \dot{\bar{\varepsilon}}r\omega + \bar{\varepsilon}\dot{r}\omega + \bar{\varepsilon}r\dot{\omega}.$$

Nun sieht man aber leicht aus der Figur, daß bei positivem ω, $d\bar{\varrho}$ die Richtung von $\bar{\varepsilon}$ hat und die Größe $d\vartheta$, da $\bar{\varrho}$ ein Vektor der Länge 1 ist, während $d\bar{\varepsilon}$ die Richtung von $-\bar{\varrho}$ hat, aber ebenfalls die Größe $d\vartheta$.

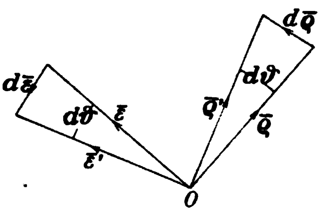


Fig. 10.

Mithin ist $\dot{\bar{\varrho}} = \bar{\varepsilon}\omega$ und $\dot{\bar{\varepsilon}} = -\bar{\varrho}\omega$, und das gilt auch für negative ω.

Somit erhalten wir für die Beschleunigung den Ausdruck:

$$\bar{w} = \bar{\varrho}\,(\ddot{r} - r\omega^2) + \bar{\varepsilon}\,(2\dot{r}\omega + r\dot{\omega}).$$

Die Beschleunigungskomponente nach der Richtung des Radiusvektors ist also $\ddot{r} - r\omega^2$, *die Komponente senkrecht dazu, positiv gerechnet im Sinne wachsenden* ϑ*'s, ist gleich* $2\dot{r}\omega + r\dot{\omega}$.

Für $r =$ konst. folgt die schon bekannte Formel der Kreisbewegung:

$$\bar{w} = -\bar{\varrho}r\omega^2 + \bar{\varepsilon}r\dot{\omega};$$

man sieht, daß im allgemeinen Falle noch zwei Bestandteile hinzukommen: eine Komponente $\ddot{r}$ in Richtung des Radius und eine Komponente $2\dot{r}\omega$ senkrecht dazu. Man beachte besonders diesen Bestandteil; wir werden später (Nr. 31) eine Interpretation desselben geben.

Aufgaben: 16. Man zeige, daß in der Hauptformel dieser Nummer auf beiden Seiten Größen gleicher Dimension stehen.

17. Man leite die Formel durch zweimalige Differentiation nach der Zeit aus den Formeln $x = r\cos\vartheta$; $y = r\sin\vartheta$ ab.

18. Eine logarithmische Spirale

$$r = a e^{k\vartheta}$$

werde von einem Punkte mit der konstanten Bahngeschwindigkeit c durchlaufen. Man drücke $\dot{r}$, ω und alle Bestandteile der Beschleunigung durch r und die gegebenen Konstanten aus und beweise unter Beachtung des Umstandes, daß wieder die ganze Beschleunigung Zentripetalbeschleunigung sein muß, den bekannten Satz, daß bei der logarithmischen Spirale die Tangente mit dem Radiusvektor einen konstanten Winkel einschließt.

19. Wie groß ist die Fallbeschleunigung g ausgedrückt in km/Stunde?

28. Der Hodograph. Für die Veranschaulichung einer Bewegung ist es oft nützlich, mit Möbius und Hamilton (beide lebten in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts) diejenige Kurve zu betrachten, die man erhält, wenn man von einem festen Punkt C aus in jedem Zeitmoment $\bar{v}$ aufträgt. Der Endpunkt von $\bar{v}$ beschreibt dann eine Kurve, den sogenannten Hodographen.

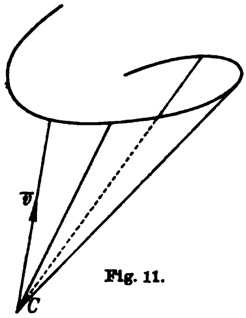


Fig. 11.

Man sieht sofort, daß die Geschwindigkeit, mit der der Hilfspunkt den Hodographen beschreibt, gleich der Beschleunigung der ursprünglichen Bewegung ist $\left(\text{da ja } \bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt}\right)$.

Bei der schlechthin gleichförmigen Bewegung zieht sich der Hodograph in einen Punkt zusammen.

Bei einer in der Bahn gleichförmigen Bewegung ist der Hodograph eine sphärische Kurve.

Bei einer ebenen Bewegung ist auch der Hodograph eben.

Die Tangentialebene des Hodographen durch den Punkt C ist stets der Schmiegungsebene der Bahnkurve parallel, denn sie enthält ja $\bar{v}$ und $\bar{w}$.

Der Winkel zwischen zwei benachbarten Radienvektoren ist stets gleich dem Kontingenzwinkel benachbarter Tangenten der Bahnkurve.

Aufgabe 20: Man bestimme den Hodographen für die Galileische Fallbewegung und für die in den Aufgaben 7 und 12 behandelte Bewegung in einer Schraubenlinie.

§ 6. Zwei einfache Fälle von Relativbewegung.

29. Zusammensetzung von Geschwindigkeiten. Wir betrachten die Bewegung eines Punktes einmal von einem Grundsystem aus, etwa einem im absoluten Raume ruhenden Koordinatensystem A, und nennen die entsprechende Geschwindigkeit die absolute Geschwindigkeit $\bar{v}$, ein zweites Mal aber von einem zu A selbst bewegten System K aus, indem wir seine Lagenänderung zu K ins

Auge fassen, und nennen die entsprechende Geschwindigkeit **relativ**, mit Zeichen $\bar{v}_r$. Um sich die relative Bewegung vorzustellen, denkt man sich selbst am besten auf den Körper K versetzt und macht die Annahme, als wisse man von einer Bewegung des K nichts. Der bewegte Körper K möge starr sein, d. h. bei der Bewegung sich selbst kongruent bleiben.

Denken wir uns nun die Stelle, an der sich augenblicklich X befindet, mit dem Körper K fest verbunden und mitbewegt, so wird sie eine Geschwindigkeit besitzen, die wir **Führungsgeschwindigkeit** nennen und mit $\bar{v}_f$ bezeichnen. Der Name kommt daher, daß wir uns vorstellen können, unser Punkt werde einmal von K mitgeführt und habe dann noch relativ zu K die Geschwindigkeit $\bar{v}_r$.

Es wird nun behauptet, daß

$$\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_f$$

ist, d. h. daß Relativgeschwindigkeit und Führungsgeschwindigkeit, geometrisch addiert, die absolute Geschwindigkeit ergeben.

Beweis: Unser Punkt sei in der Zeit Δt von X nach X' gekommen, während in derselben Zeit der an der Stelle X befindliche Punkt des Körpers K nach F gelangt sei. Dann ist

$$\overline{XX'} = \overline{XF} + \overline{FX'},$$

also

$$\bar{v} \equiv \frac{d\bar{r}}{dt} = \lim \frac{\overline{XF}}{\Delta t} + \lim \frac{\overline{FX'}}{\Delta t}.$$

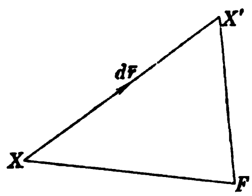


Fig. 12.

Nun ist sicherlich $\lim \frac{\overline{XF}}{\Delta t} = \bar{v}_f$.

Es wird aber behauptet, daß auch $\lim \frac{\overline{FX'}}{\Delta t} = \bar{v}_r$ ist. Sicherlich gibt $\overline{FX'}$ die relative Lagenänderung des Punktes X an, sowie sie sich vom absoluten Raume aus ansieht. Denn für den Körper K ist ja F mit X identisch. Der Größe nach ist auch sicherlich FX' die Lagenänderung relativ zu K, sowie sie von K selbst ausschaut. Der Richtung nach dagegen könnte ein Zweifel bestehen, da sich in der Zeit Δt das mit K fest verbundene Koordinatensystem etwas gedreht hat. Aber diese Drehung wird mit Δt unendlich klein, und daher geht in der Grenze $\frac{\overline{FX'}}{\Delta t}$ in einen Vektor über, der gegen das in K feste Koordinatensystem eine bestimmte Lage einnimmt. D. h. die kleine Drehung dieses Systems kommt in der Grenze nicht in Frage, und da der Geschwindigkeitsbegriff unabhängig davon ist, auf welches Koordinatensystem er bezogen wird, solange nur dessen eventuelle Bewegung nicht in Frage kommt, so ist $\lim \frac{\overline{FX'}}{\Delta t}$ auch die Relativgeschwindigkeit, so wie sie von K aus sich darbietet, d. h. gleich $\bar{v}_r$.

Damit ist der Satz bewiesen.

Sehr häufig wird die Frage umgekehrt nach der Relativgeschwindigkeit gestellt: natürlich ist

$$\bar{v}_r = \bar{v} - \bar{v}_f.$$

Beispiel: Ein Geschoß, das geradlinig senkrecht zur Fahrtrichtung einen Wagen durchschlägt, wird dies in zwei Löchern tun, die einander nicht gegenüberliegen. Es wird vielmehr das Austrittsloch gegen das Eintrittsloch der Fahrtrichtung entgegengesetzt um ein Stück verschoben sein, das gleich ist dem Produkt aus der Breite des Wagens und der Geschwindigkeit desselben, dividiert durch die Geschwindigkeit des Geschosses. Warum?

30. Der führende Körper hat eine Translationsbewegung. Wir sagen, ein Körper vollführe eine Translationsbewegung oder eine Parallelbewegung, wenn alle Strecken des Körper einander parallel und kongruent bleiben, oder was dasselbe ist, wenn alle Punkte zur selben Zeit nach Richtung und Größe dieselbe Geschwindigkeit besitzen.

Dann bleibt aber auch das Koordinatensystem im führenden Körper K sich selbst parallel. Sei C sein Anfangspunkt und $\bar{c}$ dessen Vektor vom Anfangspunkte O des ruhenden Systems aus, so ist $\dot{\bar{c}}$ die Translationsgeschwindigkeit und also auch die Führungsgeschwindigkeit. Somit ist in diesem Falle

$$\bar{v} = \dot{\bar{c}} + \bar{v}_r.$$

Differentiieren wir diesen Ausdruck, so folgt

$$\bar{w} = \ddot{\bar{c}} + \frac{d\bar{v}_r}{dt}.$$

$\ddot{\bar{c}}$ ist natürlich als Führungsbeschleunigung $\bar{w}_f$ zu bezeichnen, denn es ist die Beschleunigung eines jeden Punktes von K. Es wird behauptet, daß $\frac{d\bar{v}_r}{dt}$ die Relativbeschleunigung $\bar{w}_r$, d. h. die Beschleunigung unseres Punktes relativ zu K ist.

Zunächst ist $\frac{d\bar{v}_r}{dt}$ die Änderungsgeschwindigkeit des Vektors $\bar{v}_r$ bezüglich des ruhenden Raumes. Vektoren gelten aber als gleich, wenn sie gleiche Richtung und Größe haben, ein Vektor ändert sich also nicht, wenn man ihn parallel verschiebt oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn man relativ zu ihm das Koordinatensystem parallel verschiebt. Also ist $\frac{d\bar{v}_r}{dt}$ auch die Änderungsgeschwindigkeit von $\bar{v}_r$ bezüglich des Körpers K. Und somit gilt in dem Spezialfall dieser Nummer, aber, wie wir sehen werden, keineswegs allgemein:

$$\bar{w} = \bar{w}_r + \bar{w}_f.$$

Man beachte hier den Unterschied von Vektor und Punkt. Die Lage eines Punktes ist durch einen Vektor nur in bezug auf einen andern Punkt gegeben, etwa den Anfangspunkt eines Koordinatensystems; verschiebt man dieses daher parallel (während der Punkt fest bleibt), so ändert sich wohl der Vektor, der die Lage des Punktes angibt, deshalb, weil er ein anderer Vektor wird; ein Vektor aber, der unabhängig von dem Koordinatenanfangspunkt eine Bedeutung hat, wie $\bar{v}_r$, ändert sich dabei nicht.

31. Die Bewegung auf einem um einen festen Punkt rotierenden Strahl. Es drehe sich ein Strahl in der Ebene um einen festen Punkt O mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Man kann so sagen, da offenbar alle Punkte des Strahls Kreise mit derselben Winkelgeschwindigkeit ω beschreiben. Auf dem Strahl bewege sich ein Punkt X; seine augenblickliche Entfernung von O sei r. Da r und ω, also auch der Drehwinkel ϑ als Funktionen der Zeit allgemein gelassen werden, so kann X eine jede ebene Bewegung ausführen, nur daß diese jetzt als Relativbewegung zu dem sich drehenden Strahl aufgefaßt wird.

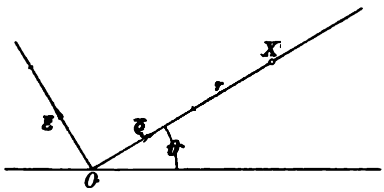


Fig. 13.

Dabei ist dann $\dot{r}$ die Relativgeschwindigkeit, $r\omega$ die Führungsgeschwindigkeit, denn $r\omega$ ist ja die Geschwindigkeit desjenigen Punktes des Strahls, der die Entfernung r von O hat. Wir bekommen somit nach Nr. 29

$$\bar{v} = \bar{\varrho}\dot{r} + \bar{\varepsilon} r\omega,$$

d. h. unsere alte Formel aus Nr. 20. ($\bar{\varrho}$ ist ein Einheitsvektor in der Richtung des Strahls, $\bar{\varepsilon}$ ein Einheitsvektor, darauf senkrecht in der Richtung wachsenden ϑ's.)

Nehmen wir nun die Formel für die Beschleunigung aus Nr. 27

$$\bar{w} = \bar{\varrho}(\ddot{r} - r\omega^2) + \bar{\varepsilon}(2\dot{r}\omega + r\dot{\omega}),$$

so kann man dieselbe jetzt in folgender Weise interpretieren:

$\bar{\varrho}\ddot{r} = \bar{w}_r$ ist offenbar als Relativbeschleunigung aufzufassen; denn es ist die Beschleunigung des Punktes X in bezug auf ein mit dem Strahl fest verbundenes Koordinatensystem.

Als Führungsbeschleunigung ist natürlich die Beschleunigung des Punktes des Strahls zu betrachten, der sich gerade an der Stelle X befindet. Also ist gemäß des Spezialfalles der Kreisbewegung nach Nr. 27

$$\bar{w}_f = -\bar{\varrho} r\omega^2 + \bar{\varepsilon} r\dot{\omega}.$$

Es bleibt also in der obigen Formel für die absolute Beschleunigung $\bar{w}$ noch etwas übrig, wenn man $\bar{w}_r$ und $\bar{w}_f$ abzieht, nämlich der Ausdruck

$$\bar{w}_c = \bar{\varepsilon} \cdot 2\dot{r}\omega,$$

und es ist also in diesem Falle

$$\bar{w} = \bar{w}_r + \bar{w}_f + \bar{w}_c.$$

$\bar{w}_c$ heißt als das doppelte Produkt zweier Geschwindigkeiten $\dot{r}$ und ω zusammengesetzte Beschleunigung oder auch nach dem französischen Autor, der zu Anfang des 19. Jahrhunderts auf die große technische Bedeutung dieser Beschleunigungskomponente hinwies: Coriolisbeschleunigung. Die zugrunde gelegte Formel der absoluten Beschleunigung in Polarkoordinaten kommt aber schon im 18. Jahrhundert bei Clairaut vor.

Es ist also in dem betrachteten Fall die absolute Beschleunigung gleich der geometrischen Summe aus der Relativbeschleunigung, aus der Führungsbeschleunigung und aus der Coriolisbeschleunigung. Letztere ist gleich dem doppelten Produkt aus der Relativgeschwindigkeit und der Drehgeschwindigkeit des Strahls und steht bei positiven Werten dieser Faktoren auf dem Radiusvektor im Sinne des wachsenden Drehwinkels senkrecht.

Wir werden später (§ 47, Nr. 269) sehen, daß der erste Teil dieses Satzes allgemein richtig ist.

§ 7. Die Planetenbewegung als Zentralbewegung. (Ein Problem der Phoronomie.)

32. Die Keplerschen Gesetze. Mit der Bewegung der Planeten hatten sich die Alten schon eingehend befaßt. Ausgehend von der Idee, daß die Kreisbewegung als die vollkommenste Bewegung die natürliche Bewegung der Himmelskörper sein müsse, hatten sie, als ihr Wahrheitssinn die Unhaltbarkeit dieser Hypothese erkannte, eine Darstellungsweise ausgebildet, die ebensosehr der Wahrheit als auch ihrer Grundidee gerecht wurde: sie beschrieben die Bewegung der Planeten relativ zur Erde mit Hilfe von Epizykeln, indem sie einen Hilfspunkt auf einem Grundkreis um die Erde laufen ließen; um diesen Hilfspunkt einen zweiten ebenfalls im Kreise usw. fort, bis sie zu einem Punkte kamen, dessen Bewegung mit der des Planeten hinreichend genau übereinstimmte. Dieses komplizierte System wurde etwas einfacher, als Kopernikus mit seiner Idee durchdrang, die Bewegung der Himmelskörper relativ zur Sonne zu studieren; aber prinzipiell war noch nichts geändert, eine Einsicht war noch nicht gewonnen; dazu reicht eben eine noch so genaue Beschreibung des Naturvorganges nicht aus. Es sei übrigens bemerkt, daß die Darstellung der Planetenbewegung mittels Epizykeln noch heute ihren hohen mathematischen Wert hat.

Kepler war es, ein Zeitgenosse Galileis, der in diesem Problem den entscheidenden Schnitt tat, und obwohl die Form seiner Gesetze noch rein beschreibend war, sagen wir besser noch nicht eine unmittelbar mechanische war, gelang es ihm doch durch eine beispiellos geniale Intuition, Gesetze aufzustellen, die zwar nur annähernd richtig waren, aus denen dann aber später Newton Folgerungen ziehen konnte, die exakt formuliert und in naturgemäßer Weise verallgemeinert gerade imstande waren, die vorerst noch offensichtlichen Abweichungen von Theorie und Beobachtung auf ein Minimum herabzudrücken. Was also Galilei bei der Fallbewegung gelungen war, das gelang Kepler bei der Planetenbewegung: er griff das „Wesentliche“ der Erscheinung heraus, aber noch viel unbewußter als Galilei.

Gestützt auf das ausgezeichnete Beobachtungsmaterial Tycho de Brahes sprach Kepler nach langjährigen Bemühungen zunächst für den Mars, dann allgemein die folgende Gesetze aus:

1. „Die Planeten bewegen sich in Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.“

2. „Die von der Sonne ausgehenden Radienvektoren überstreichen in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume.“

3. „Die Kuben der großen Achsen der Ellipsen zweier Planeten verhalten sich wie die Quadrate ihrer Umlaufszeiten.“

Geben wir den Gesetzen eine mathematische Form:

Sei r der Radiusvektor von der Sonne S zum Planeten P, ϑ der Winkel, den r mit der Richtung nach dem Perihel, d. h. der der Sonne am nächsten gelegenen Stelle A der Bahnkurve einschließt, p der sogenannte Parameter der Ellipse, ε die numerische Exzentrizität, so lautet die Polargleichung der Ellipse

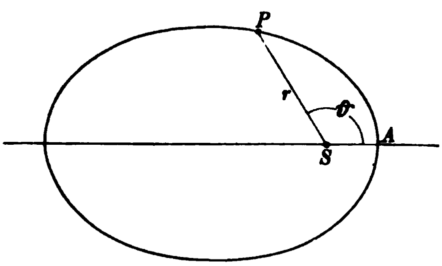


Fig. 14.

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \vartheta}. \tag{1}$$

Um das zweite Gesetz zu formulieren, bezeichnen wir den unendlich schmalen Sektor, der von zwei benachbarten Radienvektoren mit dem Zentriwinkel $d\vartheta$ eingeschlossen wird, mit $\frac{1}{2}\,dF$. Dann sagt das zweite Gesetz aus, daß $\frac{1}{2}\,dF$, also auch dF der zugehörigen Zeit dt proportional ist,

$$dF = C \cdot dt.$$

Denn dann gehören zu gleichen dt gleiche dF, also auch zu gleichen Δt gleiche ΔF.

Passend wird man $\frac{dF}{dt}$ als „Flächengeschwindigkeit" bezeichnen.

Nun ist aber

$$\frac{1}{2}dF = \frac{1}{2}r^2 d\vartheta,$$

und somit erhält das zweite Keplersche Gesetz die Form

$$r^2\omega = C, \tag{2}$$

wo $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$ gesetzt ist.

Nennen wir endlich die halbe große Achse der Ellipse a, die Umlaufszeit τ_0, so sagt das dritte Gesetz aus:

$$\frac{a^3}{\tau_0^{\,2}} = \Delta \tag{3}$$

ist eine für alle Planeten gleiche Konstante, sie ist also charakteristisch für das ganze Planetensystem.

Die Sonne wird bei der ganzen Betrachtungsweise als ruhend angesehen.

33. Folgerungen für die Beschleunigung. Newton zog in seiner „Philosophia naturalis" (deutsch mit „Theoretische Physik" zu übersetzen), diesem grundlegenden Werke der Mechanik, das zuerst 1687 erschien, die Folgerungen aus den Keplerschen Gesetzen für die Beschleunigung der Planetenbewegung.

Aus dem zweiten Gesetz

$$r^2\omega = C$$

folgt durch Differentiieren

$$2r\dot{r}\omega + r^2\dot{\omega} = 0,$$

oder, da r nicht null ist,

$$2\dot{r}\omega + r\dot{\omega} = 0.$$

Nun ist aber bei einer jeden ebenen Bewegung — und mit einer solchen haben wir es hier zu tun — nach Nr. 27 die Komponente der Beschleunigung senkrecht zum Radiusvektor $2\dot{r}\omega + r\dot{\omega}$. Diese ist also hier null, oder die ganze Beschleunigung fällt in die Richtung des Radiusvektors hinein. Das läßt sich offenbar auch umkehren, aus $2\dot{r}\omega + r\dot{\omega} = 0$ folgt rückwärts $r^2\omega = C$, so daß wir sagen können:

Aus dem zweiten Keplerschen Gesetz allein folgt bereits, daß die ganze Beschleunigung radial gerichtet ist, und umgekehrt: wissen wir, daß bei einer ebenen Bewegung die Beschleunigung radial gerichtet ist, so gilt das zweite Keplersche Gesetz für diese Bewegung.

Berechnen wir jetzt die Radialbeschleunigung. Nach Nr. 27 hatte sie, nach außen positiv gerechnet, den Ausdruck

$$\ddot{r} - r\omega^2.$$

Benutzen wir zunächst das zweite Keplersche Gesetz, um ω und die Zeit t zu eliminieren, d. h. statt t den Winkel ϑ als unabhängige Variabele einzuführen.

Es ist

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\vartheta}\omega = \frac{dr}{d\vartheta}\frac{C}{r^2} = -C\frac{d\frac{1}{r}}{d\vartheta},$$

$$\ddot{r} = -C\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\vartheta^2}\omega = -\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\vartheta^2}.$$

Somit läßt sich unter Benutzung des zweiten Keplerschen Gesetzes allein die Radialbeschleunigung auf die Form bringen:

$$\ddot{r} - r\omega^2 = -\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\vartheta^2} - \frac{C^2}{r^3} = -\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\vartheta^2} + \frac{1}{r}\right).$$

Nun ist aber nach dem ersten Keplerschen Gesetz

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p}\cos\vartheta,$$

also

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\vartheta^2} = -\frac{\varepsilon}{p}\cos\vartheta = -\frac{1}{r} + \frac{1}{p},$$

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\vartheta^2} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p}.$$

Setzen wir das in den obigen Ausdruck für $\ddot{r} - r\omega^2$ ein, so erhalten wir die Komponente der Beschleunigung in Richtung des Radiusvektors

$$-\frac{C^2}{p}\cdot\frac{1}{r^2}.$$

Aus den beiden ersten Keplerschen Gesetzen folgt, daß die ganze Beschleunigung auf die Sonne zugerichtet und dem Quadrat der Entfernung des Planeten von der Sonne umgekehrt proportional ist.

Sei $\bar{\varrho}$ ein Einheitsvektor, von der Sonne auf den Planeten zugerichtet, so läßt sich das Resultat aus den beiden ersten Keplerschen Gesetzen so zusammenfassen:

Bei der Planetenbewegung ist

$$\bar{w} = -\bar{\varrho}\frac{C^2}{p}\frac{1}{r^2}.$$

Was sagt nun das dritte Keplersche Gesetz aus? Um das zu erfahren, drücken wir a und τ_0 durch unsere Konstanten aus.

Da sich die große Achse $2a$ aus dem Radiusvektor für $\vartheta = 0$ und dem für $\vartheta = \pi$ zusammensetzt, ist

$$2a = \frac{p}{1+\varepsilon} + \frac{p}{1-\varepsilon},$$

also

$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2},$$

die halbe kleine Achse ist

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Um τ_0, die Umlaufszeit, zu erhalten, schreiben wir das zweite Keplersche Gesetz

$$dt = \frac{2}{C}\frac{1}{2}dF,$$

woraus durch Integration über einen vollen Umlauf folgt

$$\tau_0 = \frac{2}{C}\int\frac{1}{2}dF = \frac{2}{C}\mathfrak{J},$$

wo $\mathfrak{J}$ den Inhalt der Ellipse bedeutet, also

$$\mathfrak{J} = ab\pi = \frac{p^2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}^3}.$$

Somit ist

$$\varDelta = \frac{a^3}{\tau_0^2} = \frac{p^3}{(1-\varepsilon^2)^3}\frac{C^2}{4p^4\pi^2}(1-\varepsilon^2)^3 = \frac{C^2}{4p\pi^2},$$

d. h.

$$\frac{C^2}{p} = 4\pi^2\varDelta.$$

Die Konstante $\frac{C^2}{p}$ *des Beschleunigungsgesetzes ist ein und dieselbe für alle Planeten; sie ist typisch für die Klasse der Planetenbewegungen.*

Nennen wir sie λ, so können wir das Beschleunigungsgesetz, das Newton aus den Keplerschen Gesetzen für die Bewegung der Planeten um die Sonne gewann, kurz so aussprechen:

Es ist

$$\bar{w} = -\bar{\varrho}\lambda\frac{1}{r^2},$$

wo λ *eine für alle Planeten gleiche Konstante bedeutet.*

34. Ableitung der Keplerschen Gesetze aus dem Newtonschen. Besitzen umgekehrt eine Reihe von Punkten P Beschleunigungen, die auf ein festes Zentrum S zugekehrt sind und dem Gesetz

$$\bar{w} = -\bar{\varrho}\lambda\frac{1}{r^2}$$

gehorchen, so folgen daraus die Keplerschen Gesetze.

Zunächst sind die Bahnen eben. Plausibel machen kann man das leicht, beweisen wollen wir es später. Betrachten wir die Ebene durch die augenblickliche Lage von P, seine Geschwindigkeit $\bar{v}$ und den Punkt S, so enthält diese Ebene auch $\bar{\varrho}$ und somit auch $\bar{w}$, ist also Schmiegungsebene der Bahnkurve. Es wird also auch nach einem Zeitmoment dt die Geschwindigkeit noch in dieser Ebene liegen — bis auf Größen 2[ter] Ordnung —, und damit auch das neue $\bar{w}$ und die neue Schmiegungsebene. Der Winkel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schmiegungsebenen wird also 2[ter] Ordnung klein sein, die Torsion der Bahn also null. Daß aber eine Bahn ohne Torsion eben ist, dürfte anschaulich klar sein.

Wissen wir, daß die Bahn eben ist, so folgt nach dem ersten Satz von Nr: 33 sofort, wie schon bemerkt, der zweite Keplersche Satz

$$r^2\omega = C.$$

Damit aber nimmt der Ausdruck für die Radialbeschleunigung, wie in Nr. 33 gezeigt wurde, die Form an

$$\ddot{r} - r\omega^2 = -\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\vartheta^2} + \frac{1}{r}\right).$$

Soll also dieser Ausdruck gleich $-\lambda\frac{1}{r^2}$ sein, wie es das Newtonsche Gesetz verlangt, so haben wir die Differentialgleichung zu integrieren

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\vartheta^2} + \frac{1}{r} = \frac{\lambda}{C^2}.$$

Setzen wir abkürzungsweise $p = \frac{C^2}{\lambda}$, so ist

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}$$

eine Partikularlösung und

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p}\cos(\vartheta - \vartheta_0)$$

die allgemeine Lösung mit $\frac{\varepsilon}{p}$ und ϑ_0 als Integrationskonstanten. Denn führen wir $y = \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$ als neue abhängige Variable ein, so genügt y der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{d\vartheta^2} + y = 0,$$

welche als allgemeines Integral $y = a\cos(\vartheta - \vartheta_0)$ mit a und ϑ_0 als Integrationskonstanten hat. Setzen wir $a = \frac{\varepsilon}{p}$, so bekommen wir obiges Resultat.

Also folgt

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\vartheta - \vartheta_0)}.$$

ε kann stets als positiv angenommen werden. Für $\varepsilon < 1$ ist das die Gleichung einer Ellipse ($\vartheta = \vartheta_0$ gibt jetzt das Perihel, dessen Lage wir natürlich von vornherein nicht kennen); $\varepsilon = 1$ bedeutet eine Parabel, $\varepsilon > 1$ eine Hyperbel. Also auch die Bahnen der Kometen, die annähernd Hyperbeln oder Parabeln oder Ellipsen mit starker Exzentrizität sind, folgen dem Newtonschen Beschleunigungsgesetze.

Wenn man also die Keplerschen Gesetze dahin erweitert, daß die Bahnen auch Hyperbeln und Parabeln sein können, so

erweisen sich die Keplerschen Gesetze als vollständig identisch mit dem Newtonschen Beschleunigungsgesetz,

denn daß auch das dritte Keplersche Gesetz folgt, ist klar, da aus

$$\frac{a^3}{\tau_0^2} = \frac{\lambda}{4\pi^2}$$

die Gleichheit des links stehenden Ausdrucks für alle Planeten folgt.[1])

Wenn also die Keplerschen Gesetze und das Newtonsche Gesetz inhaltlich einander gleich sind, worin besteht dann der Fortschritt Newtons gegen Kepler?

Newton hat ein Gesetz gefunden, das *typisch* für die ganze *Klasse* der Planetenbewegungen ist; die für den einzelnen Planeten individuellen Konstanten p, ϑ_0, ε, C und die Größen, welche die Lage seiner Bewegungsebene angeben, kommen in dem Gesetz nicht mehr vor.

Mittel aber, das Gesetz in die typische Form zu bringen, war der Galileische Beschleunigungsbegriff.

Schon Wren hatte vor Newton das Beschleunigungsgesetz der Planeten behauptet; man nennt deshalb λ wohl auch die Wrensche Konstante.

Aufgaben: 21. Man berechne die Konstante λ aus der bekannten Umlaufszeit der Erde und aus der mittleren Entfernung der Erde und Sonne von ca. 148 Mill. km. Man kontrolliere das Newtonsche Gesetz aus den Daten des Mars, der eine Umlaufszeit von ca. 687 Tagen und ein etwa 1,52 mal so großes a wie der Erde hat. (Es genügt, für unsere rohen Abschätzungen die Planetenbahnen als Kreise anzusehen; die Exzentrizitäten ε sind alle ziemlich klein.)

22. Welche Dimension hat λ?

---

1) In dem Falle der Parabeln und Hyperbeln ($\varepsilon > 1$) geht allerdings die anschauliche Form des dritten Keplerschen Gesetzes verloren, man spricht es dann nach Nr. 33 am besten so aus, daß

$$\frac{C^2}{p} = \lambda$$

eine für alle Planeten und Kometen gleiche Konstante ist.

23. Man zeige, daß der Hodograph für die Planetenbewegung ein exzentrischer Kreis ist.

24. Unter der Annahme, daß der Mond um die Erde ebenfalls angenähert eine Keplersche Bewegung ausführt, berechne man das zugehörige λ', wenn man weiß, daß die Umlaufszeit des Mondes (die sogenannte siderische, d. h. diejenige gegen den Fixsternhimmel) 27 Tage 7^h $43'$, die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde ca. 60 Erdradien beträgt.

25. Nach den in Nr. 33 und 34 entwickelten Methoden bestimme man die Bewegung eines Punktes, der nach einem festen Zentrum hin eine Beschleunigung erfährt, die der dritten Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist. Man zeichne die Bahnkurve.

26. Wie würde sich die Bewegung eines Planeten ändern, wenn zu der Newtonschen Beschleunigung noch eine Beschleunigung $-\varrho\varepsilon\frac{1}{r^3}$ hinzukäme? Man zeige, daß bei kleinem ε die „gestörte" Bewegung so aufgefaßt werden kann, als ob sich die Ellipse von Umlauf zu Umlauf langsam herumdrehte, der Art, daß das Perihel jedesmal um einen mit ε klein werdenden Betrag vorrückt.

§ 8. Die schwingende Feder. Die Masse als Trägheitsfaktor.

35. Die freie, ungedämpfte Schwingung. Wir hängen an einem Stativ eine gute, elastische Spiralfeder vertikal auf und befestigen an diese einen schweren Körper X. Er sei so geführt, daß er sich, ohne sich zu drehen, auf und ab bewegen kann und

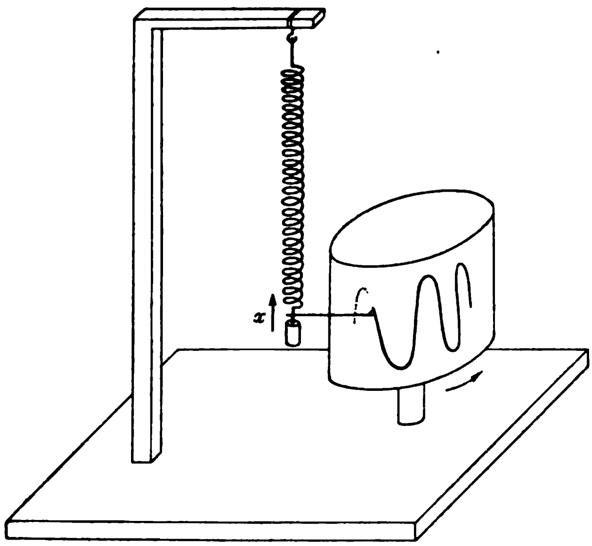


Fig. 15.

zwar möglichst leicht. Lassen wir den Körper ruhig hängen, so nimmt er eine gewisse Ruhelage X_0 ein; stoßen wir ihn an oder bringen wir ihn aus der Ruhelage, so wird er Schwingungen in vertikaler Richtung ausführen. Diese studieren wir, indem wir den Abstand x aus der Ruhelage durch einen an dem Körper angebrachten Schreibstift auf eine sich gleichförmig drehende, durch ein Uhrwerk angetriebene Trommel aufzeichnen lassen. Auf der Trommel erhalten wir dann eine Kurve, deren vertikale Ordinate x, deren horizontale Abszisse die Zeit t angibt, derart, daß die Strecke, um welche sich der Umfang der Trommel in einer Sekunde herumdreht, den Maßstab für eine Sekunde bedeutet.

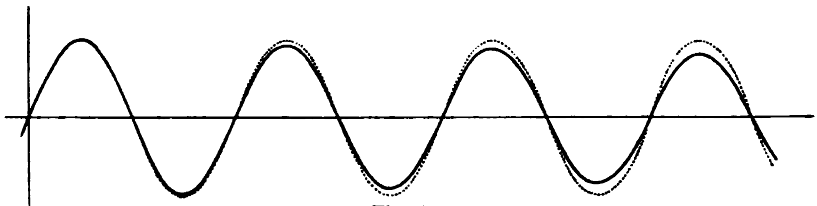


Fig. 16a.

Die rohe Beobachtung lehrt, daß X rhythmische Schwingungen macht, d. h. für jeden Hin- und Hergang dieselbe Zeit braucht, daß aber diese Schwingungen allmählich an Intensität abnehmen. Dies wird aber um so weniger stattfinden, je „leichter“ sich X bewegen kann. Wir idealisieren das Phänomen dahin, daß wir genau konstanten Rhythmus und genau konstant bleibenden Ausschlag voraussetzen, be-

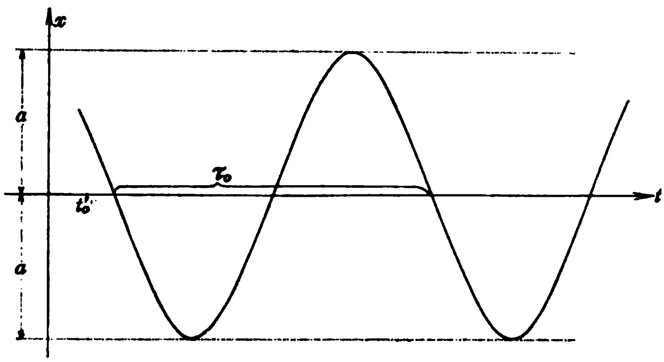


Fig. 16b.

hauptend, daß wir so das „Wesentliche“ der Erscheinung herausgegriffen haben.

Sehen wir uns nun die Kurve auf dem Papier der Trommel an, so sieht sie einer Sinuskurve sehr ähnlich (Fig. 16a). Eine mathematisch exakte Sinuslinie ist punktiert hinzugezogen.

Wir werden also jedenfalls eine die Erscheinung zunächst roh wiedergebende Darstellung erhalten, wenn wir ansetzen:

$$x = a \cdot \sin\,(\varkappa t + \varepsilon)\,. \tag{I}$$

Dabei bedeutet $a > 0$ den konstant bleibenden maximalen Ausschlag nach oben und unten, die sogenannte Amplitude, $\tau = \frac{2\pi}{\varkappa}$ die sogenannte Periode; denn nach Ablauf dieser Zeit wird die ganze Erscheinung wiederkehren, aber nicht früher; ε heißt die Phasendifferenz: $t_0 = -\frac{\varepsilon}{\varkappa}$ gibt offenbar einen der Zeitmomente an, wo X durch die Ruhelage X_0 durchgeht. Das Argument $\varkappa t + \varepsilon$ des Sinus heißt die Phase.

Wir nennen eine durch

$$x = a \sin(\varkappa t + \varepsilon)$$

dargestellte Bewegung eine „ungedämpfte" Schwingung, um damit anzudeuten, daß wir von der tatsächlichen Abnahme der Amplitude a absehen; wir nennen sie auch „rein", um sie von einer allgemeinen ungedämpften Schwingung zu unterscheiden, d. h. einer Bewegung, die durch

$$x = f(t)$$

gegeben ist, wo $f(t)$ die Periode τ_0 hat, d. h. für alle t

$$f(t + \tau_0) = f(t)$$

ist. Die Mathematik zeigt, daß jede solche allgemeine, ungedämpfte Schwingung als Überlagerung reiner Schwingungen dargestellt werden kann, d. h. daß

$$f(t) = a_0 + a_1 \sin(\varkappa t + \varepsilon_1) + a_2 \sin(2\varkappa t + \varepsilon_2) + \cdots$$

(siehe Nr. 361.)

Wir nennen endlich die Schwingung „frei", weil wir sie zwar durch einen Anstoß oder sonstigen Eingriff hervorrufen, dann aber den Apparat sich selbst überlassen.

Die weitere Betrachtung lehrt nun folgendes: Setzen wir den Apparat zu verschiedenen Zeiten mit verschiedener Intensität in Bewegung, so können wir a und ε nach Belieben — innerhalb gewisser Schranken — ändern, die Periode aber τ_0 oder $\varkappa$ bleibt ungeändert. Fassen wir also alle Schwingungen desselben Apparates zu einer Klasse zusammen, so ist $\varkappa$ eine typische Konstante, a und ε sind es nicht.

Wir werden also versuchen, einen Ausdruck zu finden, der $\varkappa$ enthält, a und ε aber nicht und der doch mit (I) identisch ist.

Zu dem Zweck differentiieren wir (I) zweimal nach der Zeit und erhalten

$$w \equiv \ddot{x} = -\varkappa^2 a \sin(\varkappa t + \varepsilon) = -\varkappa^2 x.$$

Damit haben wir schon den gesuchten Ausdruck gefunden:

$$w \equiv \frac{d^2 x}{dt^2} = -\varkappa^2 x, \tag{II}$$

denn umgekehrt folgt aus der homogenen linearen Gleichung (II) mit konstanten Koeffizienten bekanntlich als allgemeines Integral

$$x = a \sin(\varkappa t + \varepsilon)$$

mit a und ε als Integrationskonstanten.

Wiederum gestattet uns der Beschleunigungsbegriff einen typischen Ausdruck für das Gesetz einer Klasse von Bewegungserscheinungen zu finden.

36. Einführung des Massenbegriffs. Unser neues Gesetz ist aber noch nicht so umfassend wie das Galileische oder Newtonsche. Diese galten für alle beobachteten Körper; unser neues Gesetz gilt nur für einen bestimmten angehängten Körper.

Wir wollen nun so weiter experimentieren, daß wir sowohl verschiedene Federn $F, F', F'', \cdots$ als auch verschiedene Körper $K_1, K_2 \cdots$ benutzen. Wir werden dann auch verschiedene Konstante $\varkappa_1, \varkappa_1', \varkappa_1'' \cdots$ $\cdots \varkappa_2, \varkappa_2', \varkappa_2'' \cdots$ erhalten. Wir werden die Vermutung aussprechen, daß wenigstens in unserem idealisierten Falle die $\varkappa$ nur von den Eigenschaften der Federn und der angehängten Körper abhängen und wir werden das direkt als ein Charakteristikum dafür verlangen, daß wir wirklich das „Wesentliche" der Erscheinung „herausgeschnitten" haben.

Indem man nun die $\varkappa$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, die τ_0 untersucht, am besten mittels Stoppuhr ohne graphische Aufzeichnung, die immer störende „unwesentliche" Momente mitbringt, kann man leicht empirisch die folgenden Gesetze als leidlich erfüllt feststellen — bei unseren Versuchen überschritten die Fehler nicht den Betrag von etwa $2\,\%$.

1. Das Verhältnis der $\varkappa$ zweier Körper K hängt nicht von der Wahl der Feder ab:

$$\varkappa_1 : \varkappa_2 = \varkappa_1' : \varkappa_2' = \varkappa_1'' : \varkappa_2'' = \cdots$$

Da aber andererseits $\varkappa_1$ nur von der Feder und dem Körper K_1, $\varkappa_2$ nur von der Feder und dem Körper K_2 abhängt, so muß sein

$$\varkappa_1 : \varkappa_2 = \mathfrak{m}_1 : \mathfrak{m}_2,$$

wo $\mathfrak{m}_1$ resp. $\mathfrak{m}_2$ nur noch von den Eigenschaften der Körper K_1 resp. K_2 abhängen.

Also müssen wir setzen können $\varkappa = \sqrt{\lambda} \cdot \mathfrak{m}$ oder

$$\varkappa^2 = \frac{\lambda}{m},$$

wo λ nur noch von den Eigenschaften der Feder, $m = \frac{1}{\mathfrak{m}^2}$ nur noch von den Eigenschaften des angehängten Körpers abhängt. Wir nennen vorläufig m die Masse des Körpers.

Dabei ist die Maßeinheit noch frei, d. h. wir können für einen beliebig herausgegriffenen Körper $m = 1$ setzen. Dann aber können wir für jeden andern Körper das m eindeutig aus einem Schwingungsversuch bestimmen.

2. Warum wir m und nicht etwa $\mathfrak{m}$ oder eine andere Funktion von m die Masse genannt haben, erklärt sich aus folgendem Versuch.

An derselben Feder machen wir einen Schwingungsversuch mit dem Körper K_1 von der Masse m_1 und dem Körper K_2 von der Masse m_2. Endlich vereinigen wir K_1 und K_2, der vereinigte Körper habe die Masse m. Die Werte der $\varkappa$ seien $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa$. Dann ergibt der Versuch

$$\tau_1^2 + \tau_2^2 = \tau^2$$

oder wegen $\tau = \frac{2\pi}{\varkappa}$

$$\frac{1}{\varkappa_1^2} + \frac{1}{\varkappa_2^2} = \frac{1}{\varkappa^2}$$

oder gemäß $\varkappa^2 = \frac{\lambda}{m}$

$$m_1 + m_2 = m,$$

das Massenadditionsgesesetz:

Haben zwei Körper die Massen m_1 und m_2, so hat der vereinigte Körper die Masse $m_1 + m_2$.

37. Das Gesetz der Federschwingung als Massenbeschleunigungsgesetz. Setzen wir $\varkappa^2 = \frac{\lambda}{m}$ in das Gesetz (II) von Nr. 35 ein, so erhalten wir

$$mw = -\lambda x \cdots \tag{III}$$

Wir nennen nun mw oder wenn es nötig ist, die Richtung hervorzuheben, $m\bar{w}$ eine „Massenbeschleunigung“ und können somit das Gesetz der Federschwingung so aussprechen:

Schwingt ein Körper an einer Spiralfeder auf und ab, so besitzt er in jedem Augenblick eine Massenbeschleunigung, die auf die Ruhelage zu gerichtet und der Entfernung aus der Ruhelage proportional ist. Der Proportionalitätsfaktor hängt nur mehr von den Eigenschaften der Feder ab.

Damit haben wir ein Gesetz für eine größere Klasse von Bewegungserscheinungen gefunden, es gilt für alle bewegten Körper, aber wir bedurften dazu des Begriffs der Massenbeschleunigung.

Über die Genauigkeit des Gesetzes ist folgendes zu bemerken. Abgesehen von der prinzipiellen Idealisierung, von der später noch in Nr. 72 genauer die Rede sein wird, ist unser neues Gesetz weit weniger genau als das Galileische oder Newtonsche. Es enthält zunächst noch einen direkten Fehler: Hat die Feder selbst die Masse m' — wir können ihr selbst offenbar eine Masse beilegen, da wir sie ja an eine andere Feder anhängen und an dieser schwingen lassen können —, so muß das Gesetz eigentlich lauten:

$$(m + \alpha m')\, w = -\lambda x,$$

wo α einen echten Bruch bedeutet, etwa $^1/_3$ bis $^1/_4$, dessen genauen Wert nur eine vollständige Theorie der Federschwingung ergeben kann. Unser Gesetz gilt also nur dann genau genug, wenn m' klein gegen m ist. Der tiefere Grund dieses Fehlers ist natürlich der, daß die Punkte der Feder selbst mitschwingen, und daß wir also ein System haben, dessen Punkte sehr verschiedene Bewegungen aufweisen, wir mithin gar nicht von einer Beschleunigung sprechen dürften. Dann umfaßt unser Fall nur die sogenannte Grundschwingung: es dürfen nicht noch Schwingungswellen kürzerer Periode über die Feder hinlaufen, was durch einen geeigneten Anstoß zu verhüten ist. Endlich ist der Ausdruck der rechten Seite $-\lambda x$ nur gültig für hinreichend kleine Ausschläge x.

In Wahrheit ist eben die Bewegung des Punktes x keine ganz reine Schwingung.

Aus alledem geht hervor, daß die vorhergehenden Betrachtungen keine Definition der Masse bedeuten können: sie zeigen nur die Rolle der Masse als Trägheitsfaktor: ist das Massenbeschleunigungsgesetz $-\lambda x$ allein durch die Feder (λ) und die Lage x des Körpers gegeben, so erfahren verschiedene Körper eine um so geringere Beschleunigung, je größer ihre Masse ist.

Um einen kurzen Namen zu haben, nennen wir $-\lambda x$ die „Federkraft“ oder „die Kraft, welche die um x gedehnte Feder auf einen angehängten Körper K ausübt“.

Ein solcher Name ist wünschenswert. Denn es ist zu beachten, daß $-\lambda x$ keine Massenbeschleunigung ist. Eine Massenbeschleunigung ist immer nur das Produkt aus der Masse und dem zweiten Differentialquotienten des Ortsvektors einer einzelnen individuellen Bewegung nach der Zeit.

$-\lambda x$ ist aber der typische, gesetzmäßige Ausdruck für die Massenbeschleunigung einer ganzen Klasse von idealisierten Bewegungserscheinungen, es ist ein Massenbeschleunigungs-Gesetz, und ein solches nennen wir einstweilen auch kurz eine Kraft.

Das Kraftgesetz $-\lambda x$ für die elastische Feder stammt, allerdings wohl nur für den später zu besprechenden Fall der Statik, von Hooke, einem älteren Zeitgenossen Newtons.

38. Die Gesetze der Fallbewegung und der Planetenbewegung als Kraftgesetze. Wir können wohl, wenigstens in der Idee, allen fallenden Körpern Masse zuerteilen und mithin das Fallgesetz Galileis auch so schreiben:

$$m\bar{w} = m\bar{g}\,.$$

$m\bar{g} = \bar{G}$ nennen wir nun kurz die Schwerkraft des betreffenden Körpers.

Bedenken wir weiter, daß jeder uns zur Verfügung stehende Teil der Erde Masse hat und daß das Massenadditionsgesetz gilt, so werden wir wohl kaum umhin können, auch der ganzen Erde eine Masse zuzuschreiben. Hat aber einmal der Planet Erde eine Masse, so liegt es nahe, auch den anderen Planeten eine solche Masse zukommen zu lassen. Dann aber können wir auch das Newtonsche Planetengesetz in Form eines Massenbeschleunigungsgesetzes hinschreiben:

$$m\bar{w} = -\bar{\varrho}\,\frac{\lambda m}{r^2}\,.$$

Wir nennen dann $-\bar{\varrho}\,\frac{\lambda m}{r^2}$ die „(Newtonsche) Anziehungskraft der Sonne auf den Planeten", womit nur gesagt sein soll, daß die Planeten, wenn sie sich in der Entfernung r von der Sonne befinden, eine auf diese zu gerichtete Massenbeschleunigung erfahren, die jener Kraft gleich ist.

Gewonnen ist einstweilen durch diese Formulierung nichts als ein Name, aber Namen sind oft wertvoll, da sich an sie Ideen knüpfen.

Und schaden tut die immerhin etwas zweifelhafte Zuerteilung einer Masse zu einem Planeten nichts, da sie in der Gleichung des Gesetzes herausfällt.

Aufgabe: 27. Ein Punkt kann sich in der Ebene frei bewegen und wird von einem festen Zentrum O nach dem Gesetz $m\bar{w} = -\bar{\varrho}\lambda(r - r_0)$ angezogen, d. h. man kann sich vorstellen, daß der Punkt durch eine masselose Feder mit O verbunden sei. r_0 sei eine Konstante, $r = r_0$ gibt den dehnungslosen Zustand der Feder an. 1. Man beweise, daß für diese Bewegung der Flächensatz gilt (das zweite Keplersche Gesetz). 2. Man untersuche, nach den Methoden von Nr. 33 und 34, ob eine Bewegung in Kreisen um O möglich ist. 3. Für den Sonderfall $r_0 = 0$ zeige man, daß die Bahnkurven Ellipsen mit O als Mittelpunkt oder Geraden durch O sind. Es empfiehlt sich aber jetzt, rechtwinklige Koordinaten x, y einzufügen, in denen das Beschleunigungsgesetz offenbar lautet:

$$m\ddot{x} = -\lambda x$$
$$m\ddot{y} = -\lambda y\,,$$

da $\bar{\varrho}r = \bar{r}$ die Komponenten x, y hat.

§ 9. Kraft und Ursache.

Nr. 39. Über den Druck. Von der Anschauung haben wir bis jetzt nur soweit Gebrauch gemacht, als sie den Bereich des Gesichtssinnes anbetrifft, d. h. wir haben Geometrie verwendet. Jetzt wird es Zeit, uns mit derjenigen Anschauung näher zu befassen, die spezifisch mechanischen Charakter hat und der Sphäre des Tastsinnes (Drucksinnes) und des Muskelsinnes angehört. Gemeint ist der Druck, von dem ein jeder eine Anschauung besitzt. In jedem Momente üben wir Drucke auf unsere Umgebung aus und empfangen solche: ob wir gehen, stehen, sitzen oder liegen, stets übermittelt uns der Tastsinn Drucke, die an der Oberfläche unseres Körpers angreifen. Von ähnlicher allgemeiner, aber weniger bestimmter Art sind die Spannungsgefühle, die wir in unseren Muskeln bei ihrer Tätigkeit wahrnehmen. (Vgl. auch Einleitung Nr. 4.)

Außer dieser subjektiven Anschauung aber haben wir von den Drucken objektive Kriterien, an denen wir ihr Vorhandensein erkennen können. Drücken wir gegen eine Wand, so zeigt sich eine deutliche Gestaltsänderung unserer Handfläche, aber auch die Muskelspannungen sind für ein fremdes Auge durch die Gestaltsänderung, Kontraktion des Muskels erkennbar.

Legen wir nun ein schweres Gewicht einmal auf unsere Hand und merken dabei eine Deformation derselben verbunden mit einem Druckgefühl, und legen wir dann dasselbe Gewicht auf eine Gummiplatte und merken eine deutliche Gestaltsänderung derselben, so werden wir vermuten, daß auch hier zwischen Gewicht und Gummiplatte ein Etwas existiert, das den Namen Druck verdient. Und wie im ersten Fall die Kontraktion des Muskels nach außen eine Spannung derselben anzeigte, so werden wir vermuten, daß die Deformation des ganzen tragenden Gummistückes auch etwas wie eine Spannung im Inneren desselben anzeigt.

Nun kommt es aber prinzipiell auf die Größe oder Kleinheit des Gewichts nicht an, auch doch sicherlich im Prinzipe nicht auf die Weichheit oder Härte des Materials: im ersten Falle werden wir nur die Deformation merken, im zweiten entzieht sie sich wegen ihrer Kleinheit unserer Wahrnehmung: Durch einen kaum abzuweisenden Analogieschluß kommen wir zu folgender Anschauung:

An einem jeden Flächenelement dF, durch das wir uns zwei benachbarte materielle Volumelemente getrennt denken, können „Spannungen“ auftreten. Anzeichen für solche Spannungen sind Gestaltsänderungen der angrenzenden Volumelemente.

Was sind nun aber diese Spannungen? Ein Gefühl für dieselben werden wir natürlich unserer materiellen Umgebung nicht zuschreiben wollen, das wäre unnötiger Anthropomorphismus. Wesentlich ist zunächst nur, daß für unser Gefühl diese Spannungen deutlich Größe und Richtung zeigen: daß sie also Vektoren sind, werden wir auf die Spannungen der unbelebten Natur übertragen. Selbstverständlich Vektoren, die mit dem Flächenelement, an dem sie angreifen, unendlich klein werden. Denn Drucke sind stets auf Flächen verteilt, so daß auf jedes Flächenelement dF ein unendlich kleiner Teil des Druckes kommt.

An beiden Seiten eines Flächenelements dF, unterschieden durch ihre Normale ν, können also unendlich kleine Vektoren $d\bar{k}_\nu$ angreifen, Spannungen genannt, die mit dF unendlich klein werden:

$$d\bar{k}_\nu = \bar{\sigma}_\nu dF.$$

Der endliche Vektor $\bar{\sigma}_\nu$ heißt eine spezifische Spannung (Druck).

Wir wollen auch sagen, daß $d\bar{k}_\nu$ an demjenigen durch dF begrenzten Volumelemente „angreife", für welches ν die äußere Normale ist.

Die Komponente von $d\bar{k}_\nu$ senkrecht zu dF werden wir im engeren Sinne einen Druck nennen, wenn die Komponente auf das Volumelement zu gerichtet ist, an dem sie angreift, sonst einen Zug. Die tangentialen Komponenten von $d\bar{k}_\nu$ pflegt man als Schub- oder Scherkräfte zu bezeichnen.

Ein stets notwendiges, aber keineswegs immer hinreichendes Kriterium für eine Spannung ist der Deformationszustand der nächsten Umgebung von dF gegen einen normalen, spannungslosen Zustand.

Eine weitere fundamentale Erfahrung besteht über den Druck (im allgemeinen Sinn = Spannung): Drücken wir etwa unsere Hände zusammen, so empfinden wir die beiden Drucke, welche die Hände aufeinander ausüben, als durchaus gleich und entgegengesetzt gerichtet.

Der entsprechende allgemeine Satz,

daß die beiden Drucke, welche an einem Flächenelement angreifen, stets entgegengesetzt gleich sind, —

in Zeichen:

$$\bar{\sigma}_\nu = -\bar{\sigma}_{-\nu},$$

wenn wir mit ν die eine, mit $-\nu$ die andere Normale des Flächenelements dF bezeichnen —, ist ein Fundamentalsatz der Mechanik. Er wurde zuerst von Newton ausgesprochen (sein drittes Grundgesetz, auch lex tertia genannt: actio par reaktioni, ist allerdings etwas allgemeiner als unser Gesetz); es hat sich bis heute durchaus kein Widerspruch gegen dieses Gesetz erhoben, wir werden sogar später sehen, daß wir es auf Grund anderer Annahmen beweisen können (siehe Nr. 204).

Dieses Gesetz ist uns unbewußt so selbstverständlich geworden, daß der Ausdruck: wir üben einen Druck aus, schon darauf beruht: denn wir empfinden in Wahrheit nur den Druck, den wir selber von außen empfangen, aber wir projizieren ihn ohne weiteres nach außen, seinen Sinn umdrehend, als einen Druck, den wir nach außen auf den angrenzenden Körper ausüben.

40. Der Druck als bewegungsbestimmendes Moment. Wir sind imstande, selbst dem eigenen oder fremden Körpern Bewegung zu erteilen, resp. eine vorhandene Bewegung zu verändern. Geschieht dies am eigenen Körper, so haben wir dabei eine deutliche Muskelempfindung und zwar in jenen Muskeln, die das bewegte Glied mit dem übrigen Körper verbinden; bewegen wir aber andere Körper, etwa mit der Hand, so ist diese Erscheinung mit einem deutlichen Druckgefühl an der Handoberfläche verknüpft.

Dabei lehrt nun die Erfahrung zweifellos, daß im allgemeinen, soweit nämlich solche subjektiven Wahrnehmungen überhaupt zuverlässig sind, das Druckgefühl um so stärker ist, je schwerer der bewegte Körper ist und je größer der Geschwindigkeitsunterschied, den er im ganzen in einer gegebenen Zeit erfahren hat. Auch der Richtung nach stimmt, soweit erkennbar, der gefühlte Druck mit dem Geschwindigkeitszuwachs überein, wobei freilich schon der nach außen projizierte Druck gemeint ist.

Man überzeugt sich nun leicht durch einige Versuche im Sinne von Nr. 36, daß Körper mit größerer Masse diejenigen sind, die man für gewöhnlich schwerer nennt. Zum Teil folgt dies schon aus dem in Nr. 36 ausgesprochenen Massenadditionsgesetz.

Somit werden wir mit der Anschauung in Übereinstimmung bleiben, wenn wir festsetzen: Bewegen wir einen Körper und üben wir dabei in einem Augenblick t an seiner Oberfläche den Gesamtdruck $\bar{k}$ aus, so ist für diesen Augenblick die von uns dem Körper erteilte Massenbeschleunigung

$$m\bar{w} = \bar{k}.$$

Damit haben wir zwar keineswegs den Begriff des Druckes definiert, ihn aber doch so präzisiert, daß er einer genaueren Messung zugänglich wird.

Genau dasselbe wollen wir festsetzen, wenn irgend ein Druck erfahrungsgemäß allein und ständig eine (idealisierte) Klasse von Bewegungserscheinungen begleitet.

41. Die Kraft als typischer Ausdruck für das Gesetz einer Klasse von Bewegungserscheinungen. Wir sahen im vorigen Paragraphen, wie die Schwerkraft $\bar{G} = m\bar{g}$, die Anziehungskraft der Sonne $-\bar{\varrho}\lambda\frac{m}{r^2}$ und die Kraft der gespannten Feder $-\lambda x$ je einen Typus von Bewegungserscheinungen, wenn auch einen idealisierten, vollständig repräsentieren: die Schwerkraft die ganze Klasse der Fallbewegungen an der Erde, die Anziehungskraft der Sonne alle Planetenbewegungen, die Federkraft die Schwingungen aller angehängten Körper. Nennen wir eine solche Kraft $\bar{k}$, so haben wir für alle drei Naturgesetze den kurzen gemeinsamen Ausdruck

$$m\bar{w} = \bar{k},$$

also denselben, den wir oben für die Klasse derjenigen Bewegungserscheinungen präzisierten, die zu einem bestimmten Druckverlauf $\bar{k}$ zugehören.

Allgemein können wir sagen:

Wenn es uns gelungen ist, bei einer Klasse von Bewegungserscheinungen einen typischen Ausdruck für die Massenbeschleunigung zu finden, so wollen wir diesen Ausdruck eine Kraft nennen, oder genauer ein Kraftgesetz.

Von Kraft wollen wir aber auch dann sprechen, wenn der Prozeß noch nicht vollendet ist, d. h. wenn wir zwar (idealisierte) Massenbeschleunigungen haben, die zweifellos einer Klasse angehören, für die wir aber noch keinen typischen Ausdruck gefunden haben, wir vielleicht erst in jedem einzelnen Falle versuchen müssen, empirische Werte der Kraft, d. h. der Massenbeschleunigung zu bestimmen.

Zweifellos ist diese Definition der Kraft in hohem Maße konventionell, wenn auch durch die Erfahrung eingegeben, und wir müssen darauf gefaßt sein, daß trotz der bisherigen Brauchbarkeit des alten (Newtonschen) Kraftbegriffes unsere Definition einmal zu eng werden kann.

Es sei aber nochmals, wie schon in Nr. 37 darauf hingewiesen, daß Kraft nicht einfach ein neues Wort für Massenbeschleunigung ist (wie Kirchhoff glaubte). Kraft ist etwas ganz Neues, das durch vereinte Wirkung von Anschauung, Erfahrung und schöpferischer Tätigkeit des Menschen aus dem Massenbeschleunigungsbegriff hervorgegangen ist, aber nimmermehr mit ihm identifiziert werden darf. Um die Hauptunterschiede nochmals zu betonen: Massenbeschleunigung ist stets das Produkt aus der Masse und der wirklichen Beschleunigung eines einzelnen bestimmten Körpers zu einer bestimmten Zeit; Kraft ist ein Ausdruck für die Massenbeschleunigung einer Klasse von „Ausschnitten" wirklicher Bewegungsvorgänge. Der Mensch muß „zerschneiden" und anders wieder zusammenfügen, um aus dem Beobachtungsmaterial die Kraft zu gewinnen.

42. Es gibt zwei Arten von Kräften. Die eine Art bilden die Spannungen oder allgemeinen Druckkräfte zwischen je zwei Volumelementen, die sich längs eines Flächenelementes dF berühren. Von dieser Art wird auch eigentlich die Kraft sein, die die gespannte Feder auf den angehängten Körper ausübt; denn sie kann die Kraft erfahrungsgemäß nur ausüben, wenn der Körper irgendwie, etwa durch eine Schnur, an die Feder befestigt ist: an den Berührungsstellen der Schnur mit der Feder werden wir die Angriffsstellen jener Spannungen suchen.

Ganz anders Schwerkraft und Anziehungskraft der Sonne. Diese wirken auf die Ferne ohne materielle Vermittlung, d. h. zwischen dem bewegten Körper und den Objekten, die für die Bestimmung der Bewegung von Bedeutung sind (Erde, Sonne), besteht keine bekannte materielle Verbindung. Auch ist ja klar, daß ein jeder Teil eines Körpers schwer ist — wir brauchen den Körper ja nur zu zerteilen und jedes Stück einzeln fallen lassen — und daß die gesamte Schwerkraft nach dem Massenadditionsgesetz die Summe der Schwerkräfte der einzelnen Volumelemente ist.

Natürlich wird die Masse eines Volumteils dV mit diesem unendlich klein, setzen wir die zugehörige Masse

$$dm = \mu dV$$

und nennen wir μ die spezifische Masse, so ist die Schwerkraft von dV

$$d\bar{G} = \mu \bar{g} dV.$$

$\mu \bar{g} = \bar{\gamma}$ heißt die spezifische Schwere an der Stelle, gegen die dV konvergiert. Die ganze Masse ist nach dem Massenadditionsgesetz

$$m = S\mu dV,$$

die ganze Schwerkraft

$$\bar{G} = \bar{g} \cdot m = S\mu\bar{g}dV \cdot = Sd\bar{G}.$$

(Mit S bezeichnen wir stets die Summation über Volumteile oder Flächen.)

Wir werden uns also am besten die Schwerkraft als eine an den Volumelementen angreifende oder wie wir sagen, räumlich verteilte Kraft vorstellen, im Gegensatz zu den Drucken, die auf Flächen verteilt sind.

Das Analoge gilt für die Anziehungskraft der Sonne; wir werden später (Nr. 95 und 98) beide, Schwerkraft und Anziehungskraft, als Spezialfälle einer Kraft, der allgemeinen Gravitation kennen lernen.

Der soeben besprochene Unterschied teilt alle Kräfte in zwei Gruppen:

1. räumlich verteilte Kräfte (auch Volumskräfte genannt): $d\bar{k} = \bar{\varkappa} dV$, wo $\bar{\varkappa}$ eine spezifische räumlich verteilte Kraft heißt. Diese Kräfte sind zugleich stets Fernkräfte, d. h. die Bestimmungsstücke, welche das Vorhandensein einer solchen Kraft erkennen lassen, liegen außer in dem betrachteten Punkte, gegen den dV konvergiert, stets auch noch in endlicher Entfernung von demselben. Hierher gehören die Schwerkraft, die sogenannten molekularen Kräfte, welche die Erscheinungen der Adhäsion und Kohäsion bedingen, ferner die elektrischen und magnetischen Kräfte.

2. flächenhaft verteilte Kräfte: $d\bar{k}_\nu = \bar{\sigma}_\nu \cdot dF$; das sind ausschließlich die Drucke, Spannungen, welche zwei an dF benachbarte Volumelemente aufeinander ausüben. Die Merkmale dieser Kräfte

sind stets in unmittelbarer Umgebung von dF zu suchen; zu den Merkmalen gehört immer der Deformationszustand an der betreffenden Stelle.

Wir werden später (Nr. 204) sehen, daß man flächenhaft verteilte Kräfte immer auf Volumkräfte zurückführen kann, wenn man will; das Umgekehrte geht nicht immer.

Es ist deshalb kein Fehler, wenn wir Kräfte als Volumkräfte auffassen, die sonst neuerdings meist als Spannungen gedacht werden. So stellt man sich im Gegensatz zu unserer Einreihung elektromagnetische Kräfte in der modernen Physik meist als Spannungen vor, allerdings als Spannungen in einem hypothetischen Medium, dem Äther. Man spricht im Zusammenhang damit auch von einer Nahewirkungstheorie, indem die elektromagnetische Kraft bedingt sei durch den Zustand des elektromagnetischen Feldes an der betreffenden Stelle. Aber dieses elektromagnetische Feld ist seinerseits rein hypothetisch und wieder durch beobachtbare elektromagnetische Vorgänge an der Materie der ganzen weiteren Umgebung gegeben. Also ist die elektromagnetische Kraft in unserem Sinne doch eine Fernkraft. Anders unsere mechanischen Spannungen: sie sind durch die Deformation und andere vorübergehende oder dauernde materielle Eigenschaften an der betreffenden Stelle gegeben, also durch lauter beobachtbare Umstände an der Stelle selbst.

Für den Fortgeschrittenen ist es vom mechanischen Gesichtspunkt aus ganz gleichgültig, wie er eine Kraft auffaßt; für uns aber, die wir Mechanik erst lernen wollen, ist die scharfe Scheidung der mechanischen Spannungen von den anderen Kräften anschaulich und begrifflich durchaus notwendig

43. Die Ursache einer Kraft und einer Bewegung. Wir haben bis jetzt schon mehrmals von den Merkmalen, Bedingungen oder Bestimmungsstücken einer Kraft gesprochen. Damit meinen wir diejenigen Voraussetzungen, auf Grund deren wir eine bestimmte Kraft als vorhanden annehmen können. Jedes physikalische Gesetz hat sein „Wenn“, also auch die Kraft, die ja nichts anderes als ein Massenbeschleunigungsgesetz ist. Ein Gesetz kennen, heißt seine Voraussetzungen kennen, denn sonst sind wir vor allen Dingen nie imstande vorauszusagen und die Wissenschaft anzuwenden.

Für die Schwerkraft lauteten die Bedingungen: Ein Körper von der Masse m wird in der Nähe der Erdoberfläche freigelassen. Bedingungen der Schwerkraft sind also: die Masse des Körpers, die Nähe der Erde, die Freiheit alle Bewegungen auszuführen.

Entsprechend sind die Bedingungen für das Anziehungsgesetz der Sonne: die Masse des Planeten, die Sonne, die Entfernung r von der Sonne, die Freiheit die Bewegung auszuführen. Denn wir werden natürlich jeden Körper einen Planeten nennen, der sich in vergleichbarer Nähe mit den bekannten sogenannten Planeten frei um die Sonne bewegen kann. Daß der Körper so groß sei, daß er für uns sichtbar ist, werden wir wohl nicht verlangen.

Für die Federkraft werden die Bedingungen lauten: die Feder selbst und die augenblickliche Dehnung x derselben, die Freiheit des angehängten Körpers, die Schwingungsbewegung wirklich auszuführen.

Für Druckkräfte: sicherlich die Deformationen in der Nähe der Stelle, wo sie wirken, eventuell aber noch andere Erscheinungen und Eigenschaften der Materie an der betreffenden Stelle.

Wir wollen nun den Inbegriff aller Merkmale, d. h. Erscheinungen und Daten physikalischer, chemischer oder geometrischer Natur an materiellen Objekten, auf Grund deren wir imstande sind, das Vorhandensein einer Kraft zu behaupten, die **Ursache** der Kraft oder auch die Ursache der betreffenden Bewegungsklasse nennen. Die Freiheit, die betreffende Bewegung auszuführen, soll jedoch nicht zu den Ursachen gerechnet werden, wenn die Kraft bereits durch die anderen Daten nach Größe und Richtung bestimmt ist.

Damit werden wir dem Kausalitätsbedürfnis gerecht, das wir unabweisbar in uns besitzen. Wir bringen so die studierte Klasse von Bewegungen in gesetzmäßigen Zusammenhang mit anderen Naturvorgängen oder sonst welchen Erscheinungen der erkennbaren Außenwelt.

Durch den Schlußsatz unserer Definition, nach dem wir die Freiheit nicht mit zu den Ursachen rechnen, haben wir einen wichtigen Schritt getan: wir haben damit der Kraft eine Existenz gegeben, auch für den Fall, daß die betreffende Bewegung gar nicht eintreten kann. Wenn wir also z. B. einen Körper auf einen festen Tisch legen, so daß er gar nicht fallen kann, wollen wir doch sagen, daß er unter der Wirkung der Schwerkraft stehe. Was das freilich heißen soll, können wir erst in der nächsten Nummer sagen. Es genügt jetzt zu bemerken, daß wir vom Dasein einer Kraft sprechen können, wenn nur ihre Ursachen vorhanden sind.

Die Kraft selbst aber definieren wir nicht als Ursache der Bewegung; denn die Kraft ist ein Gedankending und keine Naturerscheinung.

44. Das sogenannte Parallelogramm der Kräfte. Es entsteht jetzt von selbst die Frage: was geschieht, wenn gleichzeitig die Ursachen mehrerer Kräfte auftreten? Fassen wir die Bewegungen, die durch einen bestimmten Ursachenkomplex veranlaßt sind, wieder zu einer Klasse zusammen, so daß sie einer neuen Kraft zugehören, so lautet die obige Frage auch:

Gegeben seien gleichzeitig mehrere auf einen Punkt wirkende Kräfte, welcher Kraft werden diese gleichwertig sein?

Die Antwort auf diese Frage gibt der sogenannte Satz vom Parallelogramm der Kräfte:

Wirken auf einen Punkt gleichzeitig die Kräfte $d\bar{k}_1$ *und* $d\bar{k}_2$, *so ist das dasselbe, als ob auf den Punkt die eine Kraft* $d\bar{k}_1 + d\bar{k}_2$ *wirkte,*

d. h. diejenige Kraft, die nach Richtung und Größe die von dem Anfangspunkte ausgehende Diagonale des aus $d\bar{k}_1$ und $d\bar{k}_2$ gebildeten Parallelogramms darstellt.

Natürlich muß der Satz für Drucke und räumlich verteilte Kräfte zunächst noch gesondert ausgesprochen werden: es addieren sich die an einem Flächenelement angreifenden spezifischen Drucke $\bar{\sigma}$ und die an einem Volumelement angreifenden spezifischen Raumkräfte $\bar{\varkappa}$ gesondert.

Sind mehrere Kräfte $d\bar{k}_1 \ldots d\bar{k}_n$ da, so sind sie einer Kraft äquivalent, die gleich ihrer geometrischen Summe ist:

$$d\bar{k} = d\bar{k}_1 + \cdots + d\bar{k}_n.$$

Geometrisch heißt das: man erhält das resultierende $\bar{\varkappa}$ (resp. $\bar{\sigma}$), indem man das **Kräftepolygon** zeichnet, d. h. von einem Punkte O aus die $\varkappa$ (resp. $\bar{\sigma}$) ungeändert nach Größe und Richtung aneinander reiht. Die Strecke vom Anfangspunkte O bis zum Endpunkte K_n ist dann nach Richtung und Größe die Resultierende (Fig. 17).

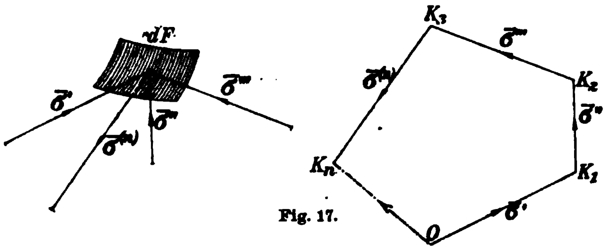


Fig. 17.

Ist die Summe der $d\bar{k}$ Null, so daß Ruhe oder gleichförmige Bewegung eintritt, so sagen wir auch: die Kräfte **heben sich auf**.

Der Satz vom Parallelogramm der Kräfte ist nicht zu verwechseln mit einem andern Satze, den wir in Nr. 51 genauer besprechen werden:

Haben alle Punkte eines Körpers in jedem Augenblick dieselbe Geschwindigkeit, also auch dieselbe Beschleunigung, so ist diese, mit der Masse des Körpers multipliziert, gleich der Summe aller auf den Körper wirkenden Kräfte: $m\bar{w} = \bar{k} = S\,d\bar{k}$.

Dieser neue Satz ist weiter als der alte, indem er für einen endlich ausgedehnten Körper etwas über die Summe **aller** Kräfte sagt; er ist enger insofern, als er keineswegs die **volle** Gleichwertigkeit aller Kräfte $d\bar{k}$ mit **einer** $\bar{k}$ behauptet.

Dieser zweite Satz löst das Paradoxon der vorigen Nummer: Wird ein Körper durch feste Stützen in seiner Bewegungsfreiheit gehindert, so müssen wir die Modifikation eventuell volle Aufhebung der Bewegung in Druckkräften suchen, welche diese Stützen auf den Körper ausüben. Diese Kräfte müssen dann, wenn z. B. gar keine

Bewegung eintritt, so beschaffen sein, daß die Summe aller Kräfte Null ist. Tatsächlich beobachten wir auch bei nicht zu harten Stützen, die einen schweren Körper tragen, das Auftreten von Deformationen, welche ja für die Existenz von Druckkräften charakteristisch sind.

Auf der Schule beweist man den Satz vom Kräfteparallelogramm häufig experimentell. Aber erstens: man gebraucht dabei so vielerlei Vorrichtungen: Gewichte, Schnüre, Rollen usw., wobei der Satz selbst und noch vieles mehr aus der Mechanik bereits vorausgesetzt ist, und zweitens: man beweist gar nicht den Parallelogrammsatz, sondern den vorhin genannten zweiten Satz.

Worauf stützt sich in Wahrheit die Gewißheit unseres Satzes?

1. Darauf, daß es noch immer gelungen ist, Kraftgesetze zu finden, die nach dem Parallelogrammsatz vereinigt, in Verbindung mit den anderen Grundsätzen der Mechanik, die Bewegungserscheinungen befriedigend erklären. — Sollte sich aber je ein Widerspruch zeigen, so würden wir den Satz doch so schnell noch nicht aufgeben, sondern weit eher andere Sätze, denn

2. unser Satz empfiehlt sich durch seine außerordendliche Einfachheit, Klarheit, ich möchte fast sagen Selbstverständlichkeit.

3. Man kann ihn auf Grund gewisser, noch einfacherer und wohl allgemein zugestandener Axiome beweisen.

Das soll in der nächsten Nummer geschehen, die der Anfänger überschlagen kann.

Auch historisch tritt der Parallelogrammsatz zuerst durchaus nicht als Erfahrungssatz auf. Zum erstenmal wird er im 13. Jahrhundert von einem unbekannten Autor mit dem später zu besprechenden Prinzip der virtuellen Arbeiten bewiesen[1]), dann von Simon Stevin (1586) mit dem Hebelgesetz; Beweise nach Art des folgenden gaben zuerst Daniel Bernouilli (1726), D'Alembert (1766). Ein neuer sehr schöner Beweis stammt von Darboux, ein anderer von Siacci.

45. Beweis des Parallelogrammsatzes auf Grund gewisser einfacher Axiome. Es sei die noch unbekannte Zusammensetzung mehrerer Kräfte $\bar{k}_1 \ldots \bar{k}_n$ durch

$$(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \ldots, \bar{k}_n)$$

bezeichnet.

Dann wollen wir verlangen:

1. Es sei $(\bar{k}_1, \bar{k}_2)$ ein eindeutig bestimmter mit $\bar{k}_1$ und $\bar{k}_2$ stetig variierender und nach den Koordinaten derselben stetig differentiierbarer Vektor. (Eindeutigkeit ist nach der vorigen Nummer selbstverständlich; Stetigkeit und Differentiierbarkeit verlangen wir von allen in der Physik vorkommenden Funktionen).

1) Zitiert nach Duhem: Les Origines de la Statique.

2. Wenn $(\bar{k}_1, \bar{k}_2) = \bar{k}$ ist, so ist

$$(x\bar{k}_1, x\bar{k}_2) = x\bar{k} \quad (\text{für } x > 0).$$

(Natürlich, denn es kann das Resultat doch unmöglich von dem Maßstab abhängen, in dem wir $\bar{k}$ messen.)[1])

3. $(\bar{k}, 0) = \bar{k}$ und $(0, \bar{k}) = \bar{k}$. (Das ist nichts anderes als die Aussage, daß ein Ursachenkomplex eindeutig eine Kraft bestimmt.)

Beweis: Seien die rechtwinkligen Komponenten von $\bar{k}$ mit X, Y, Z bezeichnet, so ist nach 1.

$$X = f(X_1, Y_1, Z_1;\; X_2, Y_2, Z_2) \text{ usw.}$$

eine eindeutige, stetig differentiierbare Funktion der eingeschlossenen Variabeln.

Nach 2. aber ist

$$xX = f(xX_1, xY_1, xZ_1;\; xX_2, xY_2, xZ_2).$$

Aus dem Mittelwertsatze der Differentialrechnung folgt aber

$$\begin{aligned} xX = xX_1 f_{x_1}(\vartheta x X_1, \vartheta x Y_1, \vartheta x Z_1;\; \vartheta x X_2, \vartheta x Y_2, \vartheta x Z_2) \\ + xY_1 f_{y_1} + xZ_1 f_{z_1} + xX_2 f_{x_2} + xY_2 f_{y_2} + xZ_2 f_{z_2}, \end{aligned}$$

wenn f_{x_1} die Ableitung nach dem ersten Argument usw. bedeutet, ϑ eine Zahl zwischen 0 und 1.

Also ist auch

$$X = X_1 f_{x_1}(\vartheta x X_1, \vartheta x Y_1, \cdots) + \cdots$$

Gehen wir damit zur Grenze $x = 0$ über, so bekommen wir

$$\begin{aligned} X &= X_1 f_{x_1}(0, 0, 0;\; 0, 0, 0) + \cdots \\ &= X_1 a_1 + Y_1 b_1 + Z_1 c_1 + X_2 a_2 + Y_2 b_2 + Z_2 c_2, \end{aligned}$$

wo $a_1 \ldots c_2$ Konstante sind.

Nun soll aber nach 3. für $X_2 = Y_2 = Z_2 = 0$ $X = X_1$ sein, somit muß $a_1 = 1$, $b_1 = c_1 = 0$ sein. Ebenso folgt

$$a_2 = 1,\; b_2 = 0,\; c_2 = 0$$

und

$$X = X_1 + X_2.$$

Genau so folgt

$$Y = Y_1 + Y_2 \quad \text{und} \quad Z = Z_1 + Z_2,$$

d. h.

$$\bar{k} = \bar{k}_1 + \bar{k}_2,$$

w. z. b. w.

Der schöne, aber etwas schwierigere Beweis von Darboux benutzt im wesentlichen nur die in der Einleitung (Nr. 3) genannten allgemeinen Prinzipien, doch nicht die Differentierbarkeit und nicht unsere Annahme 2. Siehe auch des Verfassers Note: „Über die Zusammensetzung von Vektoren.“ Ztschr. f. Math. u. Phys. 1903, Bd. 149.

---

1) Diese Voraussetzung benutzt auch Siacci.

46. Über die Zerlegung der Kräfte. Ein Dynamometer. In der Natur werden tatsächlich stets mehrere Kräfte gleichzeitig auf einen Punkt wirken. Bei allen irdischen Objekten entgehen wir ja nicht der Schwerkraft; die Anziehungskraft der Sonne wird auf alle im Bereiche des Planetensystems vorhandenen Körper wirken, und endlich sind alle irdischen Objekte von anderen umgeben, zum mindesten von der Luft, und werden also von diesen Drucke erfahren. Somit muß dem Studium einer Kraft immer eine Zerlegung des ganzen Kraftkomplexes vorhergehen, und selbstverständlich werden wir dieser Zerlegung das Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte zugrunde legen.

Diese Zerlegung des ganzen Kraftkomplexes ist nun nichts anderes, als das, was wir früher „zerschneiden" oder „das Wesentliche aus einer Bewegungserscheinung herausgreifen" nannten.

Außer der einen Kraft, die wir studieren wollten, waren stets noch andere Kräfte da, die wir „wegschneiden" mußten: beim Fallgesetz der Druck der Luft, den wir auch Luftwiderstand nennen, beim Planetenproblem die Anziehung der anderen Himmelskörper, denn wir werden aus Analogie schließen, daß die Planeten aufeinander ähnliche Kräfte ausüben, wie die Sonne auf die Planeten, wofür wir in den Monden eine Anzeige haben, welche um die zugehörigen Planeten in erster Annäherung ebenfalls Keplersche Bewegungen ausführen. (Siehe Aufgabe 24.)

Als Beispiel zu dem zweiten in Nr. 44 genannten Satze wollen wir ausrechnen, welches die eigentliche Federkraft ist: X, denn tatsächlich (d. h. abgesehen von allen schon früher genannten Idealisierungen) beobachtet haben wir die gemeinsame Wirkung der Erdschwere und der Federkraft.

Wir schreiben also an:

$$m\ddot{x} = X - mg,$$

indem wir x nach oben positiv zählen. Daraus folgt, wenn wir nach der idealisierten Beobachtung

$$x = a \sin(\varkappa t + \varepsilon)$$

setzen, daß

$$\ddot{x} = -\varkappa^2 x = -\frac{\lambda x}{m},$$

mithin

$$X = mg - m\varkappa^2 x = mg - \lambda x = -\lambda y,$$

wo

$$y = x - \frac{G}{\lambda}$$

ist. Als reine Federkraft erhalten wir also eine Kraft, die genau dem früher ausgesprochenen Gesetze gehorcht, nur daß die Ruhelage nicht durch $x = 0$, sondern durch $y = 0$, d. h. $x = \frac{G}{\lambda}$ gegeben ist.

Damit aber haben wir eine neue Erkenntnis gewonnen: Hängen wir an eine Feder ein Gewicht G und lassen wir jetzt Ruhe eintreten, so ist die dabei erfolgte Ausdehnung der Feder

$$x = \frac{G}{\lambda}$$

oder

$$G = \lambda x.$$

Das ist die eigentliche Form des Gesetzes, wie es von Hooke ausgesprochen worden ist:

ut tensio, sic vis:

Das Gewicht ist bei ruhender Feder der Ausdehnung der Feder proportional.

Dieses statische Gesetz ist auch viel genauer als das kinetische Gesetz. Bei einigermaßen gutem Material gilt es recht befriedigend, so daß man eine solche Feder als Wage zur Bestimmung von G, oder aber, da G durch eine andere Kraft ersetzt werden kann, als Dynamometer, d. h. als Meßapparat für statische Kräfte verwenden kann.

Will man den Apparat genauer konstruieren, so setzt man an

$$G = f(x)$$

und bestimmt diese noch unbekannte, aber von λx nur wenig abweichende Funktion empirisch, d. h. man eicht das Dynamometer.

Die anderen störenden Kräfte bei der schwingenden Feder bestehen einmal ebenfalls im Luftwiderstand, dann aber vor allem darin, daß bei Bewegung die ganze Federkraft $-\lambda y$ nicht an den angehängten Körper mittels Spannungen an der Berührungsstelle übertragen, sondern teilweise dazu verwandt wird, die eigenen Massen der Feder zu beschleunigen und gewisse innere Widerstände zu überwinden.

47. Das erste (Newtonsche) Grundgesetz der Mechanik. Aus der Entwicklung des Kraftbegriffes ging hervor, daß die Massenbeschleunigung eines Körpers, der wesentlich nur eine Translationsbewegung ausführt, gleich war der auf ihn wirkenden Kraft.

Mit Rücksicht darauf, daß die verschiedenen Punkte eines Körpers sehr verschiedene Bewegung haben können, daß es ferner räumlich verteilte Kräfte $\bar{\varkappa} dV$ und an Flächen angreifende Kräfte $\bar{\sigma} dF$ gibt, und mit Rücksicht auf das Parallelogramm der Kräfte werden wir nunmehr dem Grundgesetze der Mechanik die folgende Fassung geben:

Wir betrachten ein Volumenelement ΔV mit der Masse Δm, das einen Punkt X umgibt, dessen augenblickliche Beschleunigung $\bar{w}$ sei. $\bar{\varkappa}\Delta V$ sei die Summe der an dem Volumenelement angreifenden räumlich verteilten Kräfte, $\bar{\sigma}_\nu dF$ der an einem Element der Oberfläche mit der äußeren Normalen ν angreifende Druck. Dann ist

$$\left.\begin{aligned} \Delta m \cdot \bar{w} &= \Delta \bar{k}, \\ \text{wo} \qquad \Delta \bar{k} &= \bar{x} \cdot \Delta V + \mathsf{S}\bar{\sigma}_\nu dF \end{aligned}\right\}$$

und die Summation S sich auf die Oberflächenelemente von ΔV erstreckt.

Dies alles ist in der Grenze gemeint, d. h. dividieren wir durch ΔV durch, so lautet das Gesetz

$$\mu \bar{w} = \bar{x} + \lim_{\Delta V = 0} \frac{1}{\Delta V} \mathsf{S}\bar{\sigma}_\nu dF.$$

$\mu = \text{limes} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$ bedeutet dabei die spezifische Masse (siehe auch Nr. 42).

Dieses fundamentale Grundgesetz enthält die beiden ersten **Newtonschen Grundgesetze:**

1. Das sogenannte Trägheitsgesetz: wirkt auf einen Punkt gar keine Kraft, so ist $\bar{w} = 0$, d. h. der Punkt bewegt sich in geradliniger Bahn mit gleichförmiger Geschwindigkeit.

2. Wirkt auf einen Punkt (genauer auf das ihn umgebende Massenelement) eine Kraft $d\bar{k}$, so erfolgt eine Massengeschwindigkeitsänderung $d(dm\bar{v}) \equiv dm\bar{w} \cdot dt$, welche dieselbe Richtung wie die Kraft hat und der Kraft direkt proportional ist.

3. Das Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte in etwas weiterer Fassung: die resultierende Kraft $d\bar{k}$ ist gleich der geometrischen Summe aus den räumlich verteilten Kräften $\bar{x}dV$ und den an der Oberfläche von dV angreifenden Spannungen $\bar{\sigma}_\nu dF$.

Neben seine beiden ersten Gesetze stellt Newton noch als drittes Gesetz (lex tertia):

Das Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung, das wir jedoch nur in der folgenden speziellen Form allgemein brauchen und nur vorläufig als Axiom aussprechen, später aus unserem obigen Fundamentalgesetz beweisen werden (Nr. 204):

Die beiden zu einem Flächenelement gehörenden spezifischen Drucke sind einander entgegengesetzt gleich:

$$\bar{\sigma}_\nu = -\bar{\sigma}_{-\nu}.$$

Unser Grundgesetz hat eine doppelte Bedeutung:

1. eine phoronomische: Eine Klasse von Bewegungserscheinungen untersuchen heißt, eine Reihe von Kraftgrößen $d\bar{k}_1, \ldots, d\bar{k}_n$ finden nebst ihren Ursachen, der Art, daß für jede wirklich beobachtete Beschleunigung $\bar{w}$ eines Punktes des Systems

$$\frac{1}{dm}\left| dm\bar{w} - \sum_{\nu=1}^{n} d\bar{k}_\nu \right| < \varepsilon,$$

wo ε innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler von $\bar{w}$ und $\frac{d\bar{k}}{dm}$ liegt.

Wir werden sagen, daß wir aus einer Bewegungsklasse einen „wesentlichen“ Bestandtteil herausgeschnitten haben, wenn es uns gelungen ist, ein $d\bar{k}$ nebst seinen Ursachen wirklich festzustellen und wir die begründete Erwartung haben, es werde gelingen, die anderen $d\bar{k}$ nebst ihren Ursachen so zu finden, daß die voranstehende Ungleichheit erfüllt ist.

2. eine kinetische: die Bewegung eines Punktes zu berechnen, wenn wir die Kräfte $d\bar{k}$ kennen. Darin ist speziell die statische enthalten: zu untersuchen, wann Gleichgewicht herrscht, d. h. wann ein Körper in Ruhe bleibt.

Notwendig ist dazu, daß für jeden Punkt

$$d\bar{k} = 0$$

sei. Das ist auch hinreichend, da aus $d\bar{k} = 0$

$$\bar{w} = 0,$$

d. h.

$$\bar{v} = \bar{c}$$

und

$$\bar{r} = \bar{c}t + \bar{r}_0$$

folgt, und (da zu einer Zeit Ruhe war, also $\bar{c} = 0$ ist) auch wirklich Ruhe bleibt, nämlich dauernd

$$\bar{r} = \bar{r}_0.$$

§ 10. Axiomatische Zusammenfassung der Resultate des ersten Kapitels. Maßsysteme.

48. Die Axiomgruppen I bis V der Mechanik. Aus dem bisher Besprochenen bringen wir jetzt das, worauf wir uns im folgenden in unseren Schlüssen stets berufen werden, in eine präzise Form. Dabei kommt es darauf an, die Beziehung der Begriffe aufeinander darzustellen, nicht darauf, zu sagen, was diese Begriffe eigentlich sind. Das kann reine Logik gar nicht. Nur Anschauung und Erfahrung können zusammen mit gewissen allgemeinen Grundsätzen des menschlichen Denkens das Begriffsschema ausfüllen, so wie es in den bisherigen Paragraphen geschehen ist und noch weiter geschehen soll.

Axiomgruppe I. In bezug auf einen absolut-ruhenden Raum und eine absolute Zeit t untersuchen wir Bewegungen, d. h. wir ordnen allen Punkten des Raumes zur Zeit t_1 umkehrbar eindeutig alle Punkte des Raumes zu irgendeiner Zeit t zu und sagen dann, es haben sich die Punkte in der Zeit t_1 bis t aus der ersten Lage in die zweite bewegt. Unter allen solchen denkbar möglichen Zuordnungen gibt es eine ausgezeichnete, wir nennen sie die materielle Bewegung, von der wir sagen, daß sich ein und derselbe materielle Punkt von X_1 nach X bewegt habe, wenn dem Punkte X_1 zur Zeit t_1 der Punkt X zur Zeit t zugeordnet ist.

Daß rückwärts zu X eindeutig der Punkt X_1 gehöre, besagt, daß die Materie undurchdringlich ist: es können nicht zwei verschiedene Punkte an dieselbe Stelle X kommen.

Wir setzen die Bewegung im Prinzip als stetig und beliebig oft stetig differentiierbar voraus, wie alle physikalischen Gesetze.

Axiomgruppe II. Die Masse. Bewegt sich ein mechanisches System (ein Körper, d. i. eine stetig zusammenhängende dreidimensionale Menge von materiellen Punkten, die wir nach Belieben aus der uns umgebenden Natur herausgreifen können), so kommt ihm beständig ein und dieselbe, von der Zeit unabhängige positive Zahl, seine Masse m zu.

Besteht ein Volumen aus den Teilen V_1 und V_2 mit den Massen m_1 und m_2, so hat V selbst die Masse $m_1 + m_2$.

$$\mu = \lim \frac{dm}{dV}$$

heißt die spezifische Masse des Punktes, gegen den dV konvergiert;

$$\mathfrak{v} = \lim \frac{dV}{dm} = \frac{1}{\mu}$$

heißt das spezifische Volumen. Aus $dm = \mu dV$ folgt:

$$m = \int \mu dV.$$

μ ist immer endlich und nie gleich Null, wenn wir auch manchmal, um eine Aufgabe zu vereinfachen, an einigen Stellen $\mu \doteq 0$ setzen.

Axiomgruppe III. Die Spannungen. Zwei Volumelemente dV_1 und dV_2, die sich längs des Flächenelementes dF berühren, üben an dF „Spannungen" oder „Drucke im allgemeinen Sinne" aufeinander aus, d. h. unendlich kleine Vektoren $\bar{\sigma}_1 dF$, $\bar{\sigma}_2 dF$, welche dV_1 resp. dV_2 zugeordnet sind oder, wie wir auch sagen, an diesen angreifen.

Vorläufig nehmen wir noch als Axiom das Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung an:

$$\bar{\sigma}_1 = -\bar{\sigma}_2.$$

Diese Spannungen hängen stets nur von Daten oder physikalischen Vorgängen ab, die sich in unmittelbarer (differentialer) Nähe von dF abspielen, mathematisch gesprochen von Konstanten und Variabeln, die dem Punkte X zugeordnet sind, gegen den dF konvergiert, von der Richtung des Flächenelementes dF und von den Differentialquotienten der Variabeln nach Ort und Zeit. Unter diesen sogenannten „Ursachen" der Spannungen kommen stets die Deformationen vor, d. h. die Gestaltsveränderungen in der unmittelbaren Umgebung des Punktes X gegen einen gewissen Normalzustand oder gegen die vorhergegangenen Zustände.

Betrachten wir ein bestimmtes materielles System, d. h. ein bestimmtes materielles Volumen V, so nennen wir die Spannungen innere Spannungen, wenn sie Flächenelementen im Innern von V zugeordnet sind.

Wir nennen die $\bar{\sigma} dF$ auch Kräfte: $d\bar{k}$.

Axiomgruppe IV. Außer den Spannungen können an einem Volumelement dV auch noch andere „Kräfte" angreifen, d. h. es können dV unendlich kleine Vektoren

$$d\bar{k} = \bar{\varkappa} dV$$

zugeordnet sein.

Die $\bar{\varkappa}$ sind Funktionen gewisser konstanter oder variabeler Größen, die wir als Ursachen der Kraft $d\bar{k}$ bezeichnen.

Im Gegensatz zu den Spannungen nennen wir die $\bar{\varkappa} dV$ „räumlich verteilte Kräfte".

Im Gegensatz zu den inneren Spannungen eines Systems nennen wir alle anderen Kräfte auch äußere Kräfte.

Axiomgruppe V. Das Newtonsche Grundgesetz und das Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte: Es ist, wenn $\bar{w} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}$ die Beschleunigung eines materiellen Punktes bedeutet,

$$dm\,\bar{w} = d\bar{k},$$

wo

$$d\bar{k} = dV \left\{ \sum \bar{\varkappa} + \lim_{\Delta V = 0} \frac{1}{\Delta V} \mathop{\mathrm{S}} \bar{\sigma}_\nu dF \right\}.$$

Dabei bezieht sich die Summation Σ auf die an einem Volumelement dV angreifenden Kräfte, die Summation S auf die Oberfläche von ΔV. ν bedeutet die äußere Normale von dF, $\bar{\sigma}_\nu dF$ also die Spannung, die von außen auf das Oberflächenelement dF des Volumelementes ΔV ausgeübt wird.

49. Das physikalische und das technische Maßsystem. Um alle genannten Größen durch Zahlen darstellen zu können, bedarf es noch der Festsetzung der Maßeinheiten.

Von den Grundbegriffen Kraft, Masse, Ort, Zeit sind drei unabhängig, da eine Relation, nämlich das Newtonsche Gesetz besteht, das für die Dimensionen die Beziehung gibt:

$$[m, l, t^{-2}] = [k].$$

Das in der wissenschaftlichen Welt übliche System ist das physikalische, auch c. g. s.-System oder Gaußsches System genannt.

Als Längeneinheit gilt das Zentimeter, als Zeiteinheit die Sekunde, als Masseneinheit theoretisch das Gramm, d. h. die Masse eines Kubikzentimeters chemisch reinen Wassers bei 4^0 C und 760 mm Barometerstand, praktisch ein in Paris aufbewahrtes Platinkilogramm = 1000 g. Die Krafteinheit ist dann gegeben, es ist diejenige Kraft, die der Masse eines Grammes die Beschleunigung von 1 cm in der Sekunde erteilt. Man nennt diese Krafteinheit das Dyn.

Neben dem physikalischen Maßsystem hält sich aber noch das sogenannte technische Maßsystem, es ist namentlich in der Technik noch ganz vorherrschend. Es hat den Nachteil, ein spezielles Kraftgesetz zur Grundlage zu haben, nämlich das Gesetz der Schwere, also ein empirisches Moment hineinzutragen.

Im technischen Maßsystem bleibt die Sekunde Zeiteinheit, Längeneinheit ist das Meter. Als Krafteinheit wird die Schwerkraft eines Kilogramms definiert, und da das ein wenig unbestimmt ist, muß man hinzufügen, dort gemessen, wo gerade $g = 9{,}81$ m/Sek. ist.

Dann ist die Masseneinheit bestimmt, es ist die Masse, welche durch die Kraft eines Kilogramms die Beschleunigung eines Meters pro Sekunde erfährt.

Bedenkt man, daß 1 kg Gewicht seiner eigenen Masse die Beschleunigung 9,81 m/Sek. erteilt, also einer 9,81 mal so großen Masse die Beschleunigung eines Meters, so sieht man, daß die Einheit des technischen Massenmaßes die Masse von 9,81 kg ist. Oder

man erhält im technischen Maßsystem die Masse, wenn man das Gewicht des Körpers durch 9,81 dividiert.

Wie verhält sich nun die Schwerkraft eines Kilogramms zu einem Dyn?

Ein Kilogramm Schwerkraft erteilt seiner eigenen Masse von 1000 g eine Beschleunigung von 981 cm/Sek.

Also ist

$$1 \text{ kg Schwerkraft} = 981\,000 \text{ Dyn}.$$

Wir werden im folgenden das technische Maßsystem bevorzugen.

Kapitel II.

Die sogenannte Punktmechanik.

50. Allgemeine Bemerkung über den Punkt als Objekt der Mechanik. Wenn wir im folgenden von der Bewegung eines einzelnen Punktes sprechen, so meinen wir damit, daß entweder ein Körper eine reine Translationsbewegung (Parallelbewegung) ausführt und daß also alle seine Punkte dieselbe Geschwindigkeit und Beschleunigung besitzen, oder aber wir meinen damit, daß es uns genügt, einen ganz bestimmten Punkt des Körpers, seinen Massenmittelpunkt, auch Schwerpunkt genannt, in seiner Bewegung zu verfolgen.

Wenn wir sagen, ein Körper sei klein und wir könnten ihn deshalb als einen Punkt auffassen, so ist damit gemeint, daß wir die Entfernungen seiner Punkte von anderen Punkten mit derjenigen des Massenmittelpunktes identifizieren können und natürlich dann Fehler von der Größenordnung des Verhältnisses der gleich Null gesetzten Strecken zu den anderen Strecken zu erwarten haben.

§ 11. Der Schwerpunktsatz.

51. Beweis des Schwerpunktsatzes mit Benutzung der lex tertia. Haben wir irgendein beliebiges System und teilen wir dasselbe in lauter Volumelemente dV, so besteht für jedes Volumelement die Grundgleichung

$$\dot{\bar{w}}\, dm = \bar{\varkappa}\, dV + \mathfrak{S}\, \bar{\sigma}_\nu dF.$$

Addieren wir nun diese sämtlichen Gleichungen, so bekommen wir

$$\mathfrak{S}\, dm \dot{\bar{w}} = \mathfrak{S}\, \bar{\varkappa}\, dV + \mathfrak{S}\mathfrak{S}\, \bar{\sigma}_\nu dF.$$

Die Doppelsumme rechts erstreckt sich über alle Flächen, welche den Körper in Volumelemente einteilen[1], und über die Oberfläche des Körpers. Die Flächenelemente im Innern kommen dabei doppelt vor, da sie zu zwei dV gehören, es kommt also sowohl $\bar{\sigma}_\nu dF$ als auch $\bar{\sigma}_{-\nu} dF$ vor. Deshalb heben sich die Glieder der Doppelsumme rechts gegenseitig auf bis auf die Glieder der Oberfläche, und somit bleibt

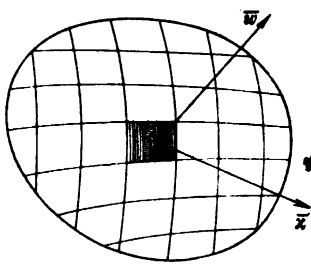


Fig. 18.

$$\mathfrak{S}\, dm \dot{\bar{w}} = \mathfrak{S}\, \bar{\varkappa}\, dV + \mathfrak{S}\, \bar{\sigma}_\nu dF,$$

wo die letzte Summe jetzt nur mehr über die **Oberfläche** zu erstrecken ist.

Nun definieren wir einen Punkt X^* (sprich X-Stern) mit dem Vektor $\bar{r}^*$, den sogenannten **Massenmittelpunkt**, indem wir setzen

$$m\bar{r}^* = \mathfrak{S}\, dm\, \bar{r}.$$

(m bedeutet die ganze Masse: $m = \mathfrak{S}\, dm$.)

1) Für einen exakten Grenzübergang liegt in diesem Begriff eine gewisse Schwierigkeit; wir werden deshalb später (Nr. 206) einen anderen Beweis des Schwerpunktsatzes bringen.

Da dm eine dem Volumelement eigentümliche Zahl ist, sich also mit der Zeit nicht ändert, so ist

$$\mathsf{S}\, dm\bar{w} = \frac{d^2}{dt^2}\mathsf{S}\, dm\bar{r} = m\frac{d^2\bar{r}^*}{dt^2} = \bar{w}^* m.$$

Setzen wir das in unsere Gleichung ein, so erhalten wir

$$m\bar{w}^* = \mathsf{S}\bar{\varkappa}\, dV + \mathsf{S}\bar{\sigma}_\nu dF.$$

Die Masse, multipliziert mit der Beschleunigung des Massenmittelpunktes irgend eines Systems ist gleich der Summe aller räumlich verteilten Kräfte, vermehrt um die Summe aller an der Oberfläche des Systems angreifenden Spannungen, oder aber ist gleich der Summe aller Kräfte, mit Ausnahme der im Innern vorhandenen Spannungen.

Diesen Satz nennt man den Schwerpunktsatz, indem man den Massenmittelpunkt mit dem später zu definierenden Schwerpunkt verwechselt, was meist erlaubt ist.

Für die Statik folgt daraus als notwendige Gleichgewichtsbedingung:

Es muß die Summe der äußeren Kräfte verschwinden.

Bei sehr vielen Problemen genügt über die Bewegung die Auskunft, die uns der Schwerpunktsatz gibt. Sicher immer dann, wenn wir wissen, daß der Körper eine Translationsbewegung ausführt, oder uns nur eine mittlere Bewegung interessiert. Es ist dann so, als hätten wir statt des ganzen Systems nur diesen Punkt mit der endlichen Masse m, und griffen an ihm alle äußeren Kräfte an, wie wir kurz sagen wollen, um alle anderen Kräfte im Gegensatz zu den inneren Spannungen zu bezeichnen.

Wenn also im folgenden kurz von der Bewegung eines Punkts die Rede ist, so soll damit stets der Massenmittelpunkt eines Systems gemeint sein.

52. Sätze über die Lage des Massenmittelpunktes.

1. Die Definition des Massenmittelpunktes hängt nicht von der Wahl des Anfangspunktes O der Koordinaten ab.

Denn wählen wir einen anderen Punkt O', sodaß $OO' = \bar{e}$, und $\overline{O'X} = \bar{s}$, so ist

$$\bar{r} = \bar{e} + \bar{s}$$

$$\text{und}\quad \bar{r}^* = \frac{\mathsf{S}\bar{r}\, dm}{m} = \bar{e} + \frac{\mathsf{S}\bar{s}\, dm}{m} = \bar{e} + \bar{s}^*.$$

2. Fällt der Punkt O mit dem Massenmittelpunkt zusammen, so ist

$$\mathsf{S}\bar{r}\, dm = 0.$$

Denn es ist $\bar{r}^* = 0$.

3. In Parallelkoordinaten x, y, z heißen die Definitionsformeln

$$x^* = \frac{\mathop{\mathrm{S}} dm\,x}{m}$$

$$y^* = \frac{\mathop{\mathrm{S}} dm\,y}{m}$$

$$z^* = \frac{\mathop{\mathrm{S}} dm\,z}{m}.$$

4. Besitzt der Körper eine Symmetrieebene der Massenverteilung, so liegt der Massenmittelpunkt in dieser Ebene.

Sei $x = 0$ diese Ebene, so entspricht jedem dm mit positivem x ein gleiches dm mit negativem x. Also ist

$$\mathop{\mathrm{S}} dm\,x = 0,$$

da sich alle Glieder paarweise fortheben und somit auch

$$x^* = 0.$$

5. Teilt man den Körper in zwei Teile K_1 und K_2 mit den Massen m_1 und m_2 und den Massenmittelpunkten $S_1(\bar{r}^*_1)$ und $S_2(\bar{r}^*_2)$, so ist der Massenmittelpunkt des ganzen Systems

$$\bar{r}^* = \frac{m_1\bar{r}_1^* + m_2\bar{r}_2^*}{m_1 + m_2},$$

d. h. er berechnet sich so, als ob er der Massenmittelpunkt der beiden Punkte S_1 und S_2 mit den Massen m_1 und m_2 wäre.

Denn es ist

$$\bar{r}^* = \frac{\mathop{\mathrm{S}}_1 dm\,\bar{r} + \mathop{\mathrm{S}}_2 dm\,\bar{r}}{\mathop{\mathrm{S}}_1 dm + \mathop{\mathrm{S}}_2 dm}$$

wo $\mathop{\mathrm{S}}_1$ die Summation über den ersten Teil bedeutet, $\mathop{\mathrm{S}}_2$ die über den zweiten.

Daraus folgt dann in Verbindung mit Satz 4 weiter, daß der gemeinsame Massenmittelpunkt auf der Verbindungslinie der beiden Punkte S_1 und S_2 liegt und diese Strecke im umgekehrten Verhältnis der Massen teilt.

Denn machen wir die Verbindungslinie zur y-Achse und den Massenmittelpunkt zum Anfangspunkt, so folgt

$$0 = m_1 y_1 + m_2 y_2,$$

d. h.

$$y_1 : y_2 = -m_2 : m_1.$$

6. Analog gilt, wenn man den Körper als Differenz der beiden Körper K_1 und K_2 auffassen kann,

$$\bar{r}^* = \frac{m_1\bar{r}_1^* - m_2\bar{r}_2^*}{m_1 - m_2}.$$

7. Der Massenmittelpunkt liegt ganz innerhalb des kleinsten, nirgends konkaven Körpers, der den gegebenen Körper einschließt. Ist also der Körper selbst nirgends konkav, so liegt der Massenmittelpunkt sicher innerhalb des Körpers.

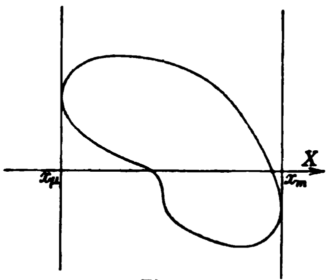


Fig. 19.

Beweis. Sei x_m der algebraisch größte, x_μ der kleinste Wert der Koordinate x für alle Körperpunkte, so haben die Ebenen, die in den Punkten x_μ und x_m senkrecht zur x-Achse stehen, Punkte mit dem Körper gemein, schließen ihn aber sonst ganz ein. Nennen wir sie die Stützebenen, die zur Richtung x zugehören.

Nun ist, da $dm \geqq 0$,

$$mx^* = \mathsf{S}\, dmx \leqq x_m \mathsf{S}\, dm = x_m m$$

$$mx^* = \mathsf{S}\, dmx \geqq x_\mu \mathsf{S}\, dm = x_\mu m,$$

$$\text{d. h. } x_\mu \leqq x^* \leqq x_m.$$

Es liegt also der Massenmittelpunkt in dem durch die beiden parallelen Stützebenen ausgeschnittenen Raumteil.

Das gilt für jede Richtung.

Es liegt also der Massenmittelpunkt in dem Körper K', der von sämtlichen Stützebenenpaaren des gegebenen Körpers K ausgeschnitten wird.

K' schließt sicherlich K ganz in sich. Auch ist K' nirgends konkav. Denn sein Umfang ist die Einhüllende der Stützflächen von K, diese sind also auch die Tangentialebenen von K' und lassen doch nach Definition K' ganz auf einer Seite. Ein Körper aber, dessen Tangentialebenen ihn ganz auf einer Seite lassen, ist nirgends konkav. K' ist aber auch der kleinste, nirgends konkave Körper, der K ganz einschließt. Denn gäbe es einen kleineren K'' und wäre A ein Punkt seines Umfanges, so läge K'', also auch K ganz auf einer Seite der Tangentialebene in A, der Streifen, der zwischen dieser Tangente und der einen parallelen von K' wäre von K frei, dann könnte aber die Tangente von K' unmöglich Stützebene von K sein.

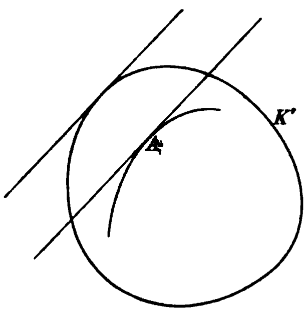


Fig. 20.

Damit ist der Satz bewiesen.

8. Für einen starren Körper ist der Massenmittelpunkt ein im Körper fester Punkt. Denn nehmen wir ein im Körper festes Koordinatensystem $0x, y, z$, so ist

$$x^* = \frac{\mathsf{S}\, x\, dm}{m} \text{ etc.}$$

Bei einer Bewegung bleiben aber nicht nur dm, sondern auch die x, y, z alle fest, mithin auch x^*, y^*, z^*, w. z. b. w.

Dieser Satz gilt aber sonst keineswegs, wie man leicht einsieht.

53. Berechnung einiger Massenmittelpunkte. Es sollen nur einige häufig vorkommende Beispiele berechnet werden. Weitere Formeln findet der Leser in der „Hütte“.

Wir werden im folgenden die spezifische Masse μ als konstant, d. h. den Körper als homogen annehmen, es fällt dann μ aus den Formeln heraus.

1. Die dreieckige Platte. Wir teilen die Platte in unendlich schmale Streifen parallel zu einer Seite. Für einen jeden solchen Streifen liegt dann nach dem Symmetriesatz der Massenmittelpunkt in der Mitte, also liegt nach Satz 5 der resultierende Massenmittelpunkt auf der Mittellinie. Das gilt für jede Dreiecksseite. Also ist der Massenmittelpunkt mit dem Schnittpunkt der Mittellinien identisch und hat von jeder Seite einen Abstand gleich $\frac{1}{3}$ der entsprechenden Höhe.

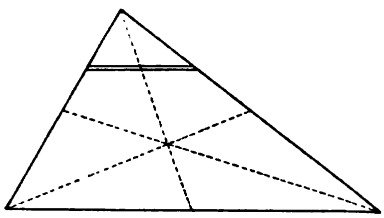


Fig. 21.

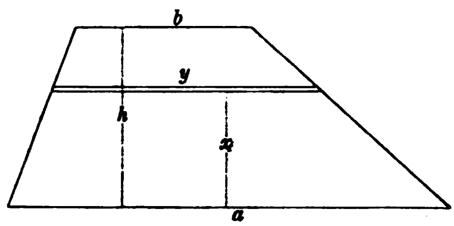


Fig. 22.

2. Das Trapez. Sicherlich liegt nach analogen Schlüssen der Massenmittelpunkt auf der Verbindungslinie der Mitten der beiden parallelen Seiten. Um den Abstand x von einer Seite (a) zu bekommen, teilen wir das Trapez in unendlich dünne Streifen parallel zu a ein und erhalten

$$h\left(\frac{a+b}{2}\right)x^* = \int_0^h yx\,dx,$$

wo y die Länge des Streifens ist.

Es ist aber y sicherlich eine ganze lineare Funktion von x, da x, y als Koordinaten einer Geraden in einem schiefwinkligen Achsensystem angesehen werden können, also

$$y = \alpha x + \beta$$

und da $y = a$ für $x = 0$ und $y = b$ für $x = h$ ist, so folgt

$$y = \frac{b-a}{h}x + a,$$

setzt man das in obige Formel ein und rechnet aus, so bekommt man

$$x^* = \frac{1}{3} h \frac{a + 2b}{a + b}.$$

Ebenso berechnet sich der Abstand von der Seite b zu

$$z^* = \frac{1}{3} h \frac{b + 2a}{a + b},$$

woraus folgt

$$x^* : z^* = \left(b + \frac{a}{2}\right) : \left(a + \frac{b}{2}\right),$$

was folgende geometrische Konstruktion des Massenmittelpunktes ergibt:

M, der Schnittpunkt von EF mit der Mittellinie GH ist der gesuchte Massenmittelpunkt.

Häufig braucht man nur die Gerade durch den Massenmittelpunkt, welche den parallelen Seiten parallel ist und vor allem ein

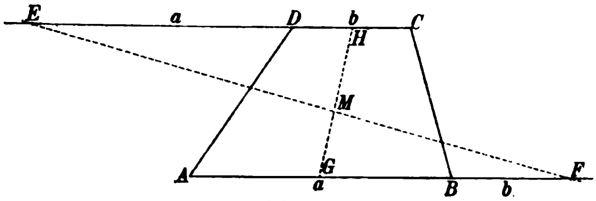


Fig. 23.

Urteil darüber, wie weit sie von der Halbierenden der nichtparallelen Seiten entfernt ist.

Sei dieser Abstand ε, so ist

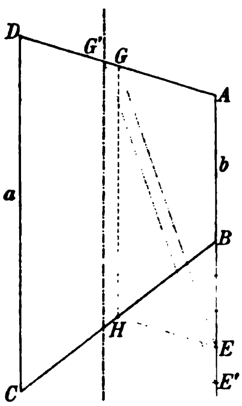


Fig. 24.

$$\varepsilon = \frac{h}{2} - x^* = \frac{h}{6} \frac{a - b}{a + b} \leqq \frac{h}{6}.$$

Daraus folgt die Proportion

$$\varepsilon : \frac{h}{2} = \frac{a - b}{6} : \frac{a + b}{2},$$

woraus sich folgende Konstruktion ergibt:

Man ziehe HE parallel AG und mache

$$EE' = \frac{1}{3} BE = \frac{1}{3}\left(\frac{a + b}{2} - b\right) = \frac{a - b}{6}.$$

Wenn $E'G' \parallel EG$, so geht die gesuchte Gerade durch G' hindurch.

3. Wir können natürlich ebenso wie von räumlich ausgedehnten Körpern auch von Kurvenstücken Massenmittelpunkte bestimmen. So z. B. von einem Kreisbogenstück AB.

Der zugehörige Radius sei r, der Zentriwinkel α. Nach dem Symmetriesatz liegt der Massenmittelpunkt auf der Winkelhalbierenden Ox des Zentriwinkels.

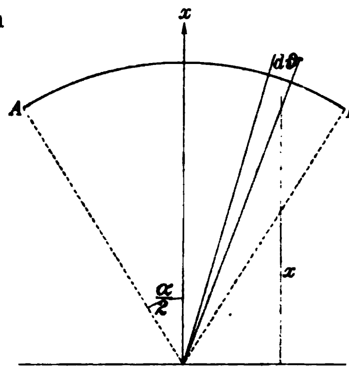


Fig. 25.

Teilen wir den Bogen in unendlich kleine Stücke $r\,d\vartheta$, so ist

$$r\alpha x^* = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} x r\, d\vartheta$$

$$= \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} r^2 \cos\vartheta\, d\vartheta = 2 r^2 \sin\frac{\alpha}{2},$$

somit $x^* = r\,\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$.

4. Für einen vollen **Kreissektor** folgt daraus, wenn man ihn in unendlich schmale Sektoren teilt und nach Beispiel 1 hinzunimmt, daß für einen solchen unendlich schmalen Sektor der Massenmittelpunkt auf $\frac{2}{3}$ des Radius liegen muß, daß

$$x^* = r\,\frac{4}{3}\,\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$$

ist.

Für den Halbkreis $(\alpha = \pi)$ folgt speziell

$$x^* = \frac{4}{3\pi}\cdot r.$$

5. Um die Massenmittelpunktskoordinate x^* des **Kreissegments** zu berechnen, fassen wir dieses als Differenz des Kreissektors und des Dreiecks auf und erhalten nach Satz 6 der vorigen Nummer und nach den Beispielen 1 und 4 dieser Nummer

$$x^* = \frac{\frac{r^2\alpha}{2}\cdot\frac{4}{3}\,r\,\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha} - \frac{1}{2}\,r^2\sin\alpha\,\frac{2}{3}\,r\cos\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{2}\,r^2(\alpha - \sin\alpha)}$$

oder

$$x^* = \frac{4}{3}\,r\,\frac{\sin^3\frac{\alpha}{2}}{\alpha - \sin\alpha}.$$

6. **Der Kegel.** Wir suchen den Abstand x^* des Massenmittelpunkts von der Spitze O aus senkrecht zur Basis F. Die Höhe sei h.

Wir teilen den Kegel durch parallele Ebenen zur Basis in parallele Schichten der Dicke dx. Die Fläche einer solchen Schicht ist dann nach bekannten Ähnlichkeitssätzen $\frac{x^2}{h^2}F$. Also ist

$$\frac{1}{3}Fhx^* = \int_0^h \frac{x^2}{h^2} F \cdot x \cdot dx = \frac{1}{4}Fh^2,$$

d. h. $x^* = \frac{3}{4}h$.

Der Massenmittelpunkt liegt um ein Viertel der Höhe von der Basis entfernt.

Historisch sei bemerkt, daß sich schon die Alten, besonders aber Archimedes sehr viel mit der Bestimmung von Massenmittelpunkten beschäftigt und dabei die ersten Spuren der Integralrechnung entdeckt haben.

Aufgabe 28: Man beweise die Guldinsche Regel: Wenn ein ebenes Kurvenstück der Länge s um eine in derselben Ebene gelegene Gerade rotiert, so ist der Inhalt des durch das Kurvenstück erzeugten Ringes einer Rotationsfläche

$$F = 2\pi s \cdot x^*,$$

wo x^* den Abstand des Massenmittelpunktes des Kurvenstückes von der Geraden bedeutet.

§ 12. Normaldruck und Haftreibung gegen Gleiten.

54. Feste und starre Körper. Es gibt, wie die tägliche Erfahrung lehrt, in der Natur Körper, welche die Eigenschaft haben, daß ihre Gestaltsänderungen innerhalb einer festen kleinen Grenze bleiben, wenn nur die äußeren Kräfte eine gewisse Größe nicht überschreiten. Man nennt solche Körper feste Körper. Die Festigkeit kann so groß sein, daß bei genügend beschränkter Beanspruchung durch äußere Kräfte die Gestaltsänderungen fast oder ganz unmerklich sind. Man wird so dazu geführt, gewisse idealisierte Körper zu betrachten, die sogenannten starren Körper, die kinematisch dadurch definiert sind, daß sie ihre Gestalt überhaupt nicht ändern, also, ob sie sich nun bewegen oder nicht, stets sich selbst kongruent bleiben. Das ist natürlich ein Grenzfall, der aber für die Mechanik von fundamentaler Bedeutung geworden ist. Man nennt den Zweig der Mechanik, der sich mit starren Körpern und Systemen aus starren Körpern beschäftigt, auch Stereomechanik.

Wann ein Körper als starr angesehen werden darf und wann nicht, das wird nach dem Gesagten zunächst von der Größe der äußeren Kräfte abhängen, aber auch von dem Zweck der angestellten Betrachtung. Eine allgemein gültige Regel läßt sich darüber wohl kaum aufstellen; es wird immer ein gewisser Takt für Mechanik dazu gehören, das Richtige zu treffen.

55. Statik der Stützflächen. Einleitung. Wir wissen aus der täglichen Erfahrung, daß wir feste Körper dadurch am Fallen hindern können, daß wir sie auf eine feste horizontale Fläche setzen. Nehmen wir an, daß außer der Schwerkraft keine räumlich verteilten Kräfte da sind, so kann nach dem Schwerpunktsatz das Gleichgewicht nur durch eine aufwärts gerichtete Kraft D erzeugt sein, die aus den Drucken der Umgebung unseres Körpers resultiert, also, da die Luft erfahrungsmäßig den Körper nicht tragen kann, vor allem durch die feste Unterlage bedingt sein muß. Machen wir die plausible, genauer allerdings erst in der Statik der Flüssigkeiten nachweisbare Annahme, daß der Anteil der Luft an der Kraft D recht klein ist, und idealisieren den Fall dahin, daß wir D nur der Unterlage zuschreiben. Wir nennen D einen Stützdruck.

Ist die Unterlage noch merklich deformierbar, so erkennen wir D objektiv an der eintretenden Gestaltsänderung der Unterlage, andernfalls ist der Stützdruck eine hypothetische Größe, die aus unseren allgemeinen Prinzipien erschlossen werden muß (vgl. Nr. 44).

Man kann aber erfahrungsgemäß einen Körper auch auf einer festen schrägen Ebene, einer sogenannten schiefen Ebene, ruhen lassen, wenn der Neigungswinkel α derselben einen gewissen Wert φ nicht überschreitet:

$$\alpha \leqq \varphi.$$

Der Grenzwinkel φ kann danach leicht experimentell ermittelt werden.

Es muß auch jetzt ein vertikal aufwärts gerichteter Stützdruck D da sein. Zerlegen wir ihn in eine Komponente N senkrecht zur Stützfläche und eine Komponente R parallel zur Ebene. Die Gleichgewichtsbedingung läßt sich dann, da $\frac{R}{N} = \operatorname{tg} \alpha$ ist, auch so aussprechen:

$$R \leqq fN,$$

wo $f = \operatorname{tg} \varphi$ gesetzt ist.

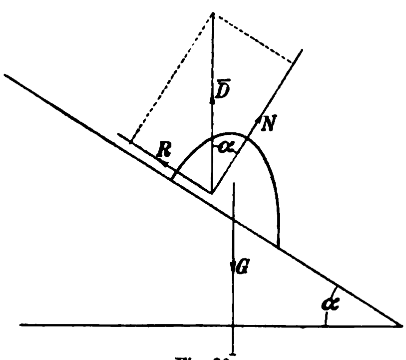


Fig. 26.

Zahlreiche Experimente haben gelehrt, daß f wesentlich eine Materialkonstante ist, d. h. von der physikalischen und chemischen Beschaffenheit der beiden sich berührenden Körper abhängt, nicht aber von dynamischen Größen, z. B. von N oder von geometrischen, z. B. der Gestalt oder Größe der Berührungsfläche.

f (und ebenso φ) sind um so kleiner, je glatter die Körper im Sprachgebrauch genannt werden: man nennt deshalb R die Reibung, und um sie von anderen ähnlichen Kräften zu unterscheiden, die Haftreibung gegen Gleiten, oder die Reibung in der Ruhe. f heißt der Reibungskoeffizient, φ der Reibungswinkel. N heißt der Normaldruck.

$f = 0$, d. h. $\varphi = 0$ und $R = 0$ bedeutet einen Idealfall, man sagt dann, die sich berührenden Körper seien vollkommen (absolut) glatt.

Es kann auch sein, daß man auf die Beschränkung des Gleichgewichts, die durch

$$R \leq f N$$

gegeben ist, keine Rücksicht nehmen will, also $R : N$ unbeschränkt läßt. Das kommt darauf hinaus, $f = \infty$ zu setzen, man spricht dann von vollkommen rauhen Flächen.

Was den Normaldruck N anbetrifft, so werden wir die Ungleichheit

$$N \geqq 0$$

voraussetzen, d. h. N kann kein Zug sein. Jedenfalls lehrt die Erfahrung, daß negative N nur sehr klein sein können, nur winzige Partikelchen haften von unten an einer horizontalen festen Fläche. Und diese Erscheinung werden wir am besten von der hier besprochenen „abschneiden", wir werden in dem möglichen Auftreten solcher kleinen Zugkräfte eine besondere Kraft sehen, welche zu der Gruppe der sogenannten molekularen Kräfte gehört, wie die Kohäsion, Adhäsion usw. Man kann die Festsetzung, daß an der Oberfläche eines festen Körpers immer

$$N \geqq 0$$

sein muß, d. h. nie ein Zug herrschen kann, als exakte Definition der natürlichen Trennungsfläche des festen Körpers von seiner Umgebung auffassen.

Das ist wieder eine Idealisierung, denn in Wahrheit gibt es keine einzelnen Körper, alles ist stetig und zwei materielle Raumteile, die wir sich berührende Körper nennen, sind in Wahrheit nicht durch eine mathematische Fläche, sondern durch eine dünne Übergangsschicht getrennt, in deren physikalischer Mischbeschaffenheit die Ursache der Reibungserscheinungen zu suchen ist.

56. Fortsetzung: Normaldruck und Haftreibung. Wir verallgemeinern unsere Resultate in folgender, mit der Erfahrung in Übereinstimmung stehender Weise:

Berühren sich zwei feste Körper, ohne zu gleiten, längs eines Flächenelements dF, so können sie dort Stützdrucke $d\overline{D}$ aufeinander ausüben: die Normalkomponente eines solchen, dN, ist stets ein Druck im engeren Sinne und heißt

„Normaldruck", die tangentiale Komponente $d\bar{R}$ heißt „Haftreibung gegen Gleiten" und es ist

$$|d\bar{R}| \leqq f dN,$$

wo f eine Materialkonstante, den „Reibungskoeffizienten" bedeutet. Der Reibungswinkel φ ist durch

$$f = \operatorname{tg} \varphi$$

definiert.

Ist die Berührungsfläche eben, so ist $N = \mathfrak{S} dN$ der resultierende Druck, $\bar{R} = S d\bar{R}$ die resultierende Haftreibung, und es ist

$$|\bar{R}| \leqq \mathfrak{S} |d\bar{R}| \leqq f \mathfrak{S} dN,$$

also $|\bar{R}| \leqq fN$.

Für krummflächige Berührungsstücke gilt eine solche einfache Relation nicht. Zwar bleibt

$$|\bar{R}| \leqq f \mathfrak{S} |d\bar{N}|$$

bestehen, aber es kann $\mathfrak{S} |d\bar{N}|$ viel größer als $|\mathfrak{S} d\bar{N}| = |\bar{N}|$ sein und also auch $|\bar{R}|$ größer als $f |\bar{N}|$ sein.

Das trifft zum Beispiel für einen von allen Seiten eingeklemmten zylinderförmigen Zapfen zu; da kann $\mathfrak{S} d\bar{N} = 0$ und doch $\bar{R}$ sehr groß sein.

Häufig spricht man von einer einpunktigen Berührung zweier starrer Körper und von endlichen, an dieser Stelle auftretenden Normaldrucken und Reibungen (z. B. eine Kugel liege auf einer horitalen Ebene). Man wird diesen Fall stets als idealen Grenzfall einer kleinen Berührungsfläche anzusehen haben, die tatsächlich immer infolge der Deformation dasein wird, also als einen Grenzfall derselben Art wie die Abstraktion des starren Körpers selbst. Es wird im allgemeinen erlaubt sein, diese unmerklich kleine Berührungsfläche als eben vorauszusetzen und dementsprechend

$$|\bar{R}| \leqq fN$$

anzunehmen.

Was Zahlenwerte des Reibungskoeffizienten angeht, so sind die Angaben stets schwankend, da sich das Material im Laufe der Zeit ändert, z. B. selbst durch den Gebrauch glättet. Man findet Angaben in der „Hütte". Es seien hier nur wenige, besonders wichtige genannt:

Stahl auf Stahl	0,1 bis 0,2
Eisen auf Stahl	0,2 bis 0,3
Leder auf Eisen oder Holz	um 0,3
Stein auf Stein	0,4 bis 0,75.

Bei Holz kommt es sehr auf die Faserung an, in Richtung der Fasern ist f stets wesentlich größer als senkrecht zu ihnen

Für die graphische Lösung von Aufgaben ist es meist bequemer, die Resultierende $\overline{D}$ aus $\overline{R}$ und N zu betrachten. Setzt man $\frac{R}{N} = \operatorname{tg}\alpha$, so bedeutet α den Winkel, den $\overline{D}$ mit der Normalen einschließt und $|\overline{R}| \leq fN$ heißt dann nichts anders als $\alpha \leq \varphi$, d. h. $\overline{D}$ liegt innerhalb eines Kreiskegels, dessen Erzeugende den Winkel φ mit der Normalen einschließen. Diesen Kreiskegel nennt man den „Reibungskegel".

57. Beispiele und Aufgaben.

1. Wie groß ist eine Kraft K, die parallel einer schiefen Ebene aufwärts wirkend, einen Körper vom Gewicht G im Gleichgewicht hält, wenn keine Reibung als vorhanden angenommen wird? (das älteste Problem der schiefen Ebene, das bereits von einem unbekannten Autor des 14. Jahrhunderts, dem sogenannten Vorläufer Lionardo da Vincis, gelöst wurde; später wurde die Antwort noch einmal unabhängig von dem Holländer Simon Stevin 1586 gefunden).

Antwort: die Kräfte G, K, N müssen sich das Gleichgewicht halten. Eine Zerlegung von G nach Achsen parallel und senkrecht zur schiefen Ebene gibt sofort

$$K = G \sin\alpha$$
$$N = G \cos\alpha .$$

Dasselbe Resultat läßt sich auch graphisch ableiten, da $\overline{K}$, $\overline{G}$, $\overline{N}$ ein geschlossenes Dreieck bilden müssen: Man zeichne ein Dreieck, dessen Seiten G, K, N parallel sind, und dessen vertikale Seite in einem gewählten Maßstabe gleich G ist. Man beachte, daß die Pfeile, den Richtungen von K, G, N entsprechend, um das Dreieck im selben Sinne herumlaufen müssen.

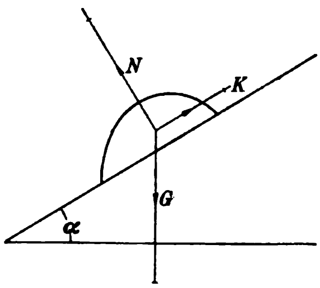


Fig. 27.

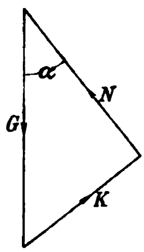


Fig. 28.

2. Man löse dieselbe Aufgabe unter Berücksichtigung der Reibung.

Außer K, N, G wirkt dann noch das unbekannte R aufwärts oder abwärts parallel der schiefen Ebene. Wir wollen es aufwärts positiv zählen.

Dann ergibt die Zerlegung nach denselben Achsen wie vorhin:

$$K + R - G\sin\alpha = 0$$
$$N - G\cos\alpha = 0,$$

d. h.

$$N = G\cos\alpha$$
$$R = G\sin\alpha - K.$$

Nun muß aber $|R| < fN$ sein, d. h. entweder

$$R > 0 \quad \text{und} \quad R \leq fN,$$

also
$$0 \leq G \sin\alpha - K \leq \operatorname{tg}\varphi \cdot G\cos\alpha$$

und
$$G\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi} \leq K \leq G\sin\alpha \tag{a}$$

oder
$$R < 0 \quad \text{und} \quad -R \leq fN,$$

also
$$0 \geq G\sin\alpha - K \geq -\operatorname{tg}\varphi \cdot G\cos\alpha$$

d. h.
$$G\sin\alpha \leq K \leq G\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi}. \tag{b}$$

(a) und (b) ergeben zusammen für K das zulässige Intervall
$$G\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi} \leq K \leq G\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi}.$$

Das Resultat gilt auch für negative, d. h. abwärts gerichtete K.

Graphisch löst man am besten die Aufgabe, indem man N und R wieder zu dem resultierenden Stützdruck $\overline{D}$ zusammenfaßt und beachtet, daß $\overline{D}$ in dem Reibungskegel um die Normalrichtung N liegen muß. Man wird also erst $\overline{G}$ zeichnen, dann die Richtung von $\overline{K}$ und dann den Reibungskegel,
$$BC = G\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}$$
gibt das Minimum von $\overline{K}$,
$$BD = G\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi}$$
gibt das Maximum.

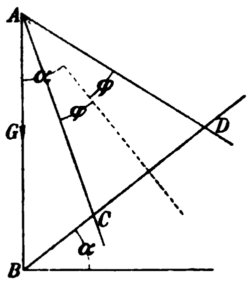


Fig. 29.

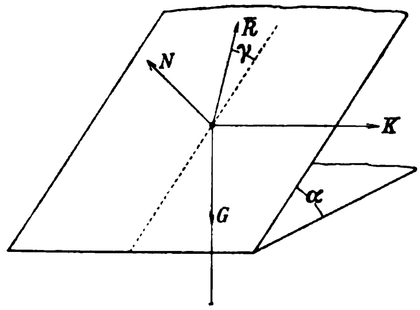


Fig. 30.

Aufgabe 29. Man beantworte dieselben beiden Fragen für eine horizontal wirkende Kraft K, dann für eine unter dem beliebigen Winkel s gegen die schiefe Ebene geneigte Kraft K. Man berechne auch N.

Beispiel 3. Ein auf einer schiefen Ebene liegender schwerer Körper sei einer Kraft K unterworfen, welche horizontal und parallel der unteren Kante der Ebene wirkt. Wann ist Gleichgewicht vorhanden? (siehe Fig. 30.)

Offenbar kann nur Gleichgewicht herrschen, wenn Reibung vorhanden ist. Schließe dieselbe den Winkel γ mit der Linie stärksten Anstiegs der schiefen Ebene ein.

Dann ergeben sich für ein Koordinatensystem, dessen Achsen mit der Richtung von K, mit der Normalrichtung N und der Richtung des stärksten Anstiegs zusammenfallen, aus der Zerlegung der Grundgleichung
$$\Sigma\overline{k} = 0$$

die Gleichungen

$$K - R \sin\gamma = 0$$
$$N - G\cos\alpha = 0$$
$$R\cos\gamma - G\sin\alpha = 0\,.$$

Also

$$R\sin\gamma = K$$
$$R\cos\gamma = G\sin\alpha$$
$$N = G\cos\alpha\,.$$

Daraus folgt:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{K}{G\sin\alpha}$$
$$R = \sqrt{K^2 + G^2\sin^2\alpha}\,.$$

Die Ungleichheitsbeziehung $|R| \leq fN$ ergibt

$$K^2 + G^2\sin^2\alpha \leq \operatorname{tg}^2\varphi \cdot G^2\cos^2\alpha\,.$$

Also

$$K \leq \frac{G}{\cos\varphi}\sqrt{\sin(\varphi-\alpha)\sin(\varphi+\alpha)}\,.$$

Es muß also jedenfalls $\varphi < \alpha$ sein, damit überhaupt ein von Null verschiedenes K zulässig ist.

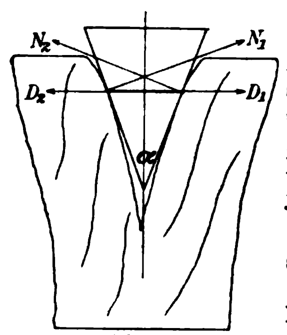


Fig. 31.

Beispiel 4. Ein symmetrischer Keil sei vertikal in einen Baumstamm eingehauen. Wann tritt Selbstsperrung ein, d. h. wann bleibt der Keil von selbst stecken? Das Gewicht des Keils werde gegen den großen Druck des gespaltenen Holzes vernachlässigt. Fassen wir auf beiden Seiten Druck und Reibung zu je einer Resultierenden zusammen: $\overline{D_1}$ und $\overline{D_2}$, so muß

$$\overline{D_1} + \overline{D_2} = 0$$

sein.

Da Symmetrie herrschen soll, müssen beide $\overline{D}$ horizontal sein. Da aber beide von den Normalrichtungen nicht mehr als um den Reibungswinkel φ abweichen dürfen, diese Normalen aber mit der Horizontalen einen Winkel gleich dem halben Keilwinkel α einschließen, so ergibt sich als Bedingung der Selbstsperrung

$$\frac{\alpha}{2} \leq \varphi\,.$$

Beispiel 5. Ein Keil vom Gewichte G stecke vertikal in einer Keilnut und werde horizontal von einer Kraft K in Richtung der Keilnut gezogen. Wann herrscht Gleichgewicht?

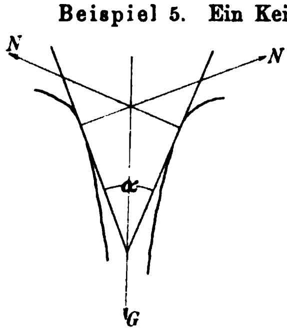


Fig. 32 a.

Es bilde die Reibung mit der Horizontalen in der Wandfläche der Nut den Winkel γ. Dann ergeben die Gleichgewichtsbedingungen

$$K = 2R\cos\gamma$$

$$G = 2N\sin\frac{\alpha}{2} + 2R\sin\gamma\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\,.$$

Also

$$2N\sin\frac{\alpha}{2} = G - 2R\sin\gamma\cos\frac{\alpha}{2}\,.$$

Das in Verbindung mit $R \leqq fN$ ergibt

$$2R\sin\frac{\alpha}{2} \leqq Gf - 2Rf\sin\gamma\cos\frac{\alpha}{2},$$

d. h.

$$2R \leqq \frac{Gf}{\sin\frac{\alpha}{2} + f\cos\frac{\alpha}{2}\sin\gamma}.$$

Aus

$$K = 2R\cos\gamma$$

folgt dann

$$K \leqq \frac{Gf\cos\gamma}{\sin\frac{\alpha}{2} + f\cos\frac{\alpha}{2}\sin\gamma}.$$

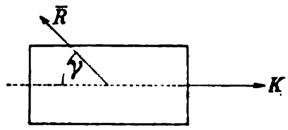


Fig. 32b.

Der Winkel γ ist dabei unbekannt. Wie groß er wirklich ist, das läßt sich mit unsern Mitteln und überhaupt mit den Mitteln der Stereomechanik nicht sagen: der Wert wird ganz davon abhängen, wie stark der Keil in die Nut eingeschlagen worden ist. Ist

$$\sin\gamma = -\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{f}$$

möglich, d. h. $\frac{\alpha}{2} \leqq \varphi$, so kann die rechte Seite unendlich werden und es ist möglich, den Keil so fest einzutreiben, daß keine horizontale Kraft K ihn fortbewegen kann.

Aufgabe 30 (Keilverbindung). Zwei Körper I und II werden durch einen Keil gegen einen horizontalen Zug S, der sie auseinanderzuziehen sucht, zusammengehalten. II drückt gegen den Keil längs AB und CD, I längs EF.

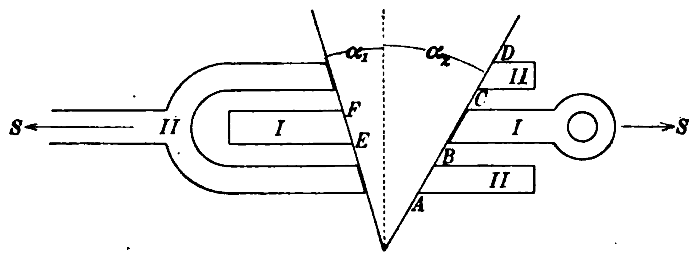


Fig. 33.

Die Winkel der Keilflächen mit der Vertikalen seien α_1 und α_2, die Reibungswinkel φ_1 und φ_2. Die Figur zeigt einen Querschnitt. Das Gewicht des Keils werde vernachlässigt. Man zeige, daß die Bedingung der Selbstsperrung lautet: $\alpha_1 + \alpha_2 \leqq \varphi_1 + \varphi_2$.

58. Reaktionskräfte und eingeprägte Kräfte. Wir haben früher bemerkt, daß zu den Ursachen der Druckkräfte in erster Linie die Deformationen der Körper zu zählen sind (siehe § 9 Nr. 39). Wenn nun wie bei starren Körpern diese Deformationen ganz oder teilweise ignoriert werden, so werden damit diejenigen Größen ganz oder teilweise unbekannt, durch welche die Druckkräfte selbst gegeben sind. Es müssen dann aber diese Druckkräfte ebenfalls ganz oder teilweise unbekannt werden; sofern sie überhaupt bestimmbar sind, berechnen sie sich erst hinterher aus den statischen Bedingungsgleichungen. So haben wir in der Tat in den vorhergehenden Beispielen Normaldruck und Reibung, d. h. den ganzen Stützdruck behandelt, und zwar nach Größe und Richtung (vgl. Nr. 57, Beispiele 3 und 5), dementsprechend, daß bei relativer Ruhe der Körper an der Berührungsstelle jede Deformation fehlt.

Soweit Normaldruck und Reibung in diesem Falle überhaupt von vornherein bedingt sind, geschieht das nur durch die Angabe, daß zwei starre Körper sich berühren. Das ist eine rein kinematische Festsetzung, d. h. eine Bestimmung über die Bewegungsmöglichkeit des Systems. Etwas anderes läßt sich gar nicht als Ursache für das Auftreten von N und R angeben.

Wir wollen nun allgemein Kräfte, die, soweit sie dadurch überhaupt bedingt sind, lediglich durch die kinematische Konstitution des Systems, d. h. durch gewisse Einschränkungen in der Bewegungsfreiheit des Systems, verursacht erscheinen, Reaktionskräfte nennen, alle anderen im Gegensatz dazu eingeprägte Kräfte.

Normaldruck und Haftreibung zwischen starren Körpern sind also Reaktionskräfte.

Reaktionskräfte sind stets bis zu einem gewissen Grade unbekannt. Sie sind für die Stereomechanik eigentlich als Hilfsgrößen anzusehen. Es ist vor allem daran festzuhalten, daß sie eigentlich in der Natur gar nicht vorkommen, sondern nur bei idealisierten, eben in ihrer Bewegungsfreiheit beschränkten Systemen.

58 a. Haftreibung als bewegungsfördernde Kraft. Ihren passiven Charakter, jede Richtung und (bis zu einer gewissen Grenze) auch jeden Wert annehmen zu können, zeigt die Haftreibung auch darin, daß sie ebensogut bewegungsfördernd auftreten kann, wie wir sie in den bisherigen Beispielen bewegungshindernd kennen lernten. Das Bewegen von Mensch und Tier, von allen Fahrzeugen auf festem Boden beruht auf ihr. Ohne Haftreibung kein Gehen, Fahren, Reiten.

Denn nach dem Schwerpunktssatze ist zur Bewegungsänderung des Massenmittelpunktes eine äußere Kraft notwendig. Auf horizontaler Strecke wenigstens kann die Schwerkraft diese Kraft nicht sein, auch andere räumlich verteilte Kräfte sind erfahrungsgemäß nicht beteiligt. Gehen wir nun die Spannungen an der Oberfläche des bewegten Objektes durch. Die Luft wird im allgemeinen eher bewegungshemmend wirken, der Normaldruck des Bodens gibt auch keine Komponente parallel zum Boden her, bleibt also nur die Reibung, die im allgemeinen trotz der Bewegung des Ganzen Haftreibung sein wird, wenn nämlich an der Berührungsstelle, wo sie wirkt, an der Schuhsohle, an den Treibrädern der Lokomotive, des Automobils, den Hufen des Pferdes kein Gleiten — kein Ausrutschen, kein Schlüpfen — stattfindet.

Daß tatsächlich die Reibung für das Fortbewegen wesentlich ist, sieht man auch daraus, daß man auf ganz glattem Boden nicht gehen kann, daß ein Eisenbahnzug auf vereisten Schienen nicht fortkommt, daß auch der Stärkste bei noch so großer innerer Muskelspannung eine eingeseifte Stange nicht hinaufklettern kann.

Als Beispiel behandeln wir die Aufgabe: Ein Automobil fährt auf ebener Straße mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einer Kurve vom Krümmungsradius ϱ. Wie groß darf die Geschwindigkeit sein, damit das Automobil nicht ausgleitet?

Nach Nr. 26 ist eine Zentripetalbeschleunigung vorhanden: $\frac{v^2}{\varrho}$, also muß auch eine entsprechende Kraft von der Größe $\frac{mv^2}{\varrho}$ wirken. Das kann nur die Haftreibung R sein. Weil sie in tangentialer Richtung zur Beschleunigung nicht gebraucht wird, kann sie ganz in der Normalrichtung verwendet werden. Nur ist sie kleiner als $f \cdot N$. Da aber bei mangelnder Vertikalbeschleunigung $N = G$ sein muß, so folgt

$$m\frac{v^2}{\varrho} \leqq f \cdot G = fmg,$$

also

$$v \leqq \sqrt{fg \cdot \varrho}$$

als Antwort auf die gestellte Frage.

Wird dagegen ein Teil R' der Reibung in tangentialer Richtung zur Beschleunigung oder zum Bremsen oder zum Überwinden von Widerständen verbraucht, so bleibt in normaler Richtung nur ein Teil R'' übrig, der gleich $\frac{mv^2}{\varrho}$ ist, und es muß

$$R \equiv \sqrt{R'^2 + R''^2} < f \cdot G$$

sein, woraus

$$v \leqq \sqrt{\frac{\varrho}{m} \cdot \sqrt{f^2 G^2 - R'^2}}$$

folgt. Diese Grenze ist kleiner als die frühere: das Automobil wird bei Beschleunigung oder beim Bremsen leichter ausgleiten als bei gleichmäßiger Fahrt.

§ 13. Gleitreibung.

59. Die Coulomb-Morinschen Gesetze. Setzt man auf einer horizontalen Fläche einen Körper in Bewegung und überläßt ihn sich selbst, so bewegt er sich eine Zeitlang in gerader Linie weiter (wenigstens im großen und ganzen), kommt aber dann zur Ruhe. Diese Erscheinung, welche die Entdeckung des Trägheitsgesetzes lange verhindert hat, können wir nach unseren Prinzipien nur so erklären, daß der Bewegung entgegen eine horizontale Kraft wirkt, die wir, da spätere Untersuchungen ergeben werden, daß der Luftdruck dazu bei weitem nicht ausreicht, als durch die Unterlage verursacht ansehen müssen.

Wir kommen so zu der Annahme, daß auf einen festen Körper, der sich auf einem andern bewegt, tangential zur Berührungsfläche, entgegen der relativen Bewegungsrichtung des Körpers eine Kraft wirke, welche wir Gleitreibung nennen und mit R bezeichnen wollen.

Außerdem wird natürlich noch im allgemeinen senkrecht zur Berührungsfläche ein Normaldruck N wirken, denn in dem zu Anfang dieser Nummer erwähnten Falle z. B. muß das Gewicht des Körpers durch eine gleich große, aufwärts wirkende Kraft aufgehoben sein, da ja vertikal keine Beschleunigung vorhanden ist.

Also auch während der Bewegung wird an der Berührungsstelle zweier fester Körper ein Stützdruck D da sein, dessen Komponente senkrecht zur Berührungsebene wir den Normaldruck N nennen, während die tangentiale Komponente R Gleitreibung heiße. Aber diese Gleitreibung zeigt einen ganz anderen Charakter als die im vorigen Paragraphen besprochene Haftreibung.

Sie hat zunächst eine ganz bestimmte Richtung: sie ist der relativen Geschwindigkeit an der Berührungsstelle entgegengesetzt gerichtet.

Aber man hat auch über ihre Größe bestimmte Gesetze aufstellen können; die noch heute meist gebrauchten stammen von Coulomb her; Morin hat sie experimentell geprüft. (Beide bekannte französische Physiker um 1800.) Man kann die Prüfung etwa so vornehmen, daß man einen Körper über den anderen hin mit einer gewissen konstanten Geschwindigkeit schleift und in die Zugleine ein Dynamometer einfügt, das direkt die Zugkraft und also, weil keine Beschleunigung stattfindet, auch die Reibung R direkt angibt.

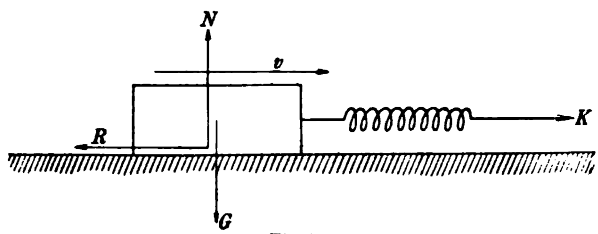


Fig. 34.

Die nach Coulomb und Morin benannten Gesetze lauten:

1. Die Reibung ist der Geschwindigkeit entgegengesetzt gerichtet.
2. Sie ist dem Normaldruck N proportional

$$R = f' N$$

und f' ist eine Materialkonstante, der Reibungskoeffizient während der Bewegung.

3. Es ist erfahrungsgemäß f' etwas kleiner als der Koeffizient f der Haftreibung.

Man kann die beiden ersten Gesetze auch so zusammenfassen, daß man schreibt:

$$\bar{R} = -\frac{\bar{v}}{v} f' N.$$

Ist die Berührung nicht einpunktig oder nicht ebenflächig, so existiert an jeder Stelle ein Normaldruck $d\bar{N}$ und eine Reibung $d\bar{R}$ und es ist

$$d\bar{R} = -\frac{\bar{v}}{v} f' dN,$$

wo $\bar{v}$ die relative Geschwindigkeit des betrachteten Körpers gegen den andern an der betreffenden Stelle bedeutet, v ihren Absolutwert.

60. Kritik der Gesetze. Trockene und Schmierreibung. Die Coulomb-Morinschen Gesetze haben sich bewährt, wenn es sich um eine Bewegung handelt, die wesentlich Translation (Parallelverschiebung) ist und mit geringer Geschwindigkeit und unter nicht zu starken Drucken stattfindet. Daß die Größe der Gleitreibung wesentlich von der Geschwindigkeit abhängt, wenn diese erheblich wird, entdeckte man zuerst an dem Bremsen der Eisenbahnräder, das ja auf der Wirkung der Gleitreibung beruht. Ältere dahin gehende Untersuchungen sind von Kirchweger angestellt worden, neuere rühren von Poirée, Douglas Galton (1878 und 1879) und Wichert her. Danach nimmt bei sogenannter trockner Reibung, d. h. wenn kein Schmiermittel angewendet wird, der Reibungskoeffizient f', definiert durch

$$R = f' N,$$

mit wachsendem v erheblich ab, von etwa 0,34 bei Stahl auf Gußeisen bis auf 0,11 bei $v = 25$ m/Sek. (Die Zahlen schwanken sehr und bedeuten Mittelwerte.)

Wenn es sich um sogenannte Schmierreibung handelt, d. h. wenn ein Schmiermittel zwischen die Körper gebracht wird, so treten wesentlich kompliziertere Verhältnisse ein. Untersucht ist bis jetzt der Fall, daß eine Welle in einem geschmierten Lager rundläuft. Ältere Versuche stammen von Hirn, Thurston, Tower u. a., die besten neuern Versuchsergebnisse sind außer denen von Dettmar (Dinglers Polyt. J. 315 und Elektrot. Zeitschr. 1899) und Lasche (Z. d. V. d. I. 1902) diejenigen von Stribeck (Zeitschr. d. Ver. Deutsch. Ing. 1902, auch Forschungsarbeiten 1903). Danach nimmt bei gegebenem N f' mit wachsendem v zunächst von einem festen, von N unabhängigen Werte f_0' ab bis zu einem Minimum, das ebenfalls von N unabhängig ist, und nimmt dann wieder zu. Mit wachsendem N werden alle Punkte gleichen f''s in der Richtung wachsenden v's verschoben. Für sehr große v wird $f'N$ nahezu von N unabhängig, d. h. f' nimmt bei großem v dem N umgekehrt proportional ab (Fig. 35).

Versuche, die Erscheinung theoretisch mit Hilfe der Mechanik der zähen Flüssigkeiten zu erklären, stammen von Osborne Reynolds, Petroff und Sommerfeld (Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 50, 1904) her. Des letzteren Theorie ergibt das charakteristische Minimum und das Kurvenstück AB sehr gut wieder; f_0' fällt wesentlich zu klein aus. Das Minimum soll nach der Theorie lediglich durch geometrische Größen gegeben, nämlich proportional dem Quotienten aus Spielraum und Zapfenradius sein. Neuere Versuche von Heimann (Z. d. V. d. I. 49, 1905) scheinen dies zu bestätigen. Versuche in dieser Richtung wären sehr wünschenswert.

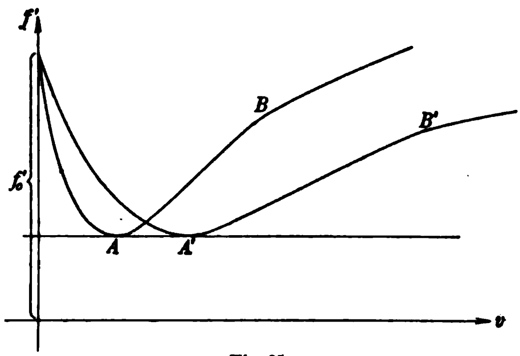


Fig. 85.

Der junge Ingenieur sei nachdrücklich auf diese Versuchsergebnisse hingewiesen. Wenn wir uns im folgenden an die Coulomb-Morinschen Gesetze halten werden und sogar meist $f' = f$ setzen, so geschieht das der Einfachheit halber. Und wir dürfen das, einmal weil es hier mehr darauf ankommt, zu lernen, mit den mechanischen Grundprinzipien umzugehen, dann aber, weil ja für gewisse, zu Anfang dieser Nummer angegebene Fälle, die Coulomb-Morinschen Gesetze vollständig ausreichen, wie neuere Experimente ergeben haben (Warburg und Babo u. a.). Doch muß noch auf eine große prinzipielle Schwierigkeit hingewiesen werden:

Besteht die Bewegung aus einer Kombination von Gleiten und Rollen, so kann direkt ein logischer Widerspruch der Coulombschen Gesetze mit der Hypothese der starren Körper nachgewiesen werden, wie Painlevé gezeigt hat. Das tritt z. B. dann ein, wenn eine kreisförmige Scheibe, deren Schwerpunkt hinreichend stark exzentrisch liegt, auf einer ebenen Unterlage rollt und gleichzeitig gleitet. Der Widerspruch läßt sich heben, entweder dadurch, daß man eine ganz andere Auffassung der Reibung eintreten läßt (Painlevé) oder dadurch, daß man die Körper als elastisch ansieht, also die Hypothese des starren Körpers aufgibt, oder dadurch, daß man annimmt, daß f' wesentlich von N abhängt (bei sehr großem N), und zwar mit unendlich wachsendem N gegen Null geht (v. Mises) oder endlich durch die Hypothese, daß in dem Widerspruchsfalle plötzlich das Gleiten aufhöre und reines Rollen eintrete, wodurch wir es sogleich mit Haftreibung zu tun bekommen. Im Resultat stimmen alle Vorschläge überein, denn auch die ersten Hypothesen ergeben ein sehr schnelles Aufhören der Gleitbewegung und erklären somit gewissermaßen die letztere, an sich etwas dogmatisch erscheinende Hypothese. Das letzte Wort ist in dieser Sache noch nicht gesprochen.[1])

1) Siehe den Enzyklopädieartikel IV 10b v. Mises; auch die Diskussion in der Zeitschr. f. Math. u. Physik, Bd. 58, 1910. Literaturzusammenstellung in Jellett, Theorie der Reibung.

61. Die Gleitreibung ist eine eingeprägte Kraft. Auf den fundamentalen Unterschied der Gleitreibung und der Haftreibung gegen Gleiten sei nachdrücklichst hingewiesen. Letztere ist bei starren Körpern zunächst gänzlich unbekannt, erstere dagegen ist der Richtung nach durch die Geschwindigkeit vollständig bestimmt und ihre Größe ist außer durch die kinematische Konstitution noch durch diejenigen physikalischen Größen mitbestimmt, von denen f' abhängt. Demnach ist die Gleitreibung eine eingeprägte Kraft und keine Reaktionskraft. Es ist ja auch, wenn Gleiten eintritt, die Deformation in der Umgebung der Berührungsstelle nicht gänzlich unerkennbar, nämlich die durch die Geschwindigkeit gegebene Verschiebung des einen Körpers gegen den andern.

Die Sache ist von wichtiger und allgemeiner Bedeutung, daß wir sie zu einem Axiom der Mechanik erheben wollen:

62. Axiomgruppe VI. Über Reaktionskräfte. Da ein freibeweglicher Punkt in seiner Lage, als auch in seiner Bewegungsmöglichkeit durch drei skalare Stücke (oder einen Vektor, etwa $d\bar{r}$) bestimmt ist, sagt man, er habe drei Freiheitsgrade.

1. Bei einem Punkte, der in seiner Bewegungsfreiheit beschränkt gedacht wird, bedingt diese Beschränkung allein schon gewisse, flächenhaft verteilte Kräfte, die wir als Reaktionskräfte bezeichnen wollen. Alle anderen Kräfte sollen eingeprägte Kräfte heißen.

2. Büßt der Punkt gegen seine Umgebung ν ($\nu = 1, 2, 3$) seiner drei Bewegungsmöglichkeiten (Freiheitsgrade) ein, so bleiben von den drei Bestimmungsstücken der gesamten auf ihn wirkenden Reaktionskraft genau ν von vornherein unbestimmt, treten also als Unbekannte in die Bewegungsgleichungen ein.

Aus diesen Axiomen folgt schon: a) die inneren Spannungen eines starren Körpers sind alle Reaktionskräfte, denn ein jeder Punkt im Innern ist gegen seine Umgebung vollständig an der Bewegung gehindert ($\nu = 3$).

b) Die Druckkräfte zwischen zwei sich berührenden Körpern sind, falls Gleiten ausgeschlossen ist, ebenfalls alle drei Reaktionskräfte ($\nu = 3$). Demnach sind Normaldruck und Haftreibung zwischen starren Körpern Reaktionskräfte.

c) Berühren sich zwei starre Körper, wird aber Gleiten als möglich zugelassen, so ist $\nu = 1$ und demnach bleibt ein Stück der Druckkraft unbekannt, während die beiden andern eindeutig durch die Berührungsbedingung gegeben sein müssen. Der Endpunkt aller möglichen Druckvektoren beschreibt also eine eindimensionale Mannigfaltigkeit. Nun ist aber die einzige, durch die Berührungsbedingung allein und eindeutig gegebene eindimensionale Mannigfaltigkeit die Grade senkrecht zur Tangentialebene: also muß die Reaktionskraft in diese Richtung fallen, während ihre Größe unbestimmt bleibt. (Der Normaldruck allein ist Reaktionskraft.)

Um auszudrücken, daß der Normaldruck stets ein Druck im engeren Sinne ist, bedürfen wir noch des Axioms:

3. Ist die Bewegungsbeschränkung einseitig, d. h. ist eine Bewegungsrichtung möglich, die entgegengesetzte aber nicht (Abheben z. B. der starren Körper ist möglich, Eindringen aber nicht), so bildet die Reaktionskraft mit der ausgezeichneten möglichen Bewegungsrichtung stets einen spitzen Winkel.

63. Der Satz vom zureichenden Grunde. Das Isotropie- und Homogenitätsprinzip des Raumes. Wir haben in der vorstehenden Begründung von einem Satze Gebrauch gemacht, den man den Satz des zureichenden Grundes nennt. Dieser besagt Folgendes: Wenn man weiß, daß eine gesuchte Mannigfaltigkeit bestimmter Dimension ν ausschließlich und eindeutig durch eine Gesamtheit anderer Größen bestimmt ist und diese Gesamtheit eine einzige ausgezeichnete Mannigfaltigkeit ν ter Dimension bestimmt, so ist die gesuchte Mannigfaltigkeit mit dieser identisch.

Dieser Schluß ist zweifellos exakt. Ist also im vorhergehenden durch die Gesamtheit der möglichen Bewegungsrichtungen des Punktes, wenn er gezwungen ist, eine Fläche zu berühren, wirklich die normale Gerade als die einzige ausgezeichnete Mannigfaltigkeit erster Dimension hervorgehoben, wie wir angenommen haben?

Streng genommen nicht. Denn man könnte ja z. B. festsetzen, daß man als ausgezeichnete Mannigfaltigkeit die Gerade wähle, welche den Winkel zwischen der Normalen und der Verbindungslinie unseres Punktes mit einem im Weltall ein für allemal festgewählten Punkte halbiert.

Um den Schluß streng zu machen, bedarf es noch der Hinzunahme des folgenden Prinzips:

Bestimmt eine Mannigfaltigkeit von Größen eindeutig und allein eine andere, und gestattet erstere Mannigfaltigkeit eine Drehung oder Verschiebung, welche sie im ganzen ungeändert läßt (in sich transformiert), so muß diese selbe Drehung oder Verschiebung auch die bestimmte Mannigfaltigkeit ungeändert lassen.

Dadurch ist nun offenbar die Normale zur Reibungsfläche wirklich eindeutig ausgezeichnet. Denn die erlaubten Bewegungsrichtungen des Punktes gestatten eine Drehung um die Normale, und die einzige eindimensionale Mannigfaltigkeit, welche ebenfalls diese Drehung gestattet, ist die Normale selbst.

Das neu hinzugekommene Prinzip ist aber ein Teil eines allgemeinen Prinzips, das man so aussprechen kann:

„Alle Naturerscheinungen sind von der Orientierung und der Lage im Raume unabhängig“ oder

„Der Raum ist isotrop und homogen", d. h. alle Richtungen und alle Stellen des Raumes sind einander gleichwertig.

Dieses Prinzip sagt auch noch, daß der Raum an sich nicht Ursache irgendeiner Erscheinung sein kann (vgl. § 1, 3).

64. Beispiele und Aufgaben.

1. Man studiere die Bewegung auf der Geraden stärksten Abfalles einer schiefen Ebene unter Einwirkung der Reibung und der Schwere. Man hat zwei Fälle zu unterscheiden: a) die Geschwindigkeit sei abwärts gerichtet: $v > 0$. Dann ergibt sich durch Zerlegung in Komponenten parallel und senkrecht zur schiefen Ebene

$$m\frac{dv}{dt} = mg\sin\alpha - R$$

$$0 = mg\cos\alpha - N.$$

Also

$$N = mg\cos\alpha \text{ und}$$

$$R = f'N = \operatorname{tg}\varphi' mg\cos\alpha,$$

somit

$$\frac{dv}{dt} = g(\sin\alpha - \cos\alpha\operatorname{tg}\varphi') = g\frac{\sin(\alpha - \varphi')}{\cos\varphi'}.$$

Ist $\alpha > \varphi'$, so ist die Bewegung wirklich beschleunigt, andernfalls verzögert. Für den speziellen Fall $\alpha = \varphi'$ tritt eine gleichförmige Bewegung ein.

b) Die Geschwindigkeit sei aufwärts gerichtet: $v < 0$. Dann ändert R sein Vorzeichen, sonst bleibt alles dasselbe und man erhält:

$$\frac{dv}{dt} = g\frac{\sin(\alpha + \varphi')}{\cos\varphi'}.$$

Die Bewegung ist auf jeden Fall verzögert. Man kann zeigen, daß

$$\lim_{v=0}(\varphi') \leq \varphi$$

sein muß. Denn sei im andern Fall

$$\lim_{v=0}\varphi' > \alpha > \varphi,$$

so kommt in beiden Fällen der Punkt einmal zur Ruhe. Dann kann er einerseits nicht in Ruhe bleiben, weil $\alpha > \varphi$ ist, anderseits kann er nicht abwärts gleiten, weil sofort eine aufwärts gerichtete Beschleunigung eintreten würde infolge $\alpha < \varphi'$. Aufwärts kann er natürlich auch nicht gleiten.

Aufgabe 31. Man löse dieselbe Aufgabe, wenn noch eine unter dem Winkel ε gegen die schiefe Ebene geneigte Kraft k hinzutritt.

Beispiel 2. Welche Kraft k ist notwendig, um einen Keil vom Gewicht G in einer horizontalen Nut vom Winkel 2α mit konstanter Geschwindigkeit vorwärts zu ziehen?

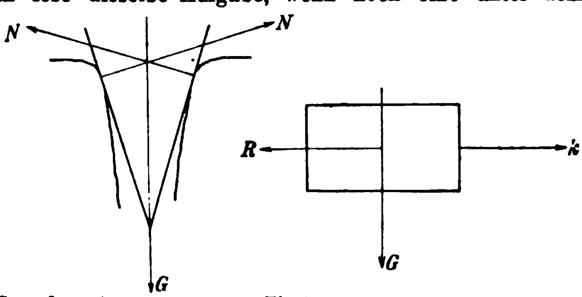


Fig. 36.

Die Zerlegung des Grundgesetzes

$$m\bar{w} = \Sigma\bar{k}$$

nach horizontaler und vertikaler Richtung ergibt

$$0 = k - 2R$$
$$0 = G - 2N \sin\alpha .$$

Also, da $R = Nf$ ist,

$$k = \frac{fG}{\sin\alpha} .$$

Die Kraft ist um so größer, je spitzer der Keil ist. Darin liegt die Begründung dafür, daß die Reibung bei zwei Holzstücken, deren Fasern parallel liegen, wesentlich größer ist bei denselben Holzstücken, wenn ihre Fasern gekreuzt sind.

Beispiel 3. Zwei parallele, um den Winkel α gegen den Horizont geneigte zylinderförmige Walzen drehen sich gegeneinander mit der Umfangsgeschwindigkeit c. Quer zu ihnen und auf ihnen liegt horizontal und symmetrisch ein eckiger Balken vom Gewicht G. Kann bei hinreichend kleinem α der Balken liegen bleiben? Nein. Denn dann wäre die Reibung als Gleitreibung quer und horizontal gerichtet und könnte der abwärts geneigten Komponente $G \sin\alpha$ der Schwerkraft nicht das Gleichgewicht halten.

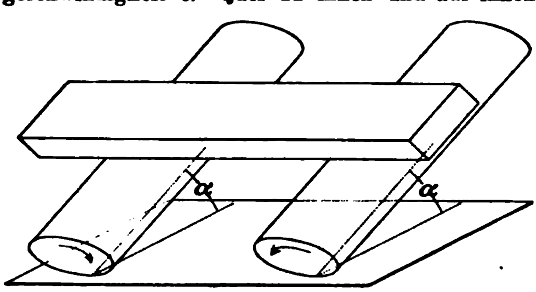


Fig. 37a.

Wie bewegt sich also der quergelegte Balken abwärts? Sei seine augenblickliche Geschwindigkeit v, so ist die relative Geschwindigkeit des Balkens gegen die Unterlage die Resultierende aus v und c, welche um den Winkel β gegen die Richtung von v abweiche. Also werden wir bekommen

$$m\frac{dv}{dt} = G \sin\alpha - 2R\cos\beta$$
$$2R = 2Nf = G\cos\alpha f$$
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{c}{v} .$$

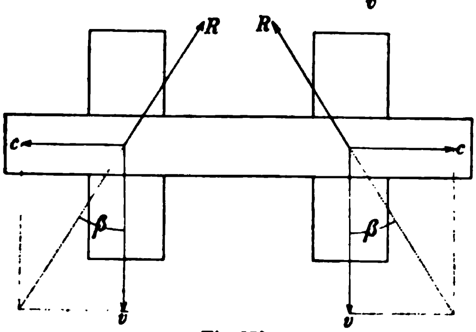


Fig. 37b.

Elimination von R und β gibt vermöge

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta}}$$

die Differentialgleichung für v

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\alpha - g\cos\alpha f \cdot \frac{v}{\sqrt{v^2 + c^2}} ,$$

woraus folgt

$$t = \frac{1}{g}\int \frac{\sqrt{v^2 + c^2}\,dv}{\sin\alpha\sqrt{v^2 + c^2} - \cos\alpha f \cdot v} .$$

Der Leser möge die Integration, die mit elementaren Mitteln durchführbar ist, selbst leisten.

Wir erkennen nochmals aus der Differentialgleichung, daß $v = 0$ unmöglich ist.

So klein also auch α und so klein auch c sein mag, der Balken muß heruntergleiten.

Dieses Beispiel, das aus A. Ritters Techn. Mechanik entnommen ist, zeigt, daß kleine Zusatzbewegungen die Haltfähigkeit der Haftreibung unter Umständen ganz vernichten können. Darauf beruht die Unsicherheit aller durch Reibung bewirkten Befestigungen gegen Erschütterungen.

Aufgabe 32. Man zeige in dem vorhergehenden Beispiel, daß, wenn $\alpha \geq \varphi$ ist, v mit wachsender Zeit über alle Grenzen geht, daß dagegen, wenn $\alpha < \varphi$ ist und $\operatorname{tg}\alpha = \lambda f$ gesetzt wird, wo $\lambda < 1$, eine kritische Geschwindigkeit

$$v_k = c\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}$$

existiert, derart, daß diese Geschwindigkeit, wenn sie einmal vorhanden war, andauert, und daß sich v in jedem andern Fall mit wachsender Zeit dieser kritischen Geschwindigkeit asymptotisch annähert. (Man vgl. Nr. 70 und 71.)

Beispiel 4. Man diskutiere die allgemeine Bewegung auf einer schiefen Ebene, welche unter der Einwirkung der Schwerkraft und der Reibung möglich ist.

In solchen Aufgaben, wie der hier gestellten, wo konstante Kräfte und solche auftreten, die der Geschwindigkeit entgegengerichtet sind, empfiehlt sich eine Zerlegung der Gleichung

$$m\bar{w} = \Sigma\bar{k}$$

nach dem sogenannten natürlichen Koordinatensystem der Bahnkurve, d. h. nach Tangente und Normale der Bahn (siehe Nr. 26).

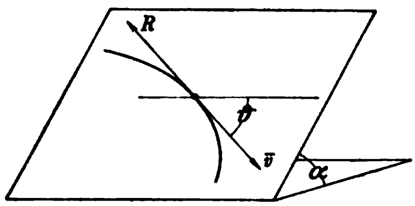


Fig. 38.

Sei ϑ der spitze Winkel, welchen die Bewegungsrichtung $\bar{v}$ mit der Horizontalen auf der schiefen Ebene einschließt, so lauten die Bewegungsgleichungen

$$m\frac{dv}{dt} = mg\sin\alpha\sin\vartheta - R \tag{1}$$

$$m\frac{v^2}{\varrho} = mg\sin\alpha\cos\vartheta \tag{2}$$

$$0 = N - mg\cos\alpha, \tag{3}$$

wobei ϱ den stets positiv zu zählenden Krümmungsradius der Bahn bedeutet.

Da nun die Schwerkraftkomponente $mg\sin\alpha$ stets abwärts geneigt ist, so ist die Bahnkurve stets nach unten konkav und somit ist sicher

$$\frac{d\vartheta}{dt} > 0. \tag{I}$$

Da ferner $d\vartheta$ der Kontingenzwinkel zweier benachbarter Bahntangenten ist, so folgt

$$\frac{1}{\varrho} = +\frac{d\vartheta}{ds},$$

wenn wir ds im Sinne der Bewegung positiv zählen, oder

$$\frac{1}{\varrho} = +\frac{1}{v}\cdot\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Zusammen mit $R = Nf$ wird sonach aus den Gleichungen (1) und (2)

$$\frac{dv}{dt} = g \sin\alpha \sin\vartheta - gf\cos\alpha \tag{1'}$$

und

$$v\frac{d\vartheta}{dt} = g\sin\alpha\cdot\cos\vartheta. \tag{2'}$$

Führen wir ϑ als unabhängige Variable ein, so folgt durch Division von (1') durch (2')

$$\frac{1}{v}\,dv = \frac{-\cos\alpha\cdot f + \sin\alpha\cdot\sin\vartheta}{\sin\alpha\cdot\cos\vartheta}\,d\vartheta$$

und daraus durch Integration

$$\lg v - \lg v_0 = \operatorname{ctg}\alpha\cdot f\cdot\lg\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right) - \lg\cos\vartheta.$$

$v = v_0$ entspricht der Neigung $\vartheta = 0$.

Setzen wir $f = \lambda\cdot\operatorname{tg}\alpha$, so folgt

$$v = v_0\cdot\frac{\operatorname{ctg}^{\lambda}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right)}{\cos\vartheta}. \tag{II}$$

Wenn ϑ sich dem Werte $\frac{\pi}{2}$ nähert, so werden Zähler und Nenner dieses Ausdrucks Null.

a) Ist $\lambda < 1$, d. h. $\varphi < \alpha$, so wird

$$\lim_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} v = \infty,$$

da in (II) der Zähler von niederer Ordnung Null wird als der Nenner.

b) Ist $\lambda > 1$, d. h. $\varphi > \alpha$, so wird

$$\lim_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} v = 0,$$

da in (II) der Zähler von höherer Ordnung Null wird als der Nenner.

c) Ist $\lambda = 1$, d. h. $\alpha = \varphi$, so wird

$$\lim_{\vartheta=\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right)}{\cos\vartheta} = \frac{1}{2}$$

und somit

$$\lim_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} v = \frac{1}{2}v_0.$$

Um die zugehörige Zeit zu berechnen, gehen wir auf (2') zurück, woraus wir erhalten

$$t = \frac{1}{g\sin\alpha}\int v\,\frac{d\vartheta}{\cos\vartheta}$$

oder unter Benutzung von (II)

$$t = \frac{v_0}{g\sin\alpha}\int_0^{\vartheta}\frac{\operatorname{ctg}^{\lambda}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right)}{\cos^2\vartheta}\,d\vartheta.$$

(Wir wollen $t = 0$ für $\vartheta = 0$ annehmen.)

Man kann auch dieses Integral ausrechnen. Setzt man

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right)=z,$$

so wird

$$dz=-\frac{1}{2}\frac{d\vartheta}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right)}=-\frac{1}{2}d\vartheta\,(1+z^2) \text{ und } \cos^2\vartheta=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\vartheta\right)$$

$$=4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right)=\frac{4z^2}{(1+z^2)^2}.$$

Somit wird

$$t=-\frac{v_0}{g\sin\alpha}\,\frac{1}{2}\int_1^z z^{\lambda-2}(1+z^2)\,dz=-\frac{1}{2}\,\frac{v_0}{g\sin\alpha}\left[+\frac{1}{\lambda-1}z^{\lambda-1}+\frac{1}{\lambda+1}z^{\lambda+1}\right]_1^z,$$

wenn $\lambda \neq 1$ ist, wenn aber $\lambda=1$ ist, so wird

$$t=-\frac{1}{2}\,\frac{v_0}{g\sin\alpha}\left[\lg z+\frac{1}{2}z^2\right]_1^z.$$

Man sieht daraus, weil $z=0$ für $\vartheta=\frac{\pi}{2}$, daß im Falle (a), wo $\alpha>\varphi$ war und $\lambda<1$,

$$\lim_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} t=\infty,$$

im Falle (b), wo $\alpha<\varphi$ war und $\lambda>1$

$$\lim_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} t=\frac{v_0}{g\sin\alpha}\cdot\frac{\lambda}{\lambda^2-1},$$

im Falle (c), wo $\alpha=\varphi$ und $\lambda=1$

$$\lim_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} t=\infty$$

wird.

Berechnen wir endlich noch die horizontale Komponente x des Ortes unseres Punktes, so ergibt sich aus

$$dx=ds\cos\vartheta$$

$$\frac{dx}{d\vartheta}=\frac{v}{\frac{d\vartheta}{dt}}\cos\vartheta$$

und aus (2')

$$\frac{dx}{d\vartheta}=\frac{v^2}{g\sin\alpha}$$

somit x, wenn wir es ebenfalls von $\vartheta=0$ an zählen,

$$x=\frac{1}{g\sin\alpha}\int_0^\vartheta v^2\,d\vartheta$$

$$x=\frac{v_0^2}{g\sin\alpha}\cdot\int_0^\vartheta\frac{\operatorname{ctg}^{2\lambda}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right)}{\cos^2\vartheta}\,d\vartheta$$

Durch Einführung von z wird aus diesem Integral

$$x = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g\sin\alpha}\int_1^z z^{2\lambda-2}(1+z^2)\,dz$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g\sin\alpha}\left[\frac{1}{2\lambda-1}z^{2\lambda-1}+\frac{1}{2\lambda+1}z^{2\lambda+1}\right]_1^z$$

außer für $2\lambda - 1 = 0$.

Für $\lambda = \frac{1}{2}$ wird

$$x = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g\sin\alpha}\left[\lg z + \frac{1}{2}z^2\right]_1^z .$$

Daraus folgt:

(a') für $\lambda < \frac{1}{2}$, d. h. $\operatorname{tg}\alpha > 2\operatorname{tg}\varphi$ wird

$$\lim_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} x = \infty$$

(b') für $\lambda > \frac{1}{2}$, d. h. $\operatorname{tg}\alpha < 2\operatorname{tg}\varphi$ wird

$$\lim_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} x = \frac{2\lambda v_0^2}{g\sin\alpha(4\lambda^2-1)}$$

(c') für $\lambda = \frac{1}{2}$, d. h. $\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\varphi$ wird

$$\lim_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} x = \infty .$$

Fassen wir die Resultate in folgende Tabelle zusammen:

lim	$0<\lambda\leq\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}<\lambda<1$	$\lambda=1$	$\lambda>1$
$\vartheta =$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$v =$	∞	∞	$\frac{1}{2}v_0$	0
$t =$	∞	∞	∞	endlich
$x =$	∞	endlich	endlich	endlich

Daraus folgt: 1. für die sehr steile schiefe Ebene, $\operatorname{tg}\alpha \geq 2\operatorname{tg}\varphi$ wächst die Geschwindigkeit und die seitliche Entfernung mit wachsender Zeit ins Unendliche.

2. Für die mittelsteile Ebene, $\operatorname{tg}\varphi < \operatorname{tg}\alpha < 2\operatorname{tg}\varphi$ wächst zwar die Geschwindigkeit noch mit der Zeit ins Unendliche, aber die seitliche Entfernung ist begrenzt: die Bahn besitzt eine Asymptote in der Richtung steilsten Abfalls der schiefen Ebene.

3. In dem Grenzfalle $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi$ nähert sich die Bewegung asymptotisch einer gleichförmig abwärts gerichteten Bewegung.

4. Für die flache schiefe Ebene $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\varphi$ bleibt der Körper nach endlicher Zeit stecken. Die Endtangente der Bahn ist vertikal abwärts gerichtet.

Man beachte übrigens, daß man diese Diskussion durchführen kann, ohne die Integrale wirklich auszurechnen. Denn es ist bekannt, daß wenn

$$\lim_{x=0} \frac{\varphi(x)}{x^k} \text{ für } k > 0$$

gleich einer bestimmten, von Null verschiedenen Zahl ist und $\varphi(x)$ sonst in dem endlichen Integrationsintervall nicht verschwindet, $\int_a^0 \frac{dx}{\varphi(x)}$ endlich bleibt, wenn $k < 1$ ist, dagegen unendlich wird, wenn $k \geq 1$ ist.

Beispiel 5. Schwingung mit Reibung. Ein Körper schwinge auf einer horizontalen Fläche in einer Geraden unter der Wirkung der Reibung und einer in Richtung der Geraden wirkenden Kraft, welche dem Hookeschen Gesetze gehorcht (siehe Nr. 35 und 46). Man kann sich etwa den Körper zwischen zwei Federn gespannt denken.

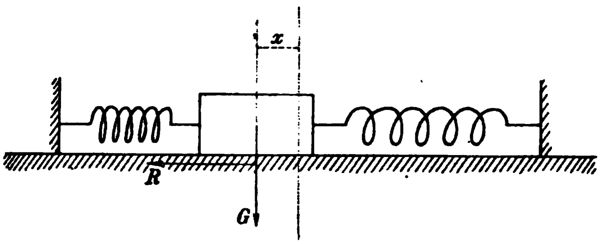


Fig. 39.

Sei x die Elongation aus der Ruhelage, so wirkt die Kraft

$$k = -\lambda x$$

in Richtung wachsenden x.

Die im gleichen Sinne positiv gezählte Reibung ist $R = \pm f \cdot N = \pm fmg$, wenn Bewegung stattfindet, dagegen unbekannt und durch $|R| \leq fmg$ eingeschränkt, wenn Ruhe herrscht.

Lösen wir erst das statische Problem.

Dann muß

$$R + k = 0$$

sein, d. h.

$$R = -k = \lambda x.$$

$|R| \leq fmg$ gibt

$$\lambda |x| \leq fmg,$$

d. h.

$$|x| \leq \frac{fmg}{\lambda},$$

wofür wir zur Abkürzung

$$|x| \leq e$$

schreiben wollen.

Ruhe ist also möglich in dem Gebiete

$$-e \leq x \leq e.$$

Nun gehen wir zu dem Bewegungsproblem über.

Wir müssen zwei Fälle unterscheiden:

a) den Hingang: $v > 0$. Dann ist $R = -fmg$ und wir bekommen die Bewegungsgleichung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda x - fmg.$$

Diese Differentialgleichung hat die partikulare Lösung

$$x = -\frac{fmg}{\lambda} = -e.$$

Die allgemeine erhalten wir, wenn wir setzen

$$x = -e + y,$$

wodurch wir für y die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + \alpha^2 y = 0$$

erhalten, wenn wir wie früher

$$\alpha^2 = \frac{\lambda}{m}$$

einführen.

Es ist dann

$$y = a\sin(\alpha t + \varepsilon)$$

und somit für den Hingang

$$x = -e + a\sin(\alpha t + \varepsilon).$$

Das bedeutet aber eine um e nach der Seite negativer x verschobene harmonische Schwingung.

b) den Rückgang: $v < 0$. Dann ist $R = fmg$. Die Differentialgleichung lautet

$$m\ddot{x} = -\lambda x + fmg.$$

Vertauscht hat sich gegen vorhin nur das Zeichen von f, also lautet die allgemeine Lösung für den Rückgang:

$$x = +e + a'\sin(\alpha t + \varepsilon').$$

Das ist aber eine um e nach der Seite positiver x verschobene harmonische Schwingung.

Diskussion der Bewegung.

Zunächst ist folgendes zu beachten: Zwischen jedem Hin- und Rückgang wird einmal $v = 0$. Wenn dann $|x| < e$ ist, so wird der Körper stecken bleiben, da ja jetzt die Gesetze der Ruhe anzuwenden sind. Wenn aber $|x| > e$ ist, so wird eine Umkehr der Bewegung stattfinden. Es werden sich also zwei Bewegungen a) und b) zusammensetzen und natürlich mit stetigem x und $\dot{x}$.

Es beginne etwa die Bewegung zur Zeit $t = 0$ mit der Amplitude $-x_0$, wo $x_0 > e$ sei, und der Geschwindigkeit Null. Dann wird zunächst ein Hingang stattfinden, für den $\varepsilon = -\frac{\pi}{2}$, $a + e = x_0$, d. h. $a = x_0 - e$ sein wird.

Für $0 \leqq t \leqq \frac{\tau}{2}$ $\left(\text{wo } \tau = \frac{2\pi}{\alpha}\right)$ wird also sein

$$x = -e - (x_0 - e) \cos \alpha t.$$

Das ist ein reiner Sinusbogen um die Ruhelage $x = -e$ mit der Amplitude $x_0 - e$.

Für $t = \frac{\tau}{2}$ wird sein

$$x = x_1 = x_0 - 2e.$$

Folglich wird für den nun ansetzenden Rückgang, d. h. für $\frac{\tau}{2} \leqq t \leqq \tau$ sein:

$$x = e - (x_0 - 3e) \cos \alpha t,$$

damit für $t = \frac{\tau}{2}$, d. h. $\cos \alpha t = -1$ die Amplitude $e + (x_0 - 3e) = x_0 - 2e$ wird.

Der Rückgang wird also ein Sinusbogen um die Ruhelage $x = +e$ mit der Amplitude $x_0 - 3e$ sein. Für $t = \tau$ wird sein

$$x = e - (x_0 - 3e) = -x_0 + 4e.$$

Ist $+x_0 - 4e$ noch größer als e, so schließt sich jetzt eine Schwingung an, die durch

$$x = -e - (x_0 - 5e) \cos \alpha t$$

gegeben ist.

So geht das weiter. Die Maxima und Minima von x sind absolut genommen

$$x_0, \; x_0 - 2e, \; x_0 - 4e, \text{ usw.}$$

Es wird nun einmal vorkommen müssen, daß ein Maximum absolut genommen kleiner wie e sein wird, während das vorhergehende noch

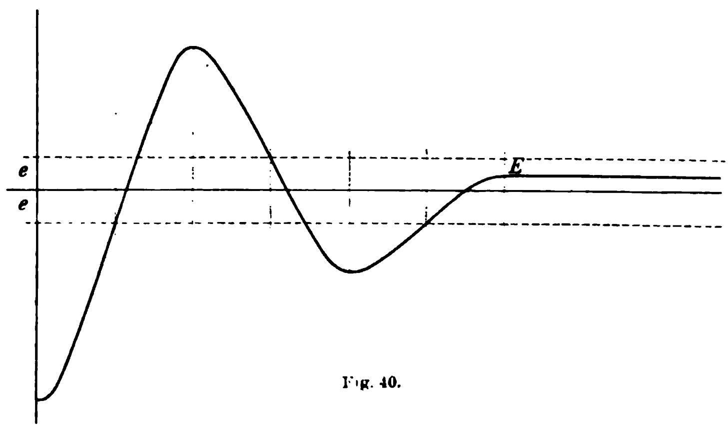


Fig. 40.

größer war. In diesem Moment wird dann der Punkt stecken bleiben müssen. In der Figur findet dies im Punkte E statt, also nach drei halben Schwingungen.

Allgemein kommt also der Körper nach einer endlichen Anzahl von Schwingungen zur Ruhe.

Wir haben hier einmal ein Beispiel eines unstetigen Kraftfeldes, das stets dann auftreten wird, wenn bei Vorhandensein von Gleitreibung ein Wechsel der Bewegungsrichtung eintritt. Diese Probleme haben praktische Bedeutung für die Regulatortheorie.[1])

Aufgabe 33. In einer Röhre, die mit der gegebenen konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um eine zu ihr senkrechte Achse rotiert, befinde sich ein Punkt der Masse m. Nach welchem Gesetz wird der Punkt heraus geschleudert, wenn man a) die Reibung vernachlässigt, b) die Reibung mit berücksichtigt? (Man benutze die in Nr. 31 gegebene Darstellung von $\bar{w}$!) Von der Schwerkraft werde abgesehen.

34. Welche Gestalt muß eine in einer vertikalen Ebene gelegene Kurve C haben, damit ein längs derselben ohne Reibung unter dem Einfluß der Schwerkraft herabgleitender Punkt in gleichen Zeiten gleiche Höhen zurücklegt?

34a. Warum kann man auf einer schiefen Ebene einen Körper nicht durch eine in ihr gelegene horizontale Kraft horizontal fortbewegen? Welche Richtung muß vielmehr die dazu erforderliche Kraft haben?

§ 14. Der masselose, vollkommen biegsame, unausdehnbare Faden.

65. Theorie des Fadens. Sehr häufig verknüpft man zwei feste Körper durch einen gespannten Faden, dessen Masse gegenüber derjenigen der festen Körper sehr gering ist, dessen Ausdehnung nicht beobachtbar ist und der sich, wie man sagt, sehr leicht biegen läßt. Wir idealisieren diesen Fall dahin, daß wir den Faden als masselos, unausdehnbar und vollkommen biegsam voraussetzen.

Was masselos und unausdehnbar heißen soll, ist klar. Aus der Unausdehnbarkeit folgt nun schon, nach den Axiomen von Nr. 62, daß dieser Faden auf jeden der beiden Körper eine Reaktionskraft ausüben kann, welche stets ein Zug ist. Denn jeder Körper wird relativ zum andern um einen Freiheitsgrad in seinen Bewegungsrichtungen gehindert und die einzig ausgezeichnete Richtung ist die des Fadens.

Vollkommen biegsam soll nun heißen, daß außer diesem Zug der gespannte Faden keine andere Kraft auf die durch ihn verbundenen Körper ausüben kann. Diese Definition werden wir später genauer untersuchen (siehe § 36).

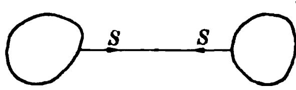


Fig. 41.

Nach dem Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung erfährt der Faden von den angehängten Körpern die entgegengesetzt gleichen Spannungen. Wendet man nun auf den ganzen Faden den

1) Siehe den Aufsatz des Herrn v. Mises: „Zur Theorie der Regulatoren", Elektrotechnik und Maschinenbau 1908.

Schwerpunktssatz an und bedenkt, daß er keine Masse hat, also auch kein Gewicht, so folgt, daß die beiden Spannungen, welche der Faden auf die Körper ausübt, entgegengesetzt gleich sein müssen. Denn sie würden dem Faden sonst eine unendliche Beschleunigung erteilen.

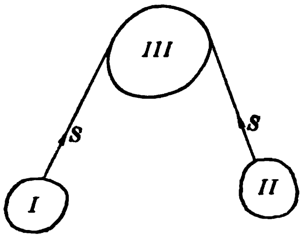


Fig. 42.

Um eine größere Auswahl an Übungsaufgaben zu haben, machen wir die später (Nr. 180) zu begründende Annahme, daß der zwischen den Körpern I und II gespannte Faden auch dann noch auf beide denselben Zug ausübt, wenn er dazwischen über einen vollkommen glatten Körper III geleitet wird.

66. Kleine Schwingungen des mathematischen Pendels. Wir hängen einen kleinen Körper durch einen Faden der in der vorigen Nummer besprochenen idealen Art an einem festen Punkte O auf und lassen ihn unter Einwirkung der Schwerkraft in einer Ebene schwingen.

Der Ausschlagwinkel aus der vertikalen Ruhelage sei ϑ, S die Fadenspannung, l die Länge des Fadens.

Die Bahn des Punktes wird eine Kreisbahn sein.

Zerlegen wir die Beschleunigung und die Kräfte in eine tangentiale und eine zentripetale Komponente, so erhalten wir aus dem Newtonschen Grundgesetz nach Nr. 25

$$ml\ddot{\vartheta} = -mg\sin\vartheta$$

$$ml\dot{\vartheta}^2 = -mg\cos\vartheta + S.$$

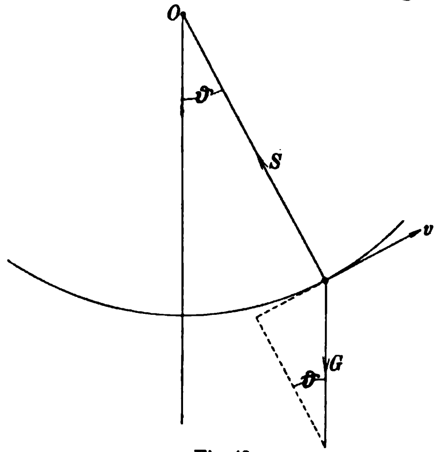


Fig. 43.

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich sofort die unbekannte Fadenspannung

$$S = mg\cos\vartheta + ml\dot{\vartheta}^2.$$

Sie berechnet sich genau so, als hätten wir ein statisches Problem und als wirkte außer der Schwerkraft noch eine nach außen wirkende Kraft von der Größe $ml\dot{\vartheta}^2$. Man nennt diese Scheinkraft oft Zentrifugalkraft. Es ist aber zu bemerken, daß dies in Wahrheit gar keine Kraft ist. Es ist ein Glied massenkinematischen Ursprungs.

Die erste Gleichung, die wir auch schreiben können

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{l}\sin\vartheta = 0$$

stellt die Differentialgleichung der Bewegung dar.

Machen wir nun die Annahme, daß ϑ dauernd klein sei, so können wir angenähert ϑ statt $\sin\vartheta$ setzen und erhalten mit der Abkürzung

$$\alpha^2 = \frac{g}{l}$$

die Gleichung

$$\ddot{\vartheta} + \alpha^2\vartheta = 0,$$

d. h. die Differentialgleichung der harmonischen Bewegung. Das Integral ist

$$\vartheta = \vartheta_0 \cdot \sin(\alpha t + \varepsilon),$$

wo ϑ_0, eine Integrationskonstante, den maximalen Ausschlagwinkel bedeutet.

Bei kleiner Amplitude ist also die Bewegung dieses sogenannten mathematischen Pendels eine harmonische Schwingung von der Periode

$$\tau = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Die Theorie der endlichen Schwingungen bringen wir in Nr. 92. Das mathematische Pendel ist zusammen mit dem später (Nr. 195) zu besprechenden physischen Pendel das beste Mittel, g zu bestimmen. Denn man kann l leicht messen und τ gut beobachten, somit g aus der vorstehenden Formel berechnen.

Aufgabe 35. Man berechne die Länge des Sekundenpendels für $g = 9{,}81$ m, d. h. l für $\frac{\tau}{2} = 1$ Sek.

67. Weitere Beispiele und Aufgaben.

1. Der einfachste Fall der Atwoodschen Fallmaschine. Über eine vertikale, vollkommen glatte, feste Scheibe sei eine ideale Schnur gelegt, die an den Enden Gewichte G und G' trage. Es sei $G > G'$, so daß G zu Boden sinken, G' entsprechend steigen wird.

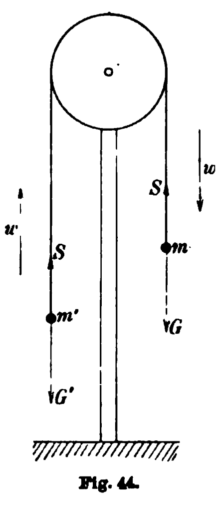


Fig. 44.

Es habe G die Beschleunigung w abwärts, so hat G' dieselbe Beschleunigung aufwärts, weil der Faden unausdehnbar ist. Die Fadenspannung sei S.

Dann gibt die Newtonsche Grundgleichung für jeden Punkt angewendet

$$mw = mg - S$$
$$m'w = -m'g + S.$$

Addition beider Gleichungen gibt

$$w = \frac{m - m'}{m + m'}g.$$

Die Beschleunigung ist also konstant, aber nur gleich dem echten Bruch $\frac{m - m'}{m + m'}$ von g. Weil so die Bewegung wesentlich langsamer wird, kann man sie besser beobachten. Darauf beruht die Verwendung des Apparates zur Messung von g.

Die Fadenspannung S berechnet sich dann aus einer der beiden obigen Gleichungen zu

$$S = g\frac{2mm'}{m+m'} = \frac{2GG'}{G+G'}.$$

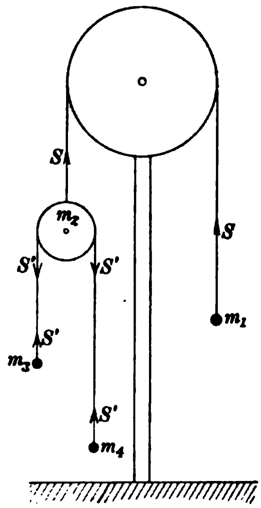


Fig. 45.

Aufgabe 36. Vier Massen, von denen m_2 eine ganz glatte Scheibe sei, seien durch zwei Idealfäden zu einer doppelten Atwoodschen Fallmaschine verknüpft, wie in der Figur angegeben. Wie wird sich das System bewegen? (Routh).

Man beachte, daß auf m_2 außer dem Gewicht G_2 die Spannung S des ersten Fadens nach oben und die Spannung S' des zweiten Fadens doppelt nach unten zieht.

Es empfiehlt sich, die Beschleunigung w der Masse m_1 und die relative Beschleunigung w' der Masse m_4 gegen m_2 einzuführen.

Insbesondere behandele man den Fall, daß

$$m_1 = m_2 + m_3 + m_4,$$

aber

$$m_4 > m_3$$

sei.

Aufgabe 37. Ein auf einer horizontalen Platte bewegliches Gewicht G werde durch ein anderes Gewicht G' gezogen, das durch einen über die vollkommen glatte Scheibe O gespannten Idealfaden mit ihm verbunden ist. a) Wann ist Gleichgewicht vorhanden? b) Wie bewegt sich das System? (mit Berücksichtigung der Reibung des ersten Körpers an der Unterlage).

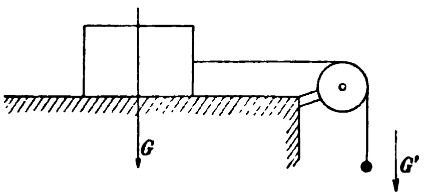


Fig. 46.

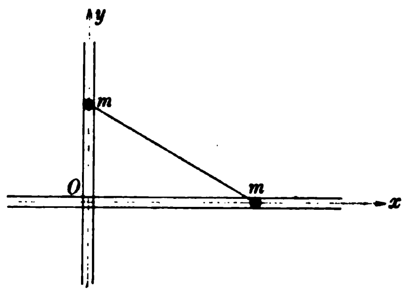


Fig. 47.

Aufgabe 38. Ein Punkt der Masse m sei auf einer horizontalen Bahn Ox beweglich, ein zweiter Punkt derselben Masse auf einer vertikalen Bahn Oy. Die Punkte mögen durch feste Wände gezwungen sein, auf diesen Bahnen zu bleiben. Außerdem aber seien sie durch einen Idealfaden miteinander verbunden. Wie bewegen sich beide Punkte, wenn von Gewicht und Reibung abgesehen wird? Es empfiehlt sich, die Koordinaten x und y der Punkte durch den variabeln Winkel φ auszudrücken, den der Faden der Länge l mit der x-Achse einschließt.

Wie ändert sich das Resultat, wenn die Schwerkraft mit berücksichtigt wird? Besonders untersuche man alsdann die kleinen Schwingungen um die Gleichgewichtslage.

2. Das sphärische Pendel: Ein Massenpunkt sei durch einen idealen Faden mit einem festen Punkt O verknüpft und stehe unter

dem Einfluß der Schwerkraft. Welches wird seine **allgemeine** Bewegung sein?

Es sei ϑ der Winkel, den der Faden mit der nach abwärts gerichteten Vertikalen einschließt, φ der Winkel, den die vertikale Ebene durch den Faden mit einer irgendwie festgewählten vertikalen Ebene einschließt.

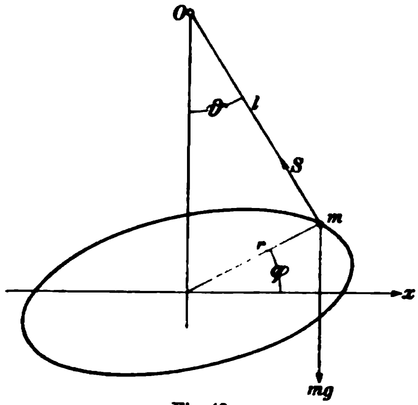


Fig. 48.

Führen wir nun zur Beschreibung der Bewegung die sogenannten Zylinderkoordinaten ein:

$$r = l \sin \vartheta,$$

d. h. den Abstand des Punktes m von der Vertikalen,

den Winkel φ

und die Tiefe $z = l \cos \vartheta$ des Punktes m unter dem festen Punkte O.

Zerlegen wir dann die Newtonsche Grundgleichung nach den entsprechenden drei Richtungen (Richtung von r, von z und der wachsenden φ's), so erhalten wir nach Nr. 27 mit $\omega = \dot{\varphi}$

$$m(\ddot{r} - r\omega^2) = -S \cdot \sin \vartheta$$

$$m\ddot{z} = mg - S \cos \vartheta$$

$$m(r\dot{\omega} + 2\dot{r}\omega) = 0.$$

Die letzte Gleichung läßt sich sofort wie beim Planetenproblem (siehe Nr. 33) integrieren und gibt wie dort

$$r^2 \omega = C, \tag{I}$$

d. h. die Horizontalprojektion der Bewegung gehorcht dem zweiten Keplerschen Gesetze.

Eliminiert man S aus den beiden ersten Gleichungen, so erhält man

$$(\ddot{r} - r\omega^2) \cos \vartheta - \ddot{z} \sin \vartheta + g \sin \vartheta = 0.$$

Nun folgt aber aus

$$z = l \cos \vartheta$$

$$\dot{z} = -l \sin \vartheta \cdot \dot{\vartheta}$$

$$\ddot{z} = -l \sin \vartheta \cdot \ddot{\vartheta} - l \cos \vartheta \dot{\vartheta}^2$$

und aus $r = l \sin \vartheta$ ebenso

$$\ddot{r} = l \cos \vartheta \cdot \ddot{\vartheta} - l \sin \vartheta \cdot \dot{\vartheta}^2.$$

Setzt man das in die obige Bewegungsgleichung ein und eliminiert ω mittels

$$r^2\omega = C,$$

so erhält man die Differentialgleichung für ϑ

$$l\ddot{\vartheta} - \frac{C^2}{l^3}\frac{\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta} + g\sin\vartheta = 0. \tag{II}$$

Dieser Ansatz versagt für $\vartheta = 0$. Das liegt auch in der Natur der Sache, denn das gewählte Koordinatensystem ist singulär für $\vartheta = 0$, weil zu dem einen Punkte der Ruhelage die unendlich vielen Koordinatenwerte $\vartheta = 0$, φ beliebig, gehören.

$\vartheta = 0$ müssen wir also vor der Hand ausschließen.

Man kann nun die Differentialgleichung (II) auf Quadraturen zurückführen nach einem Verfahren, dessen tiefere Bedeutung wir später erkennen werden (siehe Nr. 83) und das für alle Differentialgleichungen der Form

$$\ddot{x} = f(x)$$

statthat.

Multipliziert man diese Gleichung mit $\frac{dx}{dt}$, so steht links

$$\ddot{x}\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\dot{x}^2.$$

Auf der rechten Seite aber steht

$$f(x)\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\int f(x)\,dx.$$

Also ergibt sich $\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \int f(x)\,dx = h$.

Setzen wir zur Abkürzung

$$\int f(x)\,dx = -U(x),$$

so wird

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x) = h,$$

d. h.

$$\dot{x} = \sqrt{2h - 2U(x)},$$

woraus folgt

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{2h - 2U(x)}},$$

wenn $x = x_0$ für $t = 0$.

In unserem Falle ist nun $x = \vartheta$ und

$$f(\vartheta) = \frac{C^2}{l^4}\frac{\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta} - \frac{g}{l}\sin\vartheta$$

zu setzen, also

$$U(\vartheta) = -\int f(\vartheta)\,d\vartheta = \frac{C^2}{2l^4}\frac{1}{\sin^2\vartheta} - \frac{g}{l}\cos\vartheta,$$

somit wird

$$t = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{d\vartheta \sin\vartheta}{\sqrt{2h\sin^2\vartheta - \frac{C^2}{l^4} + 2\frac{g}{l}\cos\vartheta\sin^2\vartheta}}.$$

Setzen wir $\cos\vartheta = u$

$$2h - \frac{C^2}{l^4} = a$$

$$-2\frac{g}{l} = b$$

$$-2h = c,$$

so wird

$$t = -\int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{a - bu + cu^2 + bu^3}}.$$

Das rechtsstehende Integral ist ein sogenanntes elliptisches Integral und läßt sich im allgemeinen nicht durch eine Kombination sogenannter elementarer Funktionen integrieren (siehe dazu § 19).

Wir können trotzdem einige Resultate ableiten, indem wir einen andern Weg einschlagen.

Wir wollen sehen, ob es eine partikuläre Lösung

$$\vartheta = \vartheta_0 = \text{const.}$$

gibt, d. h. ob das Pendel einen horizontalen Kreis beschreiben kann.

Gehen wir mit diesem Ansatz in die Gleichung (II), so bekommen wir

$$-\frac{C^2}{l^3}\frac{\cos\vartheta_0}{\sin^3\vartheta_0} + g\sin\vartheta_0 = 0,$$

d. h.

$$C = \sqrt{\frac{g\,l^3\sin^4\vartheta_0}{\cos\vartheta_0}}$$

und somit ergibt sich nach (I) das erforderliche ω zu

$$\omega = \omega_0 = \frac{C}{r^2} = \sqrt{\frac{g}{l}}\,\frac{1}{\sqrt{\cos\vartheta_0}}.$$

Es gibt also tatsächlich für jedes ϑ_0 eine solche partikuläre Bewegung mit einer bestimmten konstanten Umlaufsgeschwindigkeit. Die Umlaufszeit ist

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\sqrt{\cos\vartheta_0}$$

und nähert sich also für kleine ϑ_0 der Periode $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ der ebenen Pendelschwingung.

Wir wollen nun dadurch etwas allgemeinere Bewegungen studieren, daß wir uns vorstellen, die soeben besprochene Bewegung werde ein **klein wenig gestört**, sei es, daß der Punkt ein wenig gestoßen wird, sei es, daß wir die Anfangsbedingungen, unter denen die Bewegung eintritt, nicht genau getroffen haben.

Setzen wir also

$$\vartheta = \vartheta_0 + x$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon$$

und nehmen dabei x, ε als klein an, d. h. vernachlässigen alle höheren Glieder in x und ε außer denen erster Ordnung. Also

$$\ddot{\vartheta} = \ddot{x}$$

$$\sin\vartheta = \sin(\vartheta_0 + x) = \sin\vartheta_0 + \cos\vartheta_0 \cdot x + \cdots$$

$$\cos\vartheta = \cos\vartheta_0 - \sin\vartheta_0 \cdot x + \cdots$$

$$\frac{\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta} = \frac{\cos\vartheta_0 - x\cdot\sin\vartheta_0 + \cdots}{\sin^3\vartheta_0 + 3\sin^2\vartheta_0\cos\vartheta_0 x + \cdots} = \frac{\cos\vartheta_0}{\sin^3\vartheta_0}(1 - x\,\mathrm{tg}\,\vartheta_0\cdots)\cdot(1 - 3\,\mathrm{ctg}\,\vartheta_0 x\cdots)$$

$$= \frac{\cos\vartheta_0}{\sin^3\vartheta_0}\left(1 - x\frac{1 + 2\cos^2\vartheta_0}{\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0}\cdots\right).$$

Setzen wir alles in (II) ein und beachten die Gleichung für ϑ_0, so bekommen wir

$$l\ddot{x} + x\left(\frac{1 + 2\cos^2\vartheta_0}{\sin^4\vartheta_0}\frac{C^2}{l^3} + g\cos\vartheta_0\right) = 0$$

oder, wenn wir die Beziehung von C zu ϑ_0 beachten,

$$\ddot{x} + x\alpha^2 = 0, \tag{II'}$$

wo

$$\alpha^2 = \frac{g}{l}\frac{1}{\cos\vartheta_0}(1 + 3\cos^2\vartheta_0)$$

gesetzt ist.

Wir haben also für x in erster Annäherung eine homogene, lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten erhalten.

Daß die Gleichung linear und homogen werde, konnte man von vornherein erwarten, daß sie konstante Koeffizienten hat, liegt daran, daß die Grundbewegung, von der wir ausgingen, die ungestörte Bewegung, durch einen konstanten Wert der Variabeln gegeben war. **Routh** hat eine Bewegung, bei der die lineare Differentialgleichung der gestörten Bewegung konstante Koeffizienten erhält, eine **stationäre Bewegung** (steady motion) genannt. Unsere Kreisbewegung wäre somit eine stationäre Bewegung.

Die Lösung von (II') ist nun

$$x = a\sin(\alpha t + \eta).$$

Bei kleiner Störung macht also der Ausschlagwinkel ϑ kleine Schwingungen um den konstanten Wert ϑ_0 mit der Periode

$$\tau' = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{\sqrt{\cos\vartheta_0}}{\sqrt{1+3\cos^2\vartheta_0}}$$

oder

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1+3\cos^2\vartheta_0}}.$$

Es ist also

$$\frac{1}{2}\tau < \tau' < \tau,$$

die Grenzen werden nicht erreicht, denn $\vartheta_0 = 0$ und $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$ sind auszuschließen.

Aus Gleichung (I) wird nun

$$\omega = \frac{C}{l^2 \sin\vartheta^2} = \frac{C}{l^2(\sin\vartheta_0 + \cos\vartheta_0\, x \cdots)^2}$$

$$\omega_0 + \varepsilon = \frac{C}{l^2 \sin^2\vartheta_0}(1 - 2\operatorname{ctg}\vartheta_0 \cdot x \cdots),$$

oder

$$\varepsilon \doteq -\frac{2C\cos\vartheta_0}{l^2\sin^3\vartheta_0}\cdot x = -2\sqrt{\frac{g}{l}\,\frac{\cos\vartheta_0}{\sin^2\vartheta_0}}\cdot x. \tag{I'}$$

ω macht also dieselbe Schwingung wie x, befindet sich auch in derselben Phase, jedoch ist das Verhältnis der Amplituden negativ, d. h. bei größerem ϑ ist die Umlaufsgeschwindigkeit langsamer.

Integration von

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon \doteq \omega_0 - 2\sqrt{\frac{g}{l}\,\frac{\cos\vartheta_0}{\sin^2\vartheta_0}}\, a\sin(\alpha t + \eta)$$

gibt

$$\varphi \doteq \omega_0 t + 2\,\frac{\cos\vartheta_0}{\sin\vartheta_0}\,\frac{1}{\sqrt{1+3\cos^2\vartheta_0}}\cdot a\cos(\alpha t + \eta) + \varphi_0.$$

Danach ergeben sich folgende Bilder der gestörten Bewegung in der Horizontalprojektion:

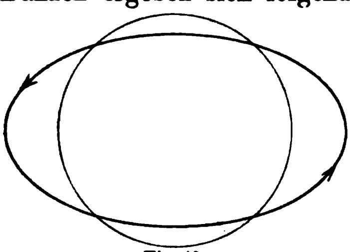


Fig. 49.

Ist ϑ_0 sehr klein, so ist nahezu $\tau' = \frac{1}{2}\tau$, d. h. das Pendel schwingt bei jedem Umlauf zweimal aus und in den Grundkreis (Fig. 49). Die Bogen außerhalb des Kreises sind infolge (I') etwas länger als die Bogen im Kreis.

Weil die resultierende Kraft stets zentral gerichtet ist, sind die Bahnkurven konvex nach außen!

Für mittlere ϑ_0 nimmt die Bahnkurve die Gestalt der Fig. 50 an. Es dreht sich die Stelle maximalen Ausschlags allmählich im Sinne des Umlaufs mit herum. Um so langsamer, je kleiner ϑ_0 ist Ist das Verhältnis $\tau' : \tau$ rational

$$\tau' : \tau = m : n,$$

wo m und n ganze Zahlen sind, d. h. $n\tau' = m\tau$, so kommen auf m Umläufe der Grundbewegung, n ganze Schwingungen. Es wird sich also die Kurve nach m Umläufen (n Schwingungen) schließen.

Kommt ϑ_0 nahe an $\frac{\pi}{2}$, so wird τ' nahezu gleich τ, die Figur sieht dann so aus, wie in Fig. 51.

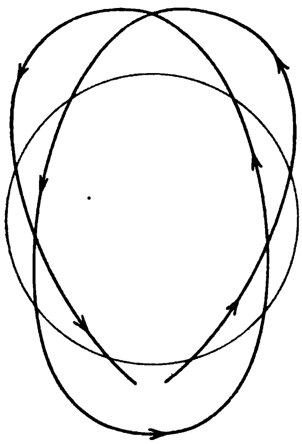


Fig. 50.

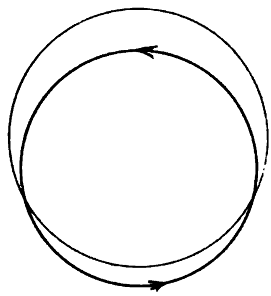


Fig. 51.

Es bleibt jetzt noch der Fall zu behandeln, daß ϑ sehr klein ist.

Wir legen ein rechtwinkliges Koordinatensystem $Oxyz$ durch den Mittelpunkt der Kugel, die z-Achse nach unten. Die Fadenspannung S hat dann die Richtungskosinus

$$-\frac{x}{l}, \quad -\frac{y}{l}, \quad -\frac{z}{l}.$$

Somit lautet die Newtonsche Grundgleichung nach den neuen Achsen zerlegt:

$$m\ddot{x} = -\frac{x}{l} S$$

$$m\ddot{y} = -\frac{y}{l} S$$

$$m\ddot{z} = mg - \frac{z}{l} S.$$

Dazu kommt $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$

$$z = \sqrt{l^2 - x^2 - y^2}$$

Nehmen wir nun x und y als klein an und bleiben konsequent bei Größen erster Ordnung stehen, so wird

$$z \doteq l,$$

$\dot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ müssen wir natürlich auch als klein erster Ordnung ansehen und somit

$$\ddot{z} \doteq 0$$

setzen bis auf Glieder zweiter Ordnung.

Folglich wird nach der dritten Bewegungsgleichung

$$S = mg$$

und nach den beiden ersten

$$\ddot{x} = -x \cdot \frac{g}{l}$$

$$\ddot{y} = -y \frac{g}{l}.$$

Diese Gleichungen haben das Integral

$$\left.\begin{aligned} x &= a \sin \alpha t + b \cos \alpha t \\ y &= c \sin \alpha t + d \cos \alpha t, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III)}$$

wo $\alpha = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Ist nun $\begin{vmatrix} ab \\ cd \end{vmatrix} = 0$, so folgt $y = \text{const.}\, x$: wir haben die schon bekannte ebene Bewegung des mathematischen Pendels.

Sei also $\begin{vmatrix} ab \\ cd \end{vmatrix} \neq 0$.

Dann können wir die Gleichungen (III) nach $\sin \alpha t$, $\cos \alpha t$ auflösen:

$$\sin \alpha t = Ax + By$$
$$\cos \alpha t = Cx + Dy,$$

woraus wir als Horizontalprojektion die Bahnkurve erhalten

$$(Ax + By)^2 + (Cx + Dy)^2 = 1,$$

d. h. die Gleichung einer Ellipse.

Es schließt sich offenbar dieses Resultat sehr gut an die frühern an: wird ϑ_0 merklich größer, so fängt die Ellipse allmählich an, sich zu drehen und es resultieren Kurven wie die in Fig. 50 gezeichneten.

Wir werden berechtigt sein, qualitativ die Resultate auch auf stärkere Abweichungen von der kreisförmigen Grundbewegung zu übertragen — die Experimente bestätigen dies — und so haben wir ohne schwierigere Hilfsmittel einen Einblick in die Formen der Bewegung tun dürfen.

Die hier behandelte Aufgabe hat eine gewisse vorbildliche Bedeutung für das Regulatorproblem (siehe Nr. 200). Darum die vollständige Durchführung.

§ 15. Über den Luftwiderstand.

68. Die Newtonschen Gesetze. Ein Körper, der sich in Luft oder in einem andern nichtfesten Medium (Wasser z. B.) befindet, wird nach unseren allgemeinen Prinzipien von dieser Umgebung Druckkräfte an seiner Oberfläche erfahren. In diesen Druckkräften werden wir auch hauptsächlich diejenige Kraft vermuten, welche die Abweichungen der wirklichen Fall- und Wurfbewegung von der Galileischen Bewegung bedingt. Wir wollen die resultierende Kraft, die ein bewegter Körper von dieser nichtfesten Umgebung erfährt, den Widerstand dieses Mediums nennen.

Die Methode, diesen Widerstand zu bestimmen, beruht nun tatsächlich darauf, daß man $\bar{w}$ beobachtet und nun die Differenz

$$m\bar{w} - m\bar{g} = \overline{W}$$

in drei Teile zerlegt: 1. den Auftrieb des Mediums, der als der Rest von $\overline{W}$ für $\bar{v} = 0$ definiert wird, 2. einen kleinen Teil, der von der Rotation der Erde bedingt ist (davon später in § 51), 3. den Hauptteil, den man als eigentlichen Luftwiderstand definiert und so der Erforschung zugrunde legt.

Die beiden ersten Teile „schneiden" wir hier „weg".

Es könnte nun dem Anfänger scheinen, als wenn damit die Schwierigkeit des Fallproblems durch eine Definition aus der Welt geschafft sei. Das ist jedoch keineswegs so: die Berechtigung dieser Definition ergibt sich dann, wenn es gelingt, für $\overline{W}$ Gesetze zu finden, die durch Ursachen bedingt sind, und zwar plausible Gesetze.

Es gibt Gesetze für den Widerstand $\overline{W}$, die auf Newton zurückgehen, der sie auf Grund gewisser theoretischer, aber anfechtbarer Überlegungen gefunden hat.

Nehmen wir zunächst an, daß die relative Bewegung unseres Körpers gegen die nichtfeste Umgebung — denn nur auf die relative darf es vernünftigerweise ankommen — eine reine Translation $\bar{v}$ sei und in zwei Symmetrieebenen des Körpers liege. Dann muß $\overline{W}$ der Geschwindigkeit $\bar{v}$ entgegengesetzt gerichtet sein.

Sei F der größte Querschnitt des Körpers, so behauptete Newton, es sei

$$W = \varkappa \mu' F v^2, \qquad \text{(I)}$$

wo μ' die spezifische Masse des Mediums, $\varkappa$ eine Konstante bedeute, die nur von der Gestalt der Vorderfläche des Körpers abhänge (Formfaktor); sie sei gleich 1 für eine ebene Fläche.

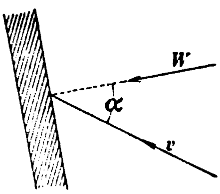


Fig. 52.

Trifft dagegen ein Luftstrom eine ebene Platte von der Größe F schräg unter dem Winkel α gegen die Normale, so sollte $\overline{W}$ senkrecht zur Platte stehen und, da offenbar von $\bar{v}$ nur die Komponente $v \cos\alpha$ wirksam sei,

$$W = \mu' F v^2 \cos^2\alpha \qquad \text{(II)}$$

sein.

69. Moderne experimentelle und theoretische Ergebnisse. Die vorstehenden Newtonschen Gesetze können heute keinen Anspruch auf volle Gültigkeit mehr erheben, wenn sie auch noch immer eine große Bedeutung besitzen. Vor allem muß man sich hüten, die Formel (II) für das Flächenelement einer Fläche anzuwenden und zu glauben, dann das resultierende $\overline{W}$ durch Integration finden zu können. Der Widerstand auf einen Körper hängt auch an jeder Stelle stets von der Gestalt des ganzen Körpers ab. Wir müssen den Luftwiderstand heute als eine Kraft ansehen, die durch die Bewegungsvorgänge im umgebenden Medium bedingt ist, insofern, als die unmittelbare Ursache von W, die Deformation des umgebenden Mittels, wiederum in einem Abhängigkeitsverhältnis zu jenen Bewegungsvorgängen steht; die theoretische Lösung des Problems kann daher erst die wissenschaftliche Aerodynamik bzw. Hydrodynamik bringen. Versuche, einfache Gesetze wie die Newtonschen zu finden, können nur angenäherte, aber in vielen Fällen sehr brauchbare Ergebnisse haben. Wir sind heute noch wesentlich auf Experimente angewiesen, wie solche mannigfaltig an den verschiedensten Objekten, auch an Geschossen, angestellt wurden. Man findet eine sehr lesenswerte Zusammenstellung der Ergebnisse in der Encyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. IV (Mechanik) in den Artikeln „Aerodynamik“ von Finsterwalder und „Ballistik“ von Cranz. Ferner sei auf das interessante Buch von Lanchester (deutsch von Runge): „Aerodynamik, ein Gesamtwerk über das Fliegen“, hingewiesen.

Es sei hier folgendes hervorgehoben: Was die Abhängigkeit von v angeht, so scheint bei Luft die Proportionalität mit v^2 recht gut zu stimmen, wenn v unter etwa 240 m/Sec. liegt. Von da ab wächst $\frac{1}{v^2} W$ stark mit v, am stärksten, wenn v in die Nähe der Schallgeschwindigkeit ($v = 330$ m) kommt; später wird $\frac{1}{v^2} W$ wieder nahezu konstant, ist aber etwa dreimal so groß wie vorher und nimmt schließlich wieder etwas ab (siehe Fig. 54).

Für ganz kleine Geschwindigkeiten scheint es richtiger, W der Geschwindigkeit v selbst proportional zu setzen sowie dem Durchmesser d des Querschnitts:

$$W = \varkappa' \mu' d v \quad (\text{für sehr kleine } v);$$

$\varkappa'$ hängt dann auch noch von der sogenannten Zähigkeit (siehe Nr. 378) und damit auch von der Temperatur ab.

Gerade für die meisten technischen Anwendungen ist daher das Newtonsche Gesetz (I) noch recht gut brauchbar. Die merkwürdige Steigerung des Luftwiderstandes in der Nähe der Schallgeschwindig-

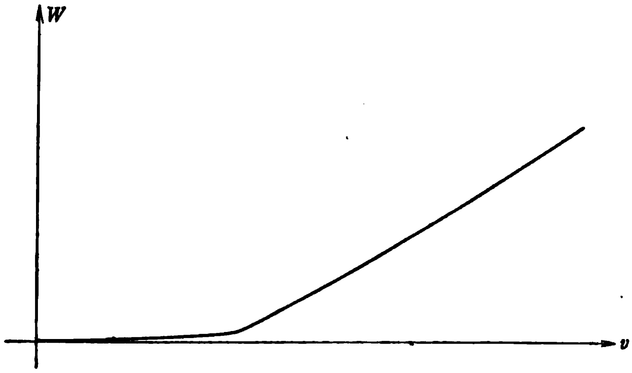


Fig. 53.

keit erklärt sich dadurch, daß, wie Mach experimentell nachgewiesen hat, die umgebende Luft für diesen Fall besonders stark in Wellen-

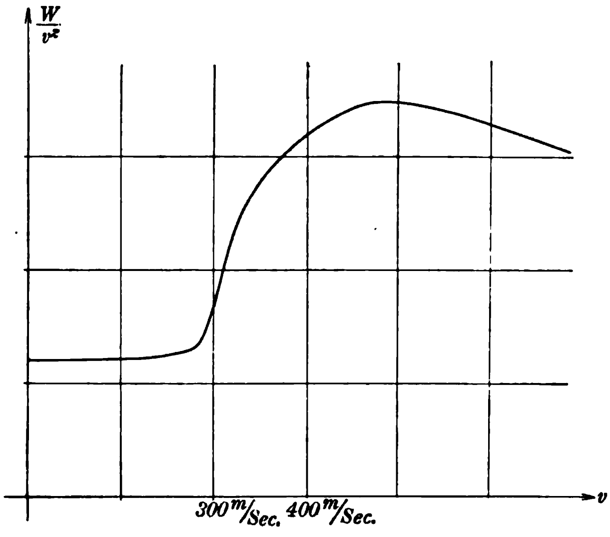


Fig. 54.

bewegungen versetzt wird. Die zugehörige Bewegungsenergie muß aber natürlich das Geschoß abgeben. (Über den Energiebegriff siehe Nr. 77.)

Der Faktor $\varkappa$ hängt nach neueren Untersuchungen noch mehr von der Gestalt der Hinterseite als von der der Vorderfläche ab.

(Darum die hinten zugespitzte Form des Parsevalschen Luftschiffes.) Für ebene Flächen geben verschiedene Autoren (für Luft)

$$\varkappa\mu' = 0{,}070 \text{ bis } 0{,}125$$

im technischen Maßsystem.

Für ein Artillerielanggeschoß der Kruppschen Normalform ist etwa (für normale Verhältnisse der Luft)

$$\varkappa\mu' = 0{,}0140 \quad \text{für } 40 \text{ m/Sec} < v \leqq 240 \text{ m/Sec},$$

dagegen

$$\varkappa\mu' = 0{,}0394 \quad \text{für } 419 \text{ m/Sec} < v < 550 \text{ m/Sec}.$$

Was die Abhängigkeit des Widerstandes W von dem Neigungswinkel α des Luftstromes gegen eine ebene Platte angeht, so muß die Newtonsche Formel (II) heute direkt als falsch bezeichnet werden. Es sind viele Formeln zum Ersatz angeboten worden, doch hat sich wohl bis heute noch keine den Vorrang erworben. Erwähnt seien eine Formel von v. Lößl, die für nahezu quadratische Platten brauchbar ist:

$$W = W_0 \cdot \cos\alpha,$$

und eine Formel, die Rayleigh aus theoretischen Überlegungen für eine sehr lange schmale ebene Platte gewonnen hat:

$$W = W_0 \frac{(4+\pi)\cos\alpha}{4+\pi\cos\alpha}.$$

Ist α nicht groß, so stimmen beide Formeln wesentlich überein. W_0 ist zur Abkürzung für $\varkappa\mu' \cdot v^2 F$ gesetzt.

Interessant ist eine Beobachtung Prandtls, nach der es zwei Formeln für W als Funktion von α gibt: die eine gilt, wenn man von $\alpha = 0$, die andere, wenn man von $\alpha = \frac{\pi}{2}$ kommt, beide gelten in einem kleinen Bereich gleichzeitig, bis die eine instabil wird und W in die andere Form überspringt. (Siehe die Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, Bd. 1.)

Außer der Normalkomponente W besteht selbst bei ebenen Platten noch eine geringere Tangentialkomponente, die für $\alpha \doteq \frac{\pi}{2}$ von wesentlicher Bedeutung wird. Näheres darüber (z. B. Allensches Gesetz) im Lanchester.

Für kompliziertere Flächenformen, namentlich auch durchbrochene Flächen, wie solche bei Brücken sehr viel vorkommen, liegen noch keine zuverlässigen Angaben vor.

Selbst die Abhängigkeit von der Größe von F ist noch sehr umstritten. Behauptet wird vielfach, daß $\varkappa$ mit wachsendem F abnehme.

70. Die vertikale Fallbewegung im widerstehenden Mittel. Wir betrachten den senkrechten Fall eines Körpers in der Luft oder in einem anderen widerstehenden Mittel. Wir setzen von dem Widerstand W nur voraus, daß er gleich Null sei für $v = 0$, dann aber mit wachsendem v beständig und über alle Grenzen zunehme. Im übrigen sei W als Funktion von v graphisch gegeben.

Es werde v nach abwärts positiv gerechnet und es sei $v \geqq 0$. Dann lautet die Newtonsche Grundgleichung

$$m \frac{dv}{dt} = mg - W(v).$$

Die Differentialgleichung hat zunächst eine partikuläre Lösung.

Es gibt nämlich einen und nur einen Wert v_k von v, für den

$$mg = W(v_k)$$

ist. Wir brauchen nur in dem Diagramm für W die Horizontale $W = mg$ zu ziehen, welche die Kurve einmal schneidet. v_k heiße die kritische Geschwindigkeit.

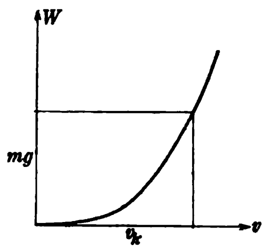


Fig. 55.

$$v = v_k$$

ist offenbar eine mögliche Lösung der Differentialgleichung: *der Körper kann sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit, nämlich mit v_k, gleichförmig abwärts bewegen.*

Weiter sieht man:

Ist zu Anfang $v < v_k$, so ist die rechte Seite der Differentialgleichung positiv, v wächst also; ist aber zu Anfang $v > v_k$, so tritt das Gegenteil ein; v nimmt ab, obwohl die Bewegung abwärts gerichtet ist: es überwiegt der Luftwiderstand die Schwerkraft.

Wir können nun die Differentialgleichung auf Quadraturen zurückführen: es ergibt sich

$$t = \int_{v_0}^{v} \frac{m\,dv}{mg - W(v)}.$$

Bei graphisch gegebenem $W(v)$ wird man sich zunächst die Funktion

$$f(v) = \frac{m}{mg - W(v)}$$

aufzeichnen, dann $\int f(v)dv$ angenähert nach einem der bekannten Verfahren integrieren, eventuell mit Hilfe mechanischer Hilfsmittel (Planimeter, Integraphen usw.).

Man kann so mit genügender Genauigkeit t als Funktion von v und also auch v als Funktion von t bestimmen.

Bemerkenswert ist: Nähert sich v von einer Seite dem kritischen Werte v_k, so wird $f(v)$ unendlich, und zwar erster Ordnung, da die Kurve $W = W(v)$ die Gerade $W = mg$ unter einem von Null verschiedenen Winkel schneidet. Somit wird t für $v = v_k$ logarithmisch unendlich.

Mit andern Worten: War zu Anfang $v < v_k$ (bzw. $v > v_k$), so nimmt v zu (bzw. ab) und nähert sich asymptotisch, d. h. in unendlich langer Zeit dem kritischen Wert v_k. Nach einiger Zeit aber schon wird man v praktisch nicht mehr von v_k unterscheiden können:

Schließlich fällt der Körper mit der kritischen Geschwindigkeit v_k abwärts.

v_k ist gewissermaßen die natürliche Geschwindigkeit des Körpers. Das Resultat war schon Galilei bekannt.

Legen wir das Newtonsche Widerstandsgesetz zugrunde, so folgt aus

$$G = \varkappa \mu' F v_k^2$$

$$v_k = \sqrt{\frac{G}{\varkappa \mu' F}} = \sqrt{\frac{\gamma}{\varkappa \mu'} \cdot \frac{V}{F}},$$

wenn μ das mittlere spezifische Gewicht des Körpers, V sein Volumen bedeutet.

Da mit wachsenden Dimensionen V stärker als F zunimmt, so fallen größere Körper schneller als kleinere desselben Materials und ähnlicher Gestalt und da ferner v_k mit γ wächst, so fallen spezifisch schwerere Körper schneller als spezifisch leichtere.

Dicke Regentropfen fallen schneller als kleine; Nebel, der aus ganz feinen Tröpfchen besteht, desgleichen Wolken, senken sich nur ganz langsam.

Schüttet man eine Mischung schwerer und leichter Körper in strömendes Wasser, so werden die Bestandteile getrennt: die spezifisch schwereren und dicken Körner werden fast senkrecht herabfallen, die leichteren und kleineren werden weiter fortgeführt. Man wendet diese Erscheinung in den Aufbereitungen an, um Erzstückchen verschiedener Größe voneinander und von der „Berge" zu trennen.

Aufgabe 39: Man berechne die kritische Geschwindigkeit nach den Angaben von Nr. 69 für ein Geschoß von 15 g Gewicht und 8 mm Durchmesser unter Zugrundelegung des Newtonschen Gesetzes.

71. Das ballistische Problem. Wir betrachten eine beliebige Bewegung eines Körpers in der Luft und nehmen an, daß außer der Schwerkraft noch ein Widerstand $W(v)$ wirke, welcher stets $\bar{v}$ entgegengesetzt gerichtet sei. Das ist nur eine Annäherung an die Wirklichkeit, da zum Teil wegen der Rotation des Geschosses, zum Teil auch deshalb, weil es nicht zur Flugbahn in symmetrischer Lage bleiben kann, eine Exzentrizität von $\overline{W}$ eintritt, die gewisse Seitenabweichungen bedingt.

Sei ϑ der Winkel, den die Richtung von $\bar{v}$ mit der Horizontalen einschließt, nach oben positiv gerechnet, so ergibt die Zerlegung des Newtonschen Grundgesetzes

$$m\bar{w} = \Sigma\bar{k}$$

nach dem natürlichen Koordinatensystem der Bahn (vgl. Nr. 26 und Beispiel 4 aus Nr. 64)

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\vartheta - W(v) \qquad (1)$$

$$m\frac{v^2}{\varrho} = mg\cos\vartheta. \qquad (2)$$

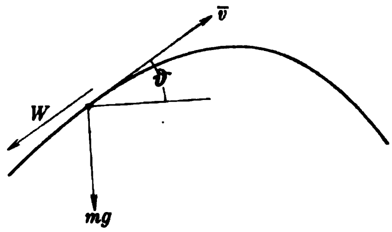


Fig. 56.

Die letzte Gleichung zeigt, daß $\cos\vartheta$ stets positiv ist, also $-\frac{\pi}{2} \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2}$, ferner ist, da $m\bar{g}$ abwärts gerichtet ist, die Bahn nach unten konkav, ϑ nimmt also ständig ab:

$$\frac{d\vartheta}{dt} \leqq 0.$$

Deshalb ist die stets positive Krümmung

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{d\vartheta}{ds} = -\frac{d\vartheta}{dt}\cdot\frac{1}{v},$$

aus (2) wird somit

$$-v\frac{d\vartheta}{dt} = g\cos\vartheta. \qquad (2')$$

Wir wollen ϑ als unabhängige Variable wählen. Division von (1) durch (2′) gibt

$$\frac{dv}{v} = \frac{mg\sin\vartheta + W(v)}{mg\cos\vartheta}\,d\vartheta. \qquad (\mathrm{I})$$

Hat man diese Differentialgleichung erster Ordnung integriert, sei etwa

$$v = f(\vartheta),$$

so kennt man den Hodographen und man kann dann alles weitere leicht durch Quadraturen finden. So ergibt (2′) sofort

$$t = -\int\frac{v\,d\vartheta}{g\cos\vartheta} = -\frac{1}{g}\int\frac{f(\vartheta)\,d\vartheta}{\cos\vartheta},$$

aus

$$dx = ds\cos\vartheta = v\cos\vartheta\cdot dt$$

folgt sofort für die Horizontalentfernung

$$x = \int f(\vartheta)\cos\vartheta\,dt = -\frac{1}{g}\int f^2(\vartheta)\,d\vartheta$$

und aus

$$dy = ds\sin\vartheta = v\sin\vartheta\,dt$$

$$y = -\frac{1}{g}\int f^2(\vartheta)\cdot\operatorname{tg}\vartheta\cdot d\vartheta.$$

Man kann nun die Differentialgleichung (I) für gewisse Fälle der Funktion W in geschlossener Form mittels elementarer Funktionen integrieren, wie **Euler**, **D'Alembert** u. a. gezeigt haben; aber bei der Unregelmäßigkeit der Funktion W hat das nicht zu viel Interesse. Man wird vielmehr (I) angenähert integrieren, indem man diese Differentialgleichung durch die Differenzengleichung

$$\Delta v = v \frac{mg \sin\vartheta + W(v)}{mg\cos\vartheta} \Delta\vartheta$$

ersetzt und nun so verfährt:

Man wählt vom Anfangswinkel ϑ_0 anfangend negative Intervalle $\Delta\vartheta$, indem man setzt

$$\vartheta_1 = \vartheta_0 + \Delta\vartheta_1$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 + \Delta\vartheta_2 \quad \text{usw.}$$

Sei v_0 die Anfangsgeschwindigkeit, so bestimmt man den ersten Zuwachs von v, Δv_1 aus

$$\Delta v_1 = v_0 \frac{mg\sin\vartheta_0 + W(v_0)}{mg\cos\vartheta_0} \Delta\vartheta_1 .$$

Sei jetzt $v_1 = v_0 + \Delta\vartheta_1$ gesetzt, so ergibt sich weiter

$$\Delta v_2 = v_1 \frac{mg\sin\vartheta_1 + W(v_1)}{mg\cos\vartheta_1} \Delta\vartheta_2$$

$$v_2 = v_1 + \Delta v_2 \quad \text{usw.}$$

Die zugehörigen Wertepaare ϑ_0, v_0; ϑ_1, v_1; ϑ_2, v_2; usw. werden dann um so genauer Punkte der Kurve $v = f(\vartheta)$ darbieten, je kleiner die $\Delta\vartheta$ gewählt worden sind.

Aus (2) erhält man dann

$$\varrho = \frac{v^2}{g\cos\vartheta} = \frac{f^2(\vartheta)}{g\cos\vartheta} .$$

Man wird danach die Bahnkurve aus lauter kleinen Kreisbogenstücken von den Radien ϱ und den Zentriwinkeln $\Delta\vartheta$ mit stetiger Tangente zusammensetzen.

Allgemein läßt sich folgendes bei jedem Gesetz $W(v)$ über die Kurve aussagen. (Wir setzen nur voraus, daß $W(v) = 0$ ist, daß dann aber $W(v)$ mit v ins Unendliche beständig wächst.) Aus (1) folgt:

$$\lim_{t=\infty} v \text{ ist endlich und von Null verschieden.}$$

Denn wenn v über v_k $(W(v_k) = mg)$ hinauswächst, so nimmt v sicher sofort ab; nähert sich aber v dem Werte Null, so wird

$$m\frac{dv}{dt} \doteq -mg\sin\vartheta ,$$

also positiv, da auf dem absteigenden Ast $\vartheta < 0$ ist.

Bleibt also v endlich, so folgt aus (2′), daß

$$\lim_{t=\infty} \vartheta = -\frac{\pi}{2}$$

ist, denn nur dann wird $\cos\vartheta = 0$ und $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$, d. h. $|\vartheta|$ hört auf zu wachsen. Und es darf ja nicht über alle Grenzen wachsen, da $|\vartheta| \leqq \frac{\pi}{2}$ bleibt.

Aus (I) folgt dann, daß für $t = \infty$ also für $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$

$$v = v_k$$

wird, denn $\frac{1}{v}\frac{dv}{d\vartheta}$ bleibt endlich, $\cos\vartheta$ aber wird Null, somit muß auch der Zähler von (I)

$$mg - W(v)$$

Null werden. Also

$$\lim_{t=\infty} v = v_k\,.$$

Endlich folgt aus der Formel für x

$$x = -\frac{1}{g}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} f^2(\vartheta)\,d\vartheta$$

$$\lim_{t=\infty} x = -\frac{1}{g}\int_{\vartheta_0}^{-\frac{\pi}{2}} f^2(\vartheta)\,d\vartheta$$

und da $f(\vartheta)$ endlich bleibt, so ist auch

$$\lim_{t=\infty} x = \text{endlich}.$$

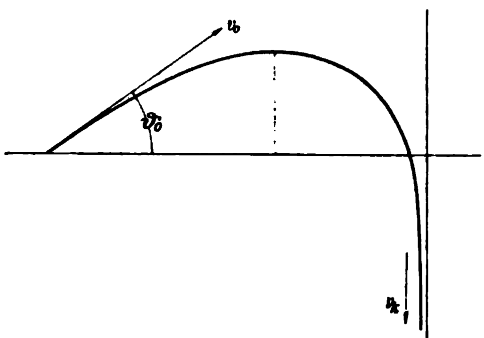


Fig. 57.

d. h. die Bahnkurve hat eine vertikale Asymptote.

Die ballistische Kurve hat also jedenfalls eine vertikale Asymptote und die Geschwindigkeit nähert sich dem kritischen Werte v_k,

d. h. schließlich fällt, praktisch gesprochen, der Körper vertikal mit konstanter Geschwindigkeit herab.

Schlußbemerkung. Durch ein geeignet gewähltes W können wir eine sehr gute Annäherung an die Wirklichkeit erzielen. Freilich gibt unsere Theorie noch nicht alles. Die Wirklichkeit zeigt eine Seitenabweichung aus der vertikalen Flugbahn, welche die Punktmechanik nicht erklären kann. Die Rotation des Geschosses übt neben der hier ebenfalls nicht berücksichtigten Drehung der Erde den Haupteinfluß in dieser Beziehung aus.

Aufgaben: 40. Man führe das skizzierte Annäherungsverfahren für ein Widerstandsgesetz und gegebene Anfangswerte (etwa $\vartheta_0 = 20^\circ$ und $v_0 = 600$ m/Sec) durch. Man konstruiere sich dazu ein $W(v)$ nach den Angaben von Nr. 69.

41. Ein Motorwagen mit einem Gewicht von 40 t werde auf horizontaler Strecke durch eine Kraft k angetrieben, die als Funktion der Geschwindigkeit v graphisch gegeben ist (links in der Figur). Man konstruiere die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit (rechts in der Figur). Die Maßstäbe seien:

1 cm = 500 kg (Kraft)
1 cm = 2,5 Sec (Zeit)
1 cm = 1 m/Sec (Geschwindigkeit).

Aus der Dimensionsgleichung

$$[m] = \left[\frac{k\,t}{v}\right]$$

bestimme man sich zuerst den Maßstab der Masse. Weiß man, als welche Strecke man m aufzutragen hat, so verfahre man folgendermaßen:

Aus $\frac{dv}{dt} = \frac{k(v)}{m}$ folgt, daß die Tangente der gesuchten Kurve der Strecke OK parallel ist, wenn $OM = m$ die Masse, $MK = k(v)$ die jeweilige Kraft bedeutet. Danach konstruiere man die Kurve, indem man das Intervall von v (0 bis 4,5 m/Sec) in Teile Δv teilt und die Differentialgleichung durch die

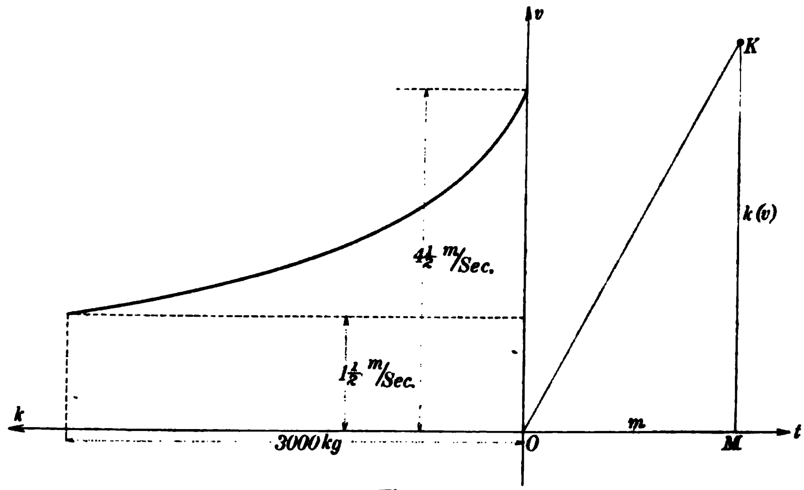


Fig. 58.

Differenzengleichung $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{k(v)}{m}$ ersetzt. Man mache die Konstruktion ein zweites Mal mit einer feineren Teilung. Unterscheiden sich die beiden Kurven nicht mehr merklich voneinander, so kann man das als einen Beweis genügender Genauigkeit des Verfahrens ansehen.

72. Die freie, gedämpfte Schwingung bei einem Freiheitsgrad (Pendel mit Luftwiderstand). Wir betrachten ein mathematisches Pendel wie in Nr. 66, lassen es in einer Vertikalebene kleine Schwingungen ausführen, berücksichtigen aber jetzt den Luftwiderstand, den wir bei der in Rede stehenden kleinen Geschwindigkeit dieser proportional setzen dürfen.

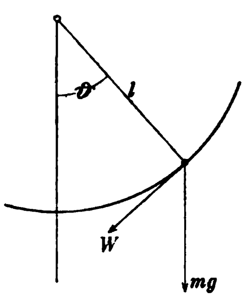


Fig. 59.

Da $v = l\dot{\vartheta}$ ist, so ist

$$W = -\varkappa'\mu' l\dot{\vartheta} d$$

zu setzen, wenn wir W im Sinne wachsender ϑ positiv rechnen.

Demnach lautet die Newtonsche Grundgleichung für die Tangentenrichtung der Bahn

$$m l \ddot{\vartheta} = - m g \sin \vartheta - \varkappa' \mu' l \dot{\vartheta} d,$$

oder, wenn wir wie früher setzen

$$\alpha^2 = \frac{g}{l}$$

und nun zur Abkürzung

$$\frac{d \cdot \varkappa' \cdot \mu'}{m} = 2\lambda,$$

wenn wir ferner bei kleinen Schwingungen $\sin \vartheta$ durch ϑ ersetzen,

$$\ddot{\vartheta} + 2\lambda \dot{\vartheta} + \alpha^2 \vartheta = 0. \tag{I}$$

Diese homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten zeichnet sich vor der allgemeinen dieser Art nur dadurch aus, daß die Koeffizienten positiv vorausgesetzt werden müssen. Wir nennen diese Differentialgleichung die **Differentialgleichung der freien, gedämpften Schwingung für einen Freiheitsgrad** (weil nur eine abhängige Variable ϑ vorkommt).

Um sie zu integrieren, hat man bekanntlich die entsprechende algebraische Gleichung zweiten Grades

$$u^2 + 2\lambda u + \alpha^2 = 0$$

aufzulösen: deren Wurzeln seien

$$u_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}$$
$$u_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}.$$

Das allgemeine Integral lautet dann

$$\vartheta = A e^{u_1 t} + B e^{u_2 t},$$

wenn, wie es im allgemeinen der Fall sein wird, $u_1 \neq u_2$ ist. A, B sind Integrationskonstanten.

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden: a) **Der Fall geringer Dämpfung**; $\lambda < \alpha$. Setzen wir dann das rein imaginäre

$$\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2} = ik,$$

so wird

$$e^{u_1 t} = e^{-\lambda t} \cdot e^{ikt} = e^{-\lambda t} (\cos kt + i \sin kt)$$
$$e^{u_2 t} = e^{-\lambda t} e^{-ikt} = e^{-\lambda t} (\cos kt - i \sin kt)$$

und somit

$$\vartheta = e^{-\lambda t} (\mathrm{A} \cos kt + \mathrm{B} \sin kt)$$

oder

$$\vartheta = e^{-\lambda t} a \cdot \sin (kt + \varepsilon); \tag{II}$$

wo A, B, bzw. a, ε neue Integrationskonstanten sind, die sich leicht durch A, B ausdrücken lassen.

Da $-1 \leqq \sin(kt+\varepsilon) \leqq +1$ und die Grenzen stets wieder nach Ablauf der halben Periode

$$\frac{1}{2}\tau = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - \lambda^2}}$$

erreicht werden, da ferner zwischendurch, ebenfalls nach Ablauf der halben Periode der Sinus und somit auch ϑ immer wieder Null wird, so schwankt ϑ zwischen den durch

$$\vartheta = \pm a e^{-\lambda t}$$

gegebenen Kurven in regelmäßigem Rhythmus hin und her. Man kann die Bewegung schildern als eine periodisch durch Null hindurch gehende Schwingung mit stets abnehmender Amplitude

$$\lim_{t=\infty} \vartheta = 0.$$

Der Faktor $e^{-\lambda t}$, der die Abnahme bewirkt und durch die Dämpfung λ allein gegeben ist, heißt der **Dämpfungsfaktor**.

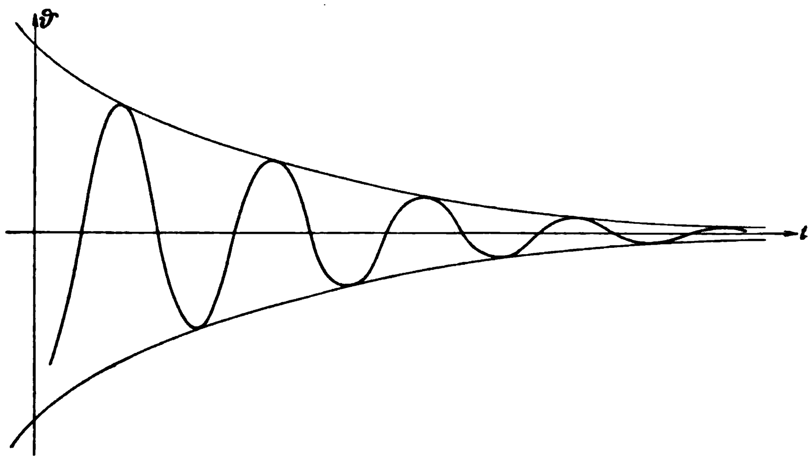


Fig. 60.

Die Periode ist größer, die Schwingung also langsamer wie bei der ungedämpften Schwingung.

Die Bewegung wird, wenn auch erst nach unendlich langer Zeit zur Ruhe kommen. Man vergleiche damit die verschiedene Wirkung der Gleitreibung (siehe Nr. 64, Beispiel 5). In Wirklichkeit dürfte die Dämpfung sowohl beim Pendel, wie bei der Federschwingung (siehe Nr. 35) der Kombination eines Gliedes vom Charakter des Luftwiderstandes und eines Gliedes vom Charakter der Gleitreibung entsprechen.

Man kann λ experimentell bestimmen, indem man die Abnahme der maximalen Ausschläge betrachtet.

Es ist $\dot{\vartheta} = ae^{-\lambda t}(-\lambda \sin(kt+\varepsilon) + k\cos(kt+\varepsilon))$. Also tritt das Maximum bzw. Minimum ein, wenn $\dot{\vartheta} = 0$, d. h.

$$\operatorname{tg}(kt+\varepsilon) = \frac{k}{\lambda}$$

ist. Sei t ein solcher Wert, so tritt dasselbe ein für

$$t' + \frac{1}{2}\tau,\ t' + \tau,\ t' + \frac{3}{2}\tau \cdots$$

Die diesen Zeitmomenten entsprechenden Ausschläge aber sind

$$ae^{-\lambda t'} \sin(kt'+\varepsilon);\ -ae^{-\lambda t' - \frac{1}{2}\lambda\tau} \sin(kt'+\varepsilon);\ \text{usw.},$$

die Ausschläge multiplizieren sich also mit

$$e^{-\frac{1}{2}\lambda\tau},\ e^{-\lambda\tau},\ e^{-\frac{3}{2}\lambda t}\ldots,$$

ihre natürlichen Logarithmen vermindern sich somit bei jedem Ausschlag um $\frac{1}{2}\lambda\tau$.

Haben somit zwei aufeinander folgende maximale Ausschläge die Absolutwerte ϑ_1 und ϑ_2, so ist $\operatorname{lgnat}\vartheta_1 - \operatorname{lgnat}\vartheta_2 = \frac{1}{2}\lambda\tau$.

Man nennt nach Gauß die linke Seite das logarithmische Dekrement.

Man kann aus ihm nach der vorstehenden Gleichung λ berechnen, da man ja τ direkt beobachten kann.

b) Der Fall starker Dämpfung: $\lambda > \alpha$. Dann ist $\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}$ reell und wir haben in

$$\vartheta = Ae^{(-\lambda + \sqrt{\lambda^2-\alpha^2})t} + Be^{(-\lambda - \sqrt{\lambda^2-\alpha^2})t}$$

schon die Lösung in reeller Form.

Beide Exponenten sind für positive t negativ. Daraus folgt, daß auch hier

$$\lim_{t=\infty} \vartheta = 0$$

ist. Aber eine Schwingung kommt hier nicht zustande. Denn ϑ kann höchstens einmal Null werden für endliche t. $\vartheta = 0$ nämlich gibt

$$e^{2t\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}} = -\frac{B}{A}.$$

Da aber die linke Seite von Null an ständig bis ∞ wächst, so kann sie nur einmal den Wert $-\frac{B}{A}$ annehmen und auch dann nur, wenn $-\frac{B}{A}$ positiv ist.

Je nachdem dies der Fall ist, oder nicht, bekommen wir also die beiden folgenden Typen von ϑ, t-Kurven (Fig. 61a und b).

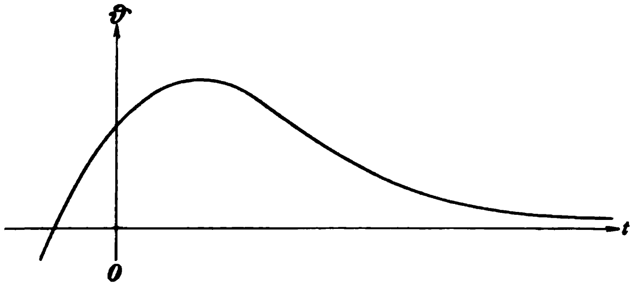


Fig. 61a.

Man spricht in diesem Falle starker Dämpfung auch von einer aperiodischen Bewegung.

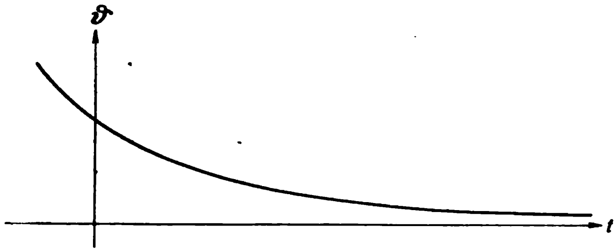


Fig. 61b.

Wie bestimmen sich die Integrationskonstanten A und B?

Sei etwa zu Anfang (für $t = 0$) der Ausschlag $\vartheta = \vartheta_0$ und die Geschwindigkeit $\dot{\vartheta} = \omega_0$ gegeben, so muß sein

$$\vartheta_0 = A + B$$

$$\omega_0 = (\dot{\vartheta})_{t=0} = Au_1 + Bu_2 .$$

Daraus folgt

$$A = \frac{u_2\vartheta_0 - \omega_0}{u_2 - u_1}$$

$$B = \frac{\omega_0 - u_1\vartheta_0}{u_2 - u_1}$$

und

$$\vartheta = \frac{1}{u_2 - u_1}\left\{(u_2\vartheta_0 - \omega_0)\,e^{u_1 t} + (\omega_0 - u_1\vartheta_0)\,e^{u_2 t}\right\}.$$

c) Der Zwischenfall: $\alpha = \lambda$. Hier wird $u_1 = u_2$ und unsere Lösung

$$\vartheta = Ae^{u_1 t} + Be^{u_2 t}$$

wird deshalb ungenügend, weil sie nur noch eine Integrationskonstante $A + B$ enthält.

Man kann aber die allgemeine Lösung, welche den Anfangswerten ϑ_0, ω_0 entspricht, finden, wenn man in der allgemeinen Lösung für $u_2 \neq u_1$

$$\vartheta = \frac{1}{u_2 - u_1}\left\{-\omega_0 (e^{u_1 t} - e^{u_2 t}) + \vartheta_0 (u_2 e^{u_1 t} - u_1 e^{u_2 t})\right\}$$

den Grenzübergang $u_2 = u_1 = -\lambda$ ausführt. Dieser Grenzübergang ist gestattet, da, wie plausibel ist, aber auch mathematisch bewiesen werden kann, die Lösung einer Differentialgleichung eine stetige Funktion der in ihr enthaltenen Parameter ist, also hier von λ und α, so lange $\ddot{\vartheta}$ eine reguläre Funktion von ϑ, $\dot{\vartheta}$, t, α, λ bleibt, was hier, wo $\ddot{\vartheta} = -2\lambda\dot{\vartheta} - \alpha^2\vartheta$ ist, für endliche Werte von λ, $\dot{\vartheta}$, α^2, ϑ sicher zutrifft. Wir dürfen also den Grenzübergang $\lambda = \alpha$ oder $u_1 = u_2 = -\lambda$ vollziehen.

Setzen wir zu dem Zweck $\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2} = -\varepsilon$, also

$$u_2 = -\lambda + \varepsilon$$

$$u_1 = -\lambda - \varepsilon$$

$$u_2 - u_1 = 2\varepsilon,$$

so haben wir zu bilden

$$\lim_{\varepsilon = 0} \frac{1}{2\varepsilon}\left\{-\omega_0 e^{-\lambda t}(e^{-\varepsilon t} - e^{+\varepsilon t}) - \vartheta_0 \lambda e^{-\lambda t}(e^{-\varepsilon t} - e^{+\varepsilon t}) + \varepsilon\vartheta_0 e^{-\lambda t}(e^{-\varepsilon t} + e^{+\varepsilon t})\right\}$$

$$= -(\omega_0 + \lambda\vartheta_0)e^{-\lambda t} \lim \frac{e^{-\varepsilon t} - e^{+\varepsilon t}}{2\varepsilon} + \frac{1}{2}\vartheta_0 e^{-\lambda t} \lim (e^{-\varepsilon t} + e^{+\varepsilon t}).$$

Nun ist aber

$$\lim_{\varepsilon = 0} \frac{e^{\varepsilon t} - e^{-\varepsilon t}}{2\varepsilon} = t$$

$$\lim_{\varepsilon = 0} e^{\varepsilon t} + e^{-\varepsilon t} = 2,$$

also wird

$$\vartheta = e^{-\lambda t}(\vartheta_0 + (\omega_0 + \lambda\vartheta_0)t).$$

Man sieht daraus, daß außer $e^{-\lambda t}$ in diesem Falle auch noch $te^{-\lambda t}$ eine partikuläre Lösung ist. Das kann natürlich direkt verifiziert werden.

Auch hier ist

$$\lim_{t = \infty} \vartheta = 0,$$

da $te^{-\lambda t}$ mit wachsendem t gegen Null geht; ferner wird ϑ für reelle endliche t nur einmal Null, nämlich für $t = \frac{-\vartheta_0}{\omega_0 + \lambda\vartheta_0}$. Qualitativ sieht also die ϑ, t-Kurve genau so aus wie im Falle b).

Aufgaben: 42. Man nehme für den Fall $\alpha = \lambda$, $\vartheta_0 = 0$ für $t = 0$, d. h. man zähle die Zeit vom Durchgang durch die Ruhelage an. Man beweise, daß dann die Zeit bis zum Eintreffen des Maximums des Ausschlags gerade die sogenannte „Relaxationszeit", d. h. $\frac{1}{\lambda}$ ist.

43. Wie ergibt sich anschaulich der stetige Übergang der ϑ, t-Kurve aus dem Falle a) in den Fall c)? Man überlege, was aus τ wird, wenn sich λ wachsend dem α nähert.

§ 16. Theorie der erzwungenen Schwingung bei einem Freiheitsgrad.

73. Das Seismometer und der Pallograph. Denken wir uns ein mathematisches Pendel an einem Stativ aufgehängt und dieses Stativ horizontal in einer Ebene in gegebener Weise hin- und herbewegt. Dann wird das Pendel relativ zum Stativ in Schwingungen geraten. Man kann also ein Pendel benutzen, um Erschütterungen der Unterlage anzuzeigen, es fragt sich, wie weit man durch die beobachteten Schwingungen auf die Natur jener Erschütterungen rückschließen kann.

Man hat tatsächlich Pendel konstruiert oder doch Apparate, welche denselben mechanischen Gesetzen gehorchen wie ein solches Pendel, um Erschütterungen der Umgebung des Pendels feststellen und messen zu können. Handelt es sich um Erschütterungen des Bodens, also Erdbeben, so nennt man den Apparat ein Seismometer, in anderen Fällen spricht man von einem Pallographen. Seismometer werden in den letzten Jahren vielfach zur wissenschaftlichen Erforschung der Erdbeben angewendet. Die ersten Apparate wurden in Italien, Österreich und Japan konstruiert; einer der feinsten und empfindlichsten wurde von Wiechert in Göttingen aufgestellt.

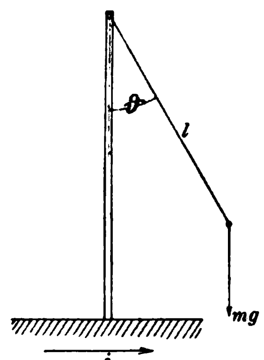


Fig. 62.

74. Ableitung der Differentialgleichung. Ihre allgemeine Bedeutung. Es bewege sich das Stativ horizontal mit einer gegebenen Geschwindigkeit $\dot{c}$, das Pendel schwinge relativ zum Stativ, der Ausschlagwinkel sei ϑ.

Bei Anwendung des Newtonschen Gesetzes haben wir natürlich die absolute Beschleunigung zu verwenden. Diese hat aber hier, wo die führende Bewegung des Stativs eine Translationsbewegung ist, parallel zur Tangente der relativen Kreisbahn des Pendelkörpers die Komponente (siehe Nr. 30) $\ddot{c} \cos \vartheta + l\ddot{\vartheta}$.

Also gibt das Newtonsche Grundgesetz

$$m(\ddot{c} \cos \vartheta + l\ddot{\vartheta}) = - mg \sin \vartheta - W(l\dot{\vartheta})$$

Wir haben auch hier außer der Schwerkraft eine Art Luftwiderstand angenommen, welcher von der relativen Geschwindigkeit $l\dot{\vartheta}$ abhängt. Eine solche Dämpfung ist für die in Rede stehenden Apparate wesentlich. Sie wird allerdings meist nicht direkt durch den Widerstand des umgebenden Mediums ausgeübt, sondern durch eine Ölbremse: das ist ein Kolben, der durch einen engen mit Öl gefüllten Zylinder hin und hergeht und dabei großen Widerstand findet, der ebenfalls als eine mit der Geschwindigkeit wachsende Funktion derselben angesehen werden kann und durch Hebel auf den Apparat übertragen wird.

Machen wir nun die Voraussetzung kleiner Schwingungen, so können wir $\sin\vartheta$ durch ϑ, $\cos\vartheta$ durch 1, $W(l\dot{\vartheta})$ durch $\varkappa l\dot{\vartheta}$ ersetzen.

Unsere Differentialgleichung nimmt dann die Form an

$$\ddot{\vartheta} + 2\lambda\dot{\vartheta} + \alpha^2\vartheta = f(t), \tag{I}$$

wenn wir

$$2\lambda = \frac{\varkappa}{m}, \quad \alpha^2 = \frac{g}{l}$$

und

$$-\frac{1}{l}\ddot{c} = f(t)$$

setzen dem entsprechend, daß ja c, also auch $\ddot{c}$ eine gegebene Funktion der Zeit sein soll.

Diese Differentialgleichung unterscheidet sich von der in Nr. 72 durch das Glied $f(t)$, welches die Gleichung inhomogen macht.

Wir nennen die Differentialgleichung (I) dieser Nummer die Gleichung der erzwungenen Schwingung bei einem Freiheitsgrad.

Ihre Bedeutung geht weit über das spezielle Problem dieses Paragraphen hinaus. Sie wird stets auftreten, wenn bei einem System von einem Freiheitsgrad (d. h. bei dem eine Variable ϑ genügt, um die Lage anzugeben), erstens eine Kraft da ist, die vom Orte abhängt und also in der Nähe der Ruhelage ($\vartheta = 0$) in erster Linie ϑ proportional gesetzt werden kann, zweitens eine Kraft wirkt, welche von der Geschwindigkeit abhängt und also für kleine Geschwindigkeiten dieser proportional gesetzt werden darf, drittens eine Kraft wirkt, welche von der Zeit direkt abhängt, also unabhängig von der Lage und Geschwindigkeit des Pendels diesem in bestimmter Weise aufgezwungen wird. Aber auch für andere Gebiete ist die Gleichung von fundamentaler Bedeutung, z. B. für die Elektrizitätslehre.

Wir wollen nun der Einfachheit halber annehmen, daß c eine reine Sinusschwingung sei:

$$c = \gamma \sin \nu t.$$

Die tiefere Berechtigung dieser Annahme liegt darin, daß man eine stetig differentiierbare Funktion $f(t)$, die für $t = 0$ und $t = t'$ Null wird, innerhalb dieses Intervalls stets so darstellen kann:

$$f(t) = \gamma \sin \nu t + \gamma_2 \sin 2\nu t + \gamma_3 \sin 3\nu t + \cdots,$$

wo $\nu = \frac{\pi}{t'}$ ist.

Man kann also jedenfalls ein solches $f(t)$ in eine Reihe harmonischer Schwingungen zerlegen; und es läßt sich zeigen, daß sich wegen der Linearität unserer Differentialgleichung das Resultat einzelner harmonischer Schwingungen addiert, d. h. hat

$$\ddot{\vartheta} + 2\lambda\dot{\vartheta} + \alpha^2\vartheta = f_1(t)$$

die Lösung ϑ_1 und

$$\ddot{\vartheta} + 2\lambda\dot{\vartheta} + \alpha^2\vartheta = f_2(t)$$

die Lösung ϑ_2, so hat

$$\ddot{\vartheta} + 2\lambda\dot{\vartheta} + \alpha^2\vartheta = f_1(t) + f_2(t)$$

die Lösung $\vartheta_1 + \vartheta_2$.

Man sieht dies durch Einsetzen als richtig ein. Kennt man also die Lösung für eine harmonische Schwingung, so beherrscht man damit vollständig die Differentialgleichung (I).

Sei demnach

$$c = \gamma \sin \nu t,$$

also

$$\ddot{c} = -\gamma\nu^2 \sin \nu t,$$

so daß

$$f(t) = \frac{\gamma\nu^2}{l} \sin \nu t = \beta \sin \nu t$$

wird, wo $\beta = \frac{\gamma\nu^2}{l}$ gesetzt ist.

75. Integration der Differentialgleichung. Um nun die Differentialgleichung

$$\ddot{\vartheta} + 2\lambda\dot{\vartheta} + \alpha^2\vartheta = \beta \sin \nu t \ldots \tag{I'}$$

zu integrieren, suchen wir zunächst eine partikulare Lösung zu erraten.

Nehmen wir z. B. ein Pendel in die Hand und schwingen es mit der Hand hin und her, so bemerken wir deutlich, wie das Pendel relativ zu unserer Hand sehr bald in demselben Rhythmus schwingt, den unsere Hand hat.

Wir versuchen deshalb den Ansatz in (I'):

$$\vartheta \equiv \vartheta_1 = A \sin \nu t + B \cos \nu t \equiv C \sin(\nu t - \eta),$$

wo

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} C \cos \eta &= A \\ C \sin \eta &= -B, \end{aligned}$$

also
$$\operatorname{tg} \eta = -\frac{B}{A}$$
ist. Aus (I') wird dann
$$\sin \nu t \cdot [-A\nu^2 - 2\lambda\nu B + \alpha^2 A] + \cos \nu t[-B\nu^2 + 2\lambda\nu A + \alpha^2 B] = \sin \nu t \cdot \beta.$$

Diese Gleichung kann in t identisch nur erfüllt werden, wenn
$$-A\nu^2 - 2\lambda\nu B + \alpha^2 A = \beta$$
$$-B\nu^2 + 2\lambda\nu A + \alpha^2 B = 0$$
gesetzt wird.

Aus diesen beiden linearen Gleichungen berechnen sich
$$A = \beta \frac{\alpha^2 - \nu^2}{(\alpha^2 - \nu^2)^2 + 4\lambda^2\nu^2}$$
$$B = -\beta \frac{2\lambda\nu}{(\alpha^2 - \nu^2)^2 + 4\lambda^2\nu^2}.$$

Die Auflösung ist immer mit endlichen A, B möglich, außer für $\lambda = 0$, $\alpha = \nu$. Das tritt aber faktisch nie ein, da immer ein kleines λ dasein wird.

Aus A und B berechnen sich
$$C = \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha^2 - \nu^2)^2 + 4\lambda^2\nu^2}}$$
$$\operatorname{tg} \eta = \frac{2\lambda\nu}{\alpha^2 - \nu^2}.$$

B ist immer negativ, also $\sin \eta$ stets positiv, desgleichen η.

Es gibt also tatsächlich eine ganz bestimmte reine, harmonische Schwingung als Lösung unseres Problems. Die Periode ist dieselbe wie die der erregenden Schwingung (wir wollen $f(t) = \beta \sin \nu t$ die „erregende Schwingung" nennen), *die Amplituden beider Schwingungen sind proportional, die erregte oder erzwungene Schwingung aber* (so wollen wir unsere Partikularlösung nennen) *ist in der Phase stets zurück* (weil $B < 0$, also $\eta > 0$).

Die erzwungene Schwingung ϑ_1 ist aber noch nicht die allgemeine Lösung, denn ϑ_1 enthält ja gar keine willkürlichen Konstanten.

Um die allgemeine Lösung zu finden, setzen wir
$$\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$$
und bekommen
$$\ddot{\vartheta}_2 + 2\lambda\dot{\vartheta}_2 + \alpha^2\vartheta_2 = 0.$$

Daraus folgt (siehe Nr. 72), wenn wir annehmen, daß $\lambda < \alpha$ sei,
$$\vartheta_2 = a e^{-\lambda t} \sin(kt + \varepsilon),$$
wo $k = \sqrt{\alpha^2 - \lambda^2}$ ist.

Es kommt also bei der allgemeinen Lösung unseres Problems zu der erzwungenen Schwingung noch eine allgemeine freie gedämpfte Schwingung hinzu.

Die beiden noch freien Konstanten a und ε dienen dazu, die Lösung den gegeben zu denkenden Anfangsbedingungen (Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit des Pendels) anzupassen.

76. Diskussion des Resultats. Wäre nur ϑ_1 vorhanden, so könnte man daraus sehr klar den Charakter der erregenden Schwingung erkennen: die Periode derselben hätte man sofort, die Amplitude wäre derjenigen von ϑ_1 proportional, der Proportionalitätsfaktor ist leicht aus den Konstanten α, λ des Apparates und aus ν zu berechnen. Die Überlagerung von ϑ_2 wird den Rückschluß erschweren wegen der unkontrollierbaren a, ε. Nun verschwindet aber ϑ_2 im Laufe der Zeit und um so schneller, je größer λ ist. Deshalb bedürfen auch Seismometer und Pallographen einer hinreichenden Dämpfung, um den störenden Einfluß der freien Schwingung recht bald zum Verschwinden zu bringen.

Ist $f(t)$ also β gegeben, so wird die Amplitude der erregten Schwingung bei veränderlich gedachtem α am größten, wenn $\alpha = \nu$ ist, d. h. wenn die Periode der freien, ungedämpften Schwingung des Apparates mit derjenigen der erregenden Schwingung übereinstimmt. Man nennt diesen Fall den der Resonanz. Ist nicht β gegeben, sondern γ, so ist

$$C = \gamma \frac{\nu^2}{l\sqrt{(\alpha^2 - \nu^2)^2 + 4\lambda^2\nu^2}} = \gamma \frac{\nu^2\alpha^2}{g\sqrt{(\alpha^2 - \nu^2)^2 + 4\lambda^2\nu^2}}.$$

Der Faktor von γ wird jetzt ein Maximum, wie man leicht berechnet, wenn

$$\alpha^2 = \nu^2 + 4\lambda^2$$

ist. Der Fall stärkster Wirkung ist also bei kleinem λ gegen den Fall der Resonanz ein wenig verschoben.

Da man vor allem die sehr geringen Erschütterungen in großen Entfernungen vom Erdbebenherde messen will, so konstruiert man die Seismometer so, daß sie mit den häufig vorkommenden Perioden von Erdbebenwellen in Resonanz stehen. Es kommen Perioden von 10″ bis 1′ in Frage.

Was die Phasenverschiebung angeht, so ist $\operatorname{tg} \eta = \infty$ im Falle der Resonanz. Der Phasenunterschied beträgt dann also eine Viertelschwingung. Ist $\alpha > \nu$, pulsiert also die erregende Schwingung langsamer als die freie Schwingung — die man auch die Eigenschwingung des Apparates nennt — so ist η klein; ist aber $\alpha < \nu$, geht also die erregende Schwingung schneller als die freie Schwingung, so wird $\operatorname{tg} \eta < 0$, also $\eta > \frac{\pi}{2}$, die Phasendifferenz nähert sich einer halben Schwingung, um so schneller, je kleiner λ ist.

Bei einem gewöhnlichen Pendel sind deshalb fast nur die extremen Fälle $\eta = 0$ und $\eta = \pi$ beobachtbar; bei kleinem λ drängen sich die merkbaren Zwischenwerte auf einen kleinen Bereich der Variabeln ν zusammen. Die η, ν-Kurve wird sich mit abnehmendem λ immer mehr der gebrochenen Linie $OABC$ nähern.

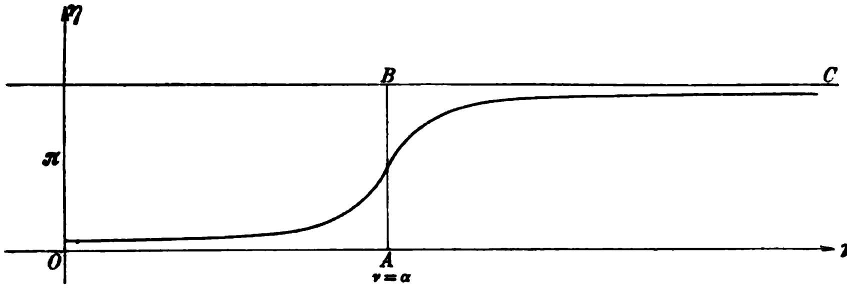


Fig. 63.

Weiteres über Seismometer findet man in den Abhandlungen von Wiechert in der „Physikalischen Zeitschrift“, Bd. 4 (1903).

Aufgabe 44: Welche Dimensionen haben λ und α?

Es sei zum Schlusse dieses Paragraphen noch auf die hervorragende allgemeine Bedeutung der Resonanzerscheinung hingewiesen. Alle Systeme, welche Schwingungen ausführen können, sind empfindlich gegen Kraftwirkungen, die mit ihren Eigenschwingungen in Resonanz stehen. Sie geraten dann in heftige Schwingungen und ihre Festigkeit wird sehr beansprucht. So können unter taktmäßig bewegter Last Brücken einstürzen, welche die entsprechende ruhende Last leicht getragen hätten, so können Schiffsschraubenwellen brechen, wenn ihre, einer Verdrehung entsprechenden elastischen Eigenschwingungen in Resonanz mit Unregelmäßigkeiten der Kraftwirkung der Maschine stehen. Ein schönes Beispiel ist auch die dünne elastische Welle einer Lavalturbine. Bei sehr geringer Exzentrizität wird sie dann in starke Schwingungen geraten, wenn die Umlaufszeit mit ihrer eigenen Schwingungszeit übereinstimmt. Denn dann wird die Zentrifugalkraft hinsichtlich der Welle dieselbe Periode haben wie die elastische Eigenschwingung der Welle. Liegen aber beide Zeiten hinreichend weit auseinander, so läuft die Welle ganz ruhig um.

Literatur:

Lorenz, Dynamik der Kurbelgetriebe. 1901.
Frahm, Neue Untersuchungen . . . . . Z. d. V. d. J. 1902.

Reißner, Schwingungsaufgaben aus der Theorie des Fachwerks. Diss. 1902.
Hort, Technische Schwingungslehre (Lehrbuch).
v. Mises, Über die Stabilität rotierender Wellen. Monatshefte für Math. und Phys. 1911.

Kapitel III.

Energie und Arbeit.

§ 17. Der Energiesatz in der Punktmechanik.

77. Historische Bemerkungen. Zwei verschiedene Ideen tauchen historisch gleich im Anfange der Entwicklung der Mechanik auf: erstens die Idee, daß ein auf eine gewisse Höhe gehobenes Gewicht ein ganz bestimmtes Maß von Arbeitsfähigkeit besitze und zweitens der Gedanke, daß in dem Wechsel der Bewegungserscheinungen eine bestimmte Größe für das ganze Weltall ungeändert bleibe. Den ersten Gedanken sprach zuerst klar Jordanus de Nemore aus, der etwa um 1300 lebte und mit dem die selbständige mechanische Forschung nach dem Altertum wieder beginnt: ein Gewicht auf doppelte Höhe gebracht, leistet dasselbe wie das doppelte Gewicht auf einfache Höhe gebracht. Lionardo da Vinci bildete den Gedanken weiter aus. Von dem andern Prinzip tritt zuerst der negative Teil hervor: die Unmöglichkeit des Perpetuum mobile: Bewegung kann nicht aus nichts entstehen, oder indem man stillschweigend die stets Bewegung verzehrende Wirkung der Widerstände hinzunahm: ein System kann sich ohne Wirkung von außen oder innere physikalische oder chemische Umwandlungsprozesse nicht dauernd in Bewegung erhalten. Allerdings setzte sich dieser Grundsatz erst langsam durch, es fehlt ja selbst heute nicht an Versuchen, ein perpetuum mobile zu konstruieren: Lionardo selbst hat es verschiedentlich versucht. Aber schon Simon Stevin beweist durch eine richtige Anwendung des Prinzips 1586 das Gesetz der schiefen Ebene, Galilei zieht richtige Schlußfolgerungen daraus und Huyghens leitet am Ende des 17. Jahrhunderts aus dem Prinzip zum ersten Male die Bewegungsgleichung für das physische Pendel ab (siehe Nr. 246).

Was den positiven Teil des Prinzips angeht, so behauptete Descartes die Konstanz von Σmv, Leibniz dagegen die von Σmv^2. Newton schloß sich der ersten Ansicht an.

Ob man nun Σmv oder Σmv^2 Energie nennen wollte, war natürlich ein Wortstreit, was zuerst D'Alembert 1743 in seinem Traité de Dynamique klar aussprach. Aber der Streit drehte sich doch um mehr als um ein bloßes Wort.

Wir müssen natürlich heute die Frage, ob im ganzen Weltall $\Sigma m v^2$ oder $\Sigma m v$ konstant sei, als metaphysisch ablehnen: wir wissen nicht einmal, ob diese Begriffe für die ganze Welt Sinn haben. Trotzdem können wir, das Wesentliche aus den beiden Grundgedanken der Alten herausschälend, in gewissem Sinne Leibniz Recht geben.

Wir wollen nämlich die Begriffe der kinetischen Energie und den der Arbeit für einen Massenpunkt in folgender Weise einführen:

78. Axiomatische Einführung der Begriffe: kinetische Energie und Arbeit.[1]) Wir postulieren:

1. Es sei für einen Punkt der Masse m die „kinetische Energie“ oder „lebendige Kraft“ E eine Funktion von m und v allein, welche für $v = 0$ verschwinde:

$$E = \varphi(m, v)$$
$$\varphi(m, 0) = 0.$$

2. Es sei die Arbeit A, welche eine Kraft $\bar{k}$ an dem bewegten Punkte leistet, wenn derselbe sich auf einer Bahn von der Stelle X_0 zur Stelle X bewegt, ein sogenanntes Kurvenintegral, d. h. ein Integral der Form

$$A = \int_{X_0}^{X} (X dx + Y dy + Z dz),$$

dieses Integral erstreckt sich über die Kurve von X_0 bis X. Bezeichnen wir den Vektor mit den Komponenten X, Y, Z mit $\bar{K}$, so können wir das Integral schreiben

$$A = \int_{X_0}^{X} \bar{K} \cdot d\bar{r},$$

wo $\bar{K} \cdot d\bar{r}$ das sogenannte innere Produkt der Vektoren $\bar{K}$ und $d\bar{r}$ bezeichnet (siehe Anhang).

3. Es sei $\bar{K}$ eine Funktion von $\bar{k}$ allein.

4. Es bestehe die Beziehung

$$E - E_0 = A,$$

(wobei E_0 die kinetische Energie an der Stelle X_0 bezeichne), vermöge der Newtonschen Grundgleichung

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{k}.$$

In dem vierten Postulat steckt das gesuchte Energieprinzip. Die Arbeit einer Kraft besteht in einer Veränderung der kinetischen Energie; ohne äußere Arbeit kann der Punkt seine Energie nicht verändern.

1) Der Anfänger kann diese Nummer überschlagen.

Wir ziehen die Schlußfolgerungen. Aus 4. und 2. folgt durch Differentiation

$$\frac{dE}{dt} = \overline{K} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt}$$

oder nach (1)

$$\frac{d\varphi}{dv}\,\frac{dv}{dt} = \overline{K} \cdot \bar{v} = \overline{K} \cdot \bar{\sigma} v,$$

wenn $\bar{\sigma}$ den Einheitsvektor in Richtung der Bewegung bedeutet.

Aus dem Newtonschen Grundgesetz folgt aber

$$m\,\frac{dv}{dt} = \bar{k} \cdot \bar{\sigma},$$

also, indem wir dies einsetzen

$$\frac{1}{mv}\,\frac{d\varphi}{dv} = \frac{\overline{K} \cdot \bar{\sigma}}{\bar{k} \cdot \bar{\sigma}}.$$

In dieser Gleichung kommen links nur noch v und m, rechts nur noch $\bar{k}$ und $\bar{\sigma}$ vor. Diese vier Größen sind als unabhängig zu betrachten, denn man kann in jedem Zeitmoment $\bar{k}$, $\bar{v}$, m geben, dann erst bestimmt die Newtonsche Grundgleichung $\bar{w}$.

Also hängen in der vorstehenden Gleichung beide Seiten weder von $\bar{k}$, $\bar{\sigma}$ ab, weil die linke es nicht tut, noch von v, m ab, weil die rechte es nicht tut. Mithin ist.

$$\frac{1}{mv}\,\frac{d\varphi}{dv} = c$$

$$\overline{K} \cdot \bar{\ } = \bar{k} \cdot \bar{\sigma} \cdot c,$$

woraus in Verbindung damit, daß $\varphi(m, 0) = 0$ sein sollte, folgt

$$\varphi = \frac{1}{2}\,cmv^2$$

$$\overline{K} = c\bar{k}.$$

Die Konstante c ist natürlich ganz bedeutungslos, wir setzen sie gleich 1 und haben so erhalten:

die kinetische Energie eines Punktes ist auf Grund unserer Postulate gleich

$$E = \frac{1}{2}\,mv^2$$

zu setzen; die Arbeit einer Kraft $\bar{k}$ gleich

$$A = \int_{X_0}^{X} \bar{k} \cdot d\bar{r}.$$

Es besteht dann der Energiesatz:

$$E - E_0 = A.$$

79. Elementare Einführung der Begriffe. Wir definieren als kinetische Energie oder lebendige Kraft eines Massenpunktes den Ausdruck

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \bar{v}^2. \tag{1}$$

Dann ist

$$\frac{dE}{dt} = mv \frac{dv}{dt} = m\bar{v} \cdot \frac{d\bar{v}}{dt},$$

wobei unter $\bar{a} \cdot \bar{b}$ das innere Produkt der Vektoren $\bar{a}$ und $\bar{b}$ verstanden ist (siehe Anhang I, 4).

Nun ist aber

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{k},$$

wo $\bar{k}$ die Summe der äußeren Kräfte bedeutet. Folglich

$$\frac{dE}{dt} = \bar{v} \cdot \bar{k}. \tag{2}$$

Ist $\bar{k}$ irgendeine Kraft, die auf den Punkt wirkt, so heiße $L = \bar{v} \cdot \bar{k}$ die Leistung der Kraft. Es ist

$$L = \bar{v} \cdot \bar{k} = \frac{\bar{k} \cdot d\bar{r}}{dt} \equiv \frac{dA}{dt}.$$

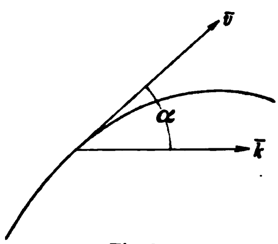


Fig. 64.

$dA = \bar{k} \cdot d\bar{r}$ heiße die (unendlich kleine) Arbeit, welche die Kraft $\bar{k}$ bei der Verschiebung $d\bar{r}$ leistet. In rechtwinkligen Komponenten ist

$$dA = k_x dx + k_y dy + k_z dz,$$

auch ist nach der Bedeutung des inneren Produktes $dA = k \cdot ds \cos\alpha$, d. h.

Die unendlich kleine Arbeit einer Kraft in der Zeit dt ist gleich dem unendlich kleinen Weg ds, den der Punkt in dieser Zeit zurücklegt, multipliziert mit der Projektion der Kraft auf die Richtung des Weges.

Aus (2) folgt

$$dE = dA$$

oder der Energiesatz der Punktmechanik

$$E - E_0 = \int dA = A. \tag{I}$$

Die Veränderung der kinetischen Energie des repräsentierenden Punktes während einer Zeit ist gleich der gesamten, während dieser Zeit von den äußeren Kräften an dem Punkte geleisteten Arbeit.

80. Unterschied des Energiesatzes für die Punktmechanik von dem Energiesatz für Systeme. In der bisherigen Betrachtung war m die ganze Masse des Systems, v die Schwerpunktsgeschwindigkeit. Die Arbeit aber berechneten wir so, daß wir das innere Produkt aus der Kraft und der Verschiebung des Schwerpunkts, nicht aber derjenigen des Angriffspunktes der Kraft, bildeten. Für die so bestimmten Begriffe gilt der am Schluß der vorigen Nummer ausgesprochene Energiesatz, den wir den Energiesatz der Punktmechanik nennen wollen.

Unter der gesamten kinetischen Energie eines Systems aber wollen wir den Ausdruck verstehen:

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2} \mathfrak{S}\, dm v^2,$$

wo v die Geschwindigkeit des Massenelements dm bedeutet. Es ist klar, daß $\mathfrak{E}$ und E im allgemeinen sehr verschieden sein werden. Nur in einigen Fällen, wenn z. B. alle $\bar{v}$ einander gleich sind, das System also eine Translation vollführt, ist $\mathfrak{E} = E$.

Ebenso wollen wir die eigentliche Arbeit so bilden, daß wir setzen

$$dA = \bar{k} \cdot d\bar{r},$$

wobei $d\bar{r}$ die Verschiebung des wirklichen Angriffspunktes der Kraft $\bar{k}$ bedeutet.

Für diese vervollkommneten Begriffe nimmt aber der Energiesatz eine ganz andere Form an als die oben zu Ende von Nr. 79 ausgesprochene (siehe die §§ 44, 50 und 55).

81. Dimensionen und Maßeinheiten. E und A haben dieselbe Dimension. Im physikalischen Maßsystem ist

$$[E] = [A] = [m \cdot v^2] = [\text{g cm}^2\, \text{sec}^{-2}].$$

Die Einheit heißt ein Erg, es ist die Arbeit eines Dyns bei Zurücklegung eines cm. Die Leistung hat die Dimension $[L] = [\text{g cm}^2\, \text{sec}^{-3}]$; 10^7 Erg pro Sekunde heißen ein Watt.

Im technischen Maßsystem haben E und A die Dimension

$$[E] = [A] = [\text{kg} \cdot \text{m}],$$

die Leistung

$$[L] = [\text{kgm sec}^{-1}].$$

Eine Leistung von 75 mkg/Sec wird herkömmlicherweise eine Pferdestärke, 1 P.S. oder 1 HP. genannt. Da ein kg Kraft gleich 981000 Dyn ist, so ist die Arbeit eines mkg gleich 98100000 Erg. Da für die Praxis 1 mkg oft noch eine zu kleine Arbeitseinheit ist, hat man als Einheit die Arbeit eingeführt, welche eine HP. in einer Stunde leistet, die sogenannte Pferdekraftstunde. Sie umfaßt natürlich $75 \times 60 \times 60$, d. i. 270000 kgm.

82. Weitere Sätze über die Arbeit. 1. Steht eine Kraft senkrecht zur Bewegungsrichtung, so leistet sie keine Arbeit. (Beispiel: der Normaldruck einer festen Stützfläche, die Fadenspannung des Pendels.)

2. Das distributive Gesetz der skalaren Multiplikation

$$(\bar{k}_1 + \bar{k}_2) \cdot d\bar{r} = \bar{k}_1 \cdot d\bar{r} + \bar{k}_2 \cdot d\bar{r}$$

heißt: *Die Arbeit der Resultierenden mehrerer Kräfte ist gleich der algebraischen Summe der Arbeiten ihrer Komponenten.*

3. Es sei die Kraft $\bar{k}$ konstant nach Größe und Richtung, wie es z. B. bei der Schwerkraft der Fall ist. Dann ist die endliche Arbeit

$$A = \int_{X_0}^{X} \bar{k} \cdot d\bar{r} = \bar{k} \cdot \int d\bar{r} = \bar{k} \cdot (\bar{r} - \bar{r}_0) = \bar{k} \cdot \bar{s} = kh$$

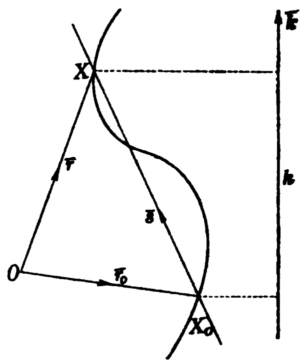


Fig. 65.

(siehe Figur), wenn h die Projektion der geraden Strecke X_0X auf die Kraftrichtung bedeutet, positiv gezählt, wenn sie, im Sinne der Bewegung genommen, in die Richtung der Kraft hineinfällt.

So berechnet sich die Arbeit der Schwerkraft einfach als das Produkt aus dem Gewicht und der gesamten Fallhöhe, diese nach unten positiv, nach oben negativ gerechnet.

Kommt bei einer Bewegung der Körper wieder auf derselben Höhe an, von der er ausgegangen ist, so hat die Schwerkraft im ganzen keine Arbeit geleistet.

83. Über die Bedeutung des Energiesatzes. Es könnte zunächst scheinen, als ob durch den Energiesatz nicht viel gewonnen wäre. Denn da er, in der Punktmechanik wenigstens, eine Folge der Newtonschen Grundgleichung ist, können wir mit ihm kein Problem lösen, das wir nicht auch mit der Newtonschen Grundgleichung hätten erledigen können.

Trotzdem sind die Begriffe Energie und Arbeit fundamental für die Mechanik geworden:

1. Wir werden ihre formale Kraft später in der Mechanik der Systeme kennen lernen (siehe die §§ 48 und 56).

2. Der Energiebegriff hat sich, soweit unsere heutigen Kenntnisse reichen, auf alle Naturerscheinungen ausdehnen lassen: nach den fundamentalen Untersuchungen von Robert Mayer, Helmholtz („Über die Erhaltung der Kraft“, auch in Ostwalds Klassikern) u. a. läßt sich in jedem Erscheinungsgebiet ein Begriff der Energie aufstellen — für die reinen Bewegungserscheinungen ist es $\mathfrak{E} = \frac{1}{2}\mathfrak{S}\, dmv^2$ — so

daß für einen jeden uns bekannten Teil der materiellen Welt der Energiesatz gilt: Die Änderung der gesamten Energie des betrachteten Teils in einer Zeit ist gleich der in derselben Zeit von außen zugeführten bzw. nach außen abgegebenen Energie.

Wäre eine Interpretation jeder Energieart als Bewegungsenergie möglich, so wäre Leibnizens Traum erfüllt.

3. Der Nutzen für uns besteht zunächst in einer Methode, die Differentialgleichungen der Bewegung zu integrieren.

Wir hatten schon früher gesagt, daß man jede Gleichung der Form

$$\ddot{x} = f(x)$$

auf Quadraturen zurückführen kann, indem man die Gleichung daraus gewinnt

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = \int f(x)\,dx + h$$

(siehe Nr. 67, Beispiel 2).

Diese Gleichung ist nichts anderes als die Energiegleichung für $m = 1$, $k = f(x)$. Die Integrationskonstante h ist $\frac{1}{2} v_0^2$.

Wir werden die Energiegleichung stets dann mit Nutzen anwenden können, wenn sich $A = \int \bar{k} \cdot d\bar{r}$ vor Kenntnis der Bewegung integrieren läßt und wenn nur eine abhängige Variable vorkommt, so daß wir auch nur eine Gleichung brauchen.

Prinzipielles darüber im nächsten Paragraphen, jetzt einige

84. Beispiele und Aufgaben.

1. Auf welche Strecke kann ein mit der Geschwindigkeit v_0 fahrender Eisenbahnzug vom Gewicht G günstigstenfalls zum Stehen gebracht werden, wenn alle Räder gebremst werden? Die Strecke sei horizontal, vom Luftwiderstand werde abgesehen.

Dann sind die äußeren Kräfte die Schwerkraft, der Normaldruck und die Reibung zwischen den Rädern und Schienen.

Die beiden ersten Kräfte leisten keine Arbeit. Sei der Normaldruck an einem Rade N, so ist

$$\Sigma N = G.$$

Sei die Reibung an einem Rade R, so lautet der Energiesatz der Punktmechanik:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -\int_0^s \Sigma R\, ds.$$

In unserem Falle ist nun $v = 0$, v_0 gegeben. Also

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \int_0^s \Sigma R\, ds.$$

Nun ist $R \leq f \cdot N$ (denn man bremst Räder grundsätzlich nicht fest, weil Schleifen schädlich und unnütz ist, warum?), also

$$\Sigma R \leq f \cdot \Sigma N = fG,$$

somit

$$\frac{1}{2} m v_0^2 \leq \int_0^s f G ds = f G s,$$

d. h.

$$s \geq \frac{m v_0^2}{2 f G} = \frac{v_0^2}{2 f g}.$$

Damit ist nur eine untere Grenze für den Bremsweg gefunden; denn man weiß nicht, ob die Haftreibung ganz ausgenützt wird.

(Eine ausführliche Behandlung des ganzen Bremsproblems mit Berücksichtigung variabeln f's findet man in einem Aufsatz: „Zur Theorie der Eisenbahnbremsen" von A. Sommerfeld in der Denkschrift der Techn. Hochschule zu Aachen aus Anlaß der Industrie-Ausstellung in Düsseldorf, 1902).

Beispiel 2. Es gleite ein Körper auf einer glatten Kurve ohne Reibung, lediglich unter der Wirkung der Schwerkraft herab. Mit welcher Geschwindigkeit kommt er unten an?

Werde die Höhe h von dem Ausgangspunkte der Bewegung nach unten positiv gerechnet, so ist, weil der Normaldruck keine Arbeit leistet,

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = m g h,$$

also

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2 g h}.$$

War $v_0^2 = 0$, so ist

$$v = \sqrt{2 g h}.$$

Die Fallgeschwindigkeit hängt nur von der Fallhöhe h ab. (Das war schon Galilei bekannt.)

Beispiel 3. Auf einer schiefen Ebene der Neigung α gleite ein Körper herab, mit der Geschwindigkeit Null beginnend, unter dem Einfluß der Schwerkraft und der Reibung. Mit welcher Geschwindigkeit kommt er unten an?

Sei h die Höhe, s die Länge der schiefen Ebene, so ist

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g h - s \cdot R,$$

und da $R = fN$ ist und $N = mg \cos \alpha$

$$v = \sqrt{2 g h - 2 s \cdot f \cdot g \cos \alpha} \cdot = \sqrt{2 g (h - s \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \alpha)}.$$

Aufgaben: 45. Auf welcher Kurve kommt bei verschieden geneigten schiefen Ebenen in dem vorhergehenden Beispiel der Punkt mit derselben Geschwindigkeit an?

46. Ein Zug von 10 Wagen zu je 20 Tonnen Gewicht sei eine Böschung von 2 % Steigung und 5 km Länge hinaufzuschaffen. Außer der Schwerkraft werden Bewegungswiderstände zu überwinden sein, die zu $\frac{1}{2}$ % des Gewichts geschätzt sein mögen. Welche Arbeit ist zum Transport des Zuges nötig? Und wie groß ist die sekundliche Leistung der bewegenden Maschine, wenn die Geschwindigkeit 30 km pro Stunde beträgt?

47. Man integriere die Differentialgleichung der freien, ungedämpften Schwingung

$$\ddot{x} + \alpha^2 x = 0$$

nach der in 83 angegebenen Methode.

48. Eine ebene Platte von der Größe F sei unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigt und werde mit der Geschwindigkeit v horizontal in ruhender Luft bewegt. Welches ist die Leistung des Luftwiderstandes unter Annahme des Lößlschen Widerstandsgesetzes? (Siehe Nr. 69.)

§ 18. Die potentielle Energie.

85. Das Potential. Wir wollen die für die Integration der Bewegungsgleichungen wichtige Frage untersuchen, wann sich das Arbeitsintegral von vornherein, ohne Kenntnis der Bewegung, integrieren läßt. Denn im allgemeinen, wenn $\bar{k}$ irgendeine Funktion von $\bar{v}$, $\bar{r}$, t . . . ist, läßt sich das Integral

$$A = \int \bar{k} \cdot d\bar{r} = \int \bar{k} \cdot \bar{v}\, dt$$

erst ausrechnen, wenn man $\bar{v}$, $\bar{r}$, t als Funktionen einer Variablen ausdrücken kann, d. h. wenn man die Bewegung kennt.

Wir wollen nun fragen: Wann läßt sich das zwischen irgendzwei Punkten $X_0(\bar{r}_0)$ und $X(\bar{r})$ erstreckte Integral A berechnen, ohne daß man etwas über die Bewegung weiß, d. h. etwas über Zeit, Geschwindigkeit oder Weg?

Dann muß offenbar A eine bloße Funktion von $\bar{r}_0$ und $\bar{r}$ sein, also

$$\int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} \bar{k} \cdot d\bar{r} = F(\bar{r}, \bar{r}_0).$$

Differentiieren wir diese Gleichung nach der oberen Grenze, so bekommen wir

$$\bar{k} \cdot d\bar{r} = d_{\bar{r}} F(\bar{r}, \bar{r}_0)$$

für alle Differentiale $d\bar{r}$.

Da die linke Seite von $\bar{r}_0$ nicht abhängt, kann es auch die rechte nicht tun, es muß also sein

$$d_{\bar{r}} F(\bar{r}, \bar{r}_0) = -\, d_{\bar{r}}\, U(\bar{r})$$

und

$$F(\bar{r}, \bar{r}_0) = -\, U(\bar{r}) + U(\bar{r}_0),$$

weil F Null wird für $\bar{r} = \bar{r}_0$.

Habe nun $\bar{r}$ die rechtwinkligen Komponenten x, y, z, so ist

$$\begin{aligned} d_{\bar{r}} U &= \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \\ &= \frac{dU}{d\bar{r}} \cdot d\bar{r}, \end{aligned}$$

wenn wir den Vektor mit den Komponenten $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ mit $\frac{dU}{d\bar{r}}$ bezeichnen. Man nennt ihn den G r a d i e n t e n von U, schreibt auch

$$\frac{dU}{d\bar{r}} = \nabla U$$

und nennt aus später zu besprechenden Gründen $-\frac{dU}{d\bar{r}}$ auch das G e f ä l l e von U.

Daß $\frac{dU}{d\bar{r}}$ wirklich ein Vektor ist, d. h. eine gerichtete Strecke darstellt, der eine Bedeutung unabhängig vom Koordinatensystem zukommt, werden wir später sehen.

Aus

$$\bar{k} \cdot d\bar{r} = -d_{\bar{r}} U = -\frac{dU}{d\bar{r}} \cdot d\bar{r}$$

folgt

$$\bar{k} = -\frac{dU}{d\bar{r}}, \tag{I}$$

weil die Relation für alle $d\bar{r}$ gelten soll.

Wenn umgekehrt

$$\bar{k} = -\frac{dU}{d\bar{r}}$$

ist, so folgt:

$$\int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} \bar{k} \cdot d\bar{r} = -\int dU = -U(\bar{r}) + U(\bar{r}_0).$$

Man sagt, die Kraft $\bar{k}$ habe ein Potential, wenn (I) erfüllt ist. U heißt das Potential oder die potentielle Energie.

Das Arbeitsintegral läßt sich nur dann unter allen Umständen von vornherein ausrechnen, wenn die Kraft ein Potential hat.

Man erkennt leicht den Satz:

Haben mehrere Kräfte ein Potential, so hat die Resultierende auch ein Potential, das gleich der Summe der Einzelpotentiale ist.

Haben alle äußeren Kräfte, welche Arbeit leisten, ein Potential, so lautet der Energiesatz:

$$E - E_0 = -U + U_0 \quad \text{oder}$$
$$E + U = h,$$

wo h konstant ist, also

Die Summe aus der kinetischen und aus der potentiellen Energie bleibt im Laufe der Bewegung konstant.

(In älteren Büchern findet man meist $-U$ als Potential bezeichnet.)

Eine additive Konstante zu U bedeutet offenbar nichts, wir können sie also nach Belieben hinzufügen oder fortlassen.

86. Beispiele. 1. Daß die Schwerkraft an der Erdoberfläche ein Potential hat, wissen wir schon. Denn die Arbeit war

$$A = G(z_0 - z),$$

wenn wir z nach oben positiv rechnen, also ist

$$U = Gz$$

das Potential der Schwerkraft.

2. Das Newtonsche Anziehungsgesetz der Planeten (siehe Nr. 38)

$$\bar{k} = -\bar{\varrho}\frac{\lambda m}{r^2}$$

hat ein Potential. Denn, da

$$\bar{r} = \bar{\varrho} \cdot r \quad \text{und}$$

$$\bar{r}^2 = r^2, \quad \text{also}$$

$$\bar{r} \cdot d\bar{r} = r \cdot dr$$

ist, so folgt

$$\int \bar{k} \cdot d\bar{r} = -\lambda m \int \frac{\bar{r} \cdot d\bar{r}}{r^3} = -\lambda m \int \frac{dr}{r^2} = \frac{\lambda m}{r}.$$

Das Potential für die Anziehungskraft der Sonne auf die Planeten ist also

$$U = -\frac{\lambda m}{r}.$$

Aufgaben: 49. Man zeige, daß jede sogenannte Zentralkraft, d. h. eine Kraft, die auf ein festes Zentrum zu (oder fort) gerichtet ist und nur von der Entfernung r des Massenpunktes von diesem Zentrum abhängt, ein Potential hat.

50. Man zeige, daß die Federkraft $-\lambda x$ ein Potential hat.

3. Kräfte, die von der Geschwindigkeit explizit abhängen, können kein Potential haben: Luftwiderstand und Reibung haben also kein Potential.

Denn es ist ja die Gleitreibung

$$\bar{R} = -f' N \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$$

und hängt also selbst bei konstantem f' wesentlich von $\bar{v}$ ab.

87.[1]) **Wann hat eine Kraft ein Potential?** Aus

$$\bar{k} = -\frac{dU}{d\bar{r}} \tag{I}$$

folgt zunächst, daß $\bar{k}$ jedenfalls nur vom Orte abhängen darf. Das genügt aber nicht. Schreiben wir die Gleichung (I) in rechtwinkligen Koordinaten:

$$k_x = -\frac{\partial U}{\partial x},$$

$$k_y = -\frac{\partial U}{\partial y},$$

$$k_z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

1) Der Anfänger kann diese Nummer auslassen.

so folgt

$$\frac{\partial k_z}{\partial y} - \frac{\partial k_y}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial k_x}{\partial z} - \frac{\partial k_z}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial k_y}{\partial x} - \frac{\partial k_x}{\partial y} = 0.$$

Wie die Vektoranalysis zeigt, existiert unabhängig vom Koordinatensystem ein Vektor, dessen Komponenten die linken Seiten der vorstehenden Gleichungen sind: man nennt diesen Vektor den Rotor von $\bar{k}$ und schreibt ihn

$$\operatorname{rot} \bar{k} \quad \text{oder} \quad \bar{\nabla} \bar{k}. .$$

Damit also ein Potential existiere, ist jedenfalls notwendig, daß

$$\operatorname{rot} \bar{k} = 0$$

sei. Diese Bedingung ist auch hinreichend.

Denn setzt man an

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -k_x,$$

so folgt

$$U = -\int_a^x k_x dx + w(y, z), \tag{1}$$

wo $w(y, x)$ eine willkürliche Funktion von y, z ist. Daraus folgt

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\int_a^x \frac{\partial k_x}{\partial y} dx + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$= -\int_a^{x_1} \frac{\partial k_y}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} = -k_y + k_y(a; y, z) + \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Die zweite Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -k_y$$

ist also ebenfalls erfüllt, wenn man nur setzt

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -k_y(a; y, z),$$

was möglich ist. Daraus folgt

$$w = -\int_b^y k_y(a; y, z)\, dy + w'(z), \tag{2}$$

wo w' willkürlich ist.

Es ergibt sich aber weiter aus (1)

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\int_a^x \frac{\partial k_x}{\partial z}\,dx + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$= -\int_a^{x_1} \frac{\partial k_z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$= -k_z + k_z(a;y,z) + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Also ist auch

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -k_z$$

erfüllt, wenn nur noch

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -k_z(a;y,z)$$

erfüllbar ist.

Aus der obigen Gleichung (2) für w ergibt sich aber

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\int_b^y \frac{\partial k_y(a;y,z)}{\partial z}\,dy + \frac{dw'}{dz}$$

$$= -\int_b^y \frac{\partial k_z(a;y,z)}{\partial y}\,dy + \frac{dw'}{dz}$$

$$= -k_z(a;y,z) + k_z(a,b,z) + \frac{dw'}{dz}.$$

Es sind also beide Bedingungen für w erfüllt, wenn man nur noch aus

$$\frac{dw'}{dz} = -k_z(a,b,z)$$

$$w' = -\int k_z(a,b,z)\,dz$$

bestimmt, was natürlich möglich ist.

Damit ist der Beweis erbracht.

Aufgabe 51: Man überzeuge sich, daß in den Beispielen 1 und 2 der vorigen Nummer die Bedingung rot $\bar{k} = 0$ wirklich erfüllt ist.

88. Niveaufläche und Gradient. Betrachten wir die Gleichung

$$U(\bar{r}) = C,$$

wo C konstant, so stellt dieselbe eine Fläche dar, oder eine Flächenschar, wenn wir C alle möglichen Werte durchlaufen lassen. Wir nennen die Flächen Niveauflächen oder Potentialflächen.

Bestimmen wir nun in bezug auf irgendein Koordinatensystem den Vektor mit den Komponenten

$$-\frac{\partial U}{\partial x},\quad -\frac{\partial U}{\partial y},\quad -\frac{\partial U}{\partial z},$$

d. h. $-\frac{dU}{d\bar{r}}$, so wollen wir zeigen, daß diesem eine Bedeutung unabhängig vom Koordinatensystem zukommt. Es gilt

$$dU = \frac{dU}{d\bar{r}} \cdot d\bar{r}$$

für alle $d\bar{r}$.

Liege nun zunächst $d\bar{r}$ in der Fläche, so ist wegen $U = C$, $dU = 0$, also auch

$$\frac{dU}{d\bar{r}} \cdot d\bar{r} = 0,$$

d. h. $\frac{dU}{d\bar{r}}$ steht auf $d\bar{r}$ senkrecht, oder:

Der Gradient steht auf der Niveaufläche senkrecht.

Sei jetzt $\bar{\nu}$ der Einheitsvektor senkrecht zur Niveaufläche und zwar nach der Seite abnehmenden U's gerichtet.

Wählen wir $d\bar{r} = \bar{\nu} \cdot dn$ mit positivem dn, so ist dU negativ. Sonach erhalten wir

$$0 > dU = \frac{dU}{d\bar{r}} \cdot \bar{\nu} \cdot dn,$$

also

$$-\frac{dU}{d\bar{r}} \cdot \bar{\nu} = -\frac{dU}{dn} > 0.$$

Es ist also $-\frac{dU}{d\bar{r}}$ *nach der Seite abnehmenden Potentials zugerichtet.*

Da ferner $|\bar{\nu}| = 1$ und $-\frac{dU}{d\bar{r}}$ und $\bar{\nu}$ dieselbe Richtung haben, so folgt

$$\left|\frac{dU}{d\bar{r}}\right| = \frac{dU}{dn}.$$

Es steht also $-\frac{dU}{d\bar{r}}$ *auf der Potentialfläche senkrecht, ist nach der Seite abnehmenden Potentials zugerichtet und seine Größe ist gleich dem Differentialquotienten von U nach der Normalrichtung zur Fläche.*

Das ist zugleich die Richtung stärksten Gefälles von U, denn dn ist der kürzeste Abstand zweier Potentialflächen, deren Konstanten C sich um dU unterscheiden. Daher der Name „Gefälle“ für $-\frac{dU}{d\bar{r}}$.

Beispiele: Für die Schwerkraft sind die Potentialflächen horizontale Ebenen, für die Anziehungskraft der Sonne konzentrische Kugeln um die Sonne.

89. Der Begriff der potentiellen Energie für ein beliebiges System. Unsere bisherigen Betrachtungen galten für einen einzigen Punkt. Wenn sie also auf ein System angewendet werden sollen, so ist das System durch den Schwerpunkt zu ersetzen und unter $\bar{k}$ sind die äußeren Kräfte verstanden.

Wir wollen nun allgemein sagen, daß ein Kräftesystem $d\bar{k}$ an einem beliebigen System ein Potential habe, wenn sich die wirkliche Arbeit

$$A = \int \mathrm{S}\, d\bar{k} \cdot d\bar{r}$$

— wo jetzt $d\bar{r}$ die Verschiebungen der wirklichen Angriffspunkte, $\int$ die Integration nach der Zeit, S die Summation über die Kräfte bedeutet —, a priori ohne Kenntnis der Bewegung ausrechnen läßt. Wir nennen dann das unbestimmte Integral

$$-\int \mathrm{S}\, d\bar{k} \cdot d\bar{r} = U$$

die potentielle Energie des Kräftesystems.

Beispiel der Schwerkraft. Die Schwerkraft hat ein Potential, denn es ist

$$-\int \mathrm{S}\, d\bar{k} \cdot d\bar{r} = -\bar{g} \cdot \int \mathrm{S}\, dm \cdot d\bar{r} = -\bar{g} \cdot \mathrm{S}\, dm\, \bar{r}$$
$$= -\bar{g} \cdot m \cdot \bar{r}^{*} = mg \cdot z^{*}.$$

Bei jedem irdischen, materiellen System ist die potentielle Energie der Schwere gleich dem Produkt aus dem Gewicht und aus der Höhe des Schwerpunkts über einer beliebigen, aber festgehaltenen Horizontalebene.

§ 19. Vollständige Theorie der ebenen Bewegung des mathematischen Pendels.

90. Die Energiegleichung. Wir betrachten die Bewegung eines mathematischen Pendels in der durch den Aufhängepunkt gehenden Vertikalebene, ohne daß wir uns auf kleine Schwingungen beschränken (wie in Nr. 66), und ohne Rücksicht auf Widerstände.

Da die einzige Kraft, die Arbeit leistet, die Schwerkraft, ein Potential hat

$$U = mgz,$$

wo

$$z = -l \cos \vartheta,$$

so lautet die Energiegleichung

$$U + E = h,$$

hier

$$\frac{1}{2} m l^2 \dot{\vartheta}^2 - mgl \cos \vartheta = h.$$

Sei für irgendeinen Winkel ϑ_0 die Winkelgeschwindigkeit $\dot\vartheta = \omega_0$ gegeben, so muß für diese Werte die vorstehende Gleichung erfüllt sein, d. h. es ist

$$h = \frac{1}{2} m l^2 \omega_0^2 - m g l \cos \vartheta_0,$$

und die Energiegleichung erhält mit der Abkürzung

$$\nu^2 = \frac{g}{l}$$

die Form

$$\dot\vartheta^2 - 2\nu^2 \cos\vartheta = \omega_0^2 - 2\nu^2 \cos\vartheta_0. \tag{I}$$

Wählen wir z. B. $\vartheta_0 = 0$ und nennen das zugehörige ω_0, also die Winkelgeschwindigkeit im tiefsten Punkte ω_1, so wird aus (I)

$$\dot\vartheta^2 - 2\nu^2 \cos\vartheta = \omega_1^2 - 2\nu^2, \tag{I'}$$

woraus folgt

$$\dot\vartheta = \sqrt{\omega_1^2 - 2\nu^2(1 - \cos\vartheta)} = \sqrt{\omega_1^2 - 4\nu^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}}.$$

Danach sind zwei Fälle denkbar:

1. $\omega_1 > 2\nu$: Die Wurzel wird nie Null, $\dot\vartheta$ bleibt absolut genommen größer als $\sqrt{\omega_1^2 - 4\nu^2}$, das Pendel läuft also immer im selben Sinne rundum. Das ist der Fall des umlaufenden Pendels.

Der Minimalwert von ω

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 - 4\nu^2}$$

wird für $\vartheta = \pi$, d. h. im höchsten Punkte erreicht.

2. $\omega_1 < 2\nu$. Für $\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{\omega_1}{2\nu}$, dem ein reeller Winkel $\vartheta = \alpha$ entspricht, wird $\omega = 0$. Größer wie α kann ϑ nicht werden, da sonst ω imaginär würde. Es wird also für $\vartheta = \alpha$, $\omega = 0$ das Pendel umkehren, die Wurzel, d. h. ω sein Zeichen wechseln. Wir haben den Fall des hin- und hergehenden Pendels.

3. Den Zwischenfall $\omega_1 = 2\nu$. Der höchste Punkt $\vartheta = \pi$ könnte noch erreicht werden, allerdings mit der Geschwindigkeit Null.

Wir gehen jetzt zur Besprechung dieser drei Fälle über.

Aufgabe 52: Man leite die Gleichung (I) direkt aus der Gleichung

$$\ddot\vartheta + \nu^2 \sin\vartheta = 0$$

von Nr. 66 ab nach der in Nr. 67, Beispiel 2, erläuterten Methode.

91. Das umlaufende Pendel. Aus

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 - 4\nu^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}}$$

folgt

$$t = \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\omega_1^2 - 4\nu^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\omega_1}\int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}}},$$

wo $\varkappa^2 = \frac{4\nu^2}{\omega_1^2} < 1$ ist.

Das Integral ist ein elliptisches und kann durch elementare Funktionen nicht in geschlossener Form dargestellt werden. Wir wollen folgendes Näherungsverfahren einschlagen:

Es ist der Integrand

$$\left(1 - \varkappa^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\varkappa^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2} + \frac{3}{8}\varkappa^4 \sin^4\frac{\vartheta}{2} + \frac{5}{16}\varkappa^6 \sin^6\frac{\vartheta}{2} + \cdots$$

Man kann diese Reihe in eine Kosinusreihe verwandeln, da

$$\sin^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\vartheta,$$

$$\sin^4\frac{\vartheta}{2} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos\vartheta + \frac{1}{8}\cos 2\vartheta,$$

$$\sin^6\frac{\vartheta}{2} = \frac{5}{16} - \frac{15}{32}\cos\vartheta + \frac{3}{16}\cos 2\vartheta - \frac{1}{32}\cos 3\vartheta \quad \text{usw.}$$

Sonach wird

$$\left(1 - \varkappa^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{1}{4}\varkappa^2 + \frac{9}{64}\varkappa^4 + \frac{25}{256}\varkappa^6 + \cdots\right)$$
$$+ (\,)\cos\vartheta + (\,)\cos 2\vartheta + (\,)\cos 3\vartheta + \cdots$$

Wir wollen uns nun damit begnügen, die Zeit τ eines vollen Umlaufes auszurechnen, d. h.

$$\tau = \frac{1}{\omega_1}\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}}}.$$

Da aber $\cos\vartheta$, $\cos 2\vartheta \ldots$ von 0 bis 2π integriert, Null geben, so wird

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_1}\left(1 + \frac{1}{4}\varkappa^2 + \frac{9}{64}\varkappa^4 + \frac{25}{256}\varkappa^6 + \cdots\right).$$

Diese Reihe konvergiert für $\varkappa < 1$.

Bemerkung: Ist bei einem umlaufenden Apparat ω_1 die größte, ω_2 die kleinste Winkelgeschwindigkeit, ω_m eine mittlere Winkelgeschwindigkeit, so nennt man $\delta = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_m}$ den **Ungleichförmigkeitsgrad.**

Man nimmt gewöhnlich für ω_m den Wert $\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$. Ist δ klein, genauer: ist $\omega_2 - \omega_1$ klein gegen alle vorkommenden ω, so wird man nur einen Fehler zweiter Ordnung begehen, wenn man $\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$ mit irgendeinem Werte zwischen ω_1 und ω_2 verwechselt, wie es meist, allerdings nicht immer mit der nötigen Beachtung der Voraussetzungen, geschieht.

Aufgabe 53: Wie groß muß man ω_1 wählen, damit bei einem umlaufenden Pendel von gegebener Länge l der Ungleichförmigkeitsgrad δ einen vorgeschriebenen Wert ε nicht überschreitet?

92. Das hin- und herschwingende Pendel. Es sei jetzt $\omega_1^2 < 4\nu^2$, α der maximale Ausschlagwinkel. Dann setzen wir $\omega_0 = 0$, $\vartheta_0 = \alpha$ und erhalten aus Gleichung I (Nr. 90)

$$\dot{\vartheta}^2 - 2\nu^2 \cos\vartheta = -2\nu^2 \cos\alpha,$$

also

$$t = \frac{1}{\nu}\int \frac{d\vartheta}{\sqrt{2\cos\vartheta - 2\cos\alpha}}.$$

Wir wissen nun, daß ϑ zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$ hin- und hergeht, daß also

$$1 \geqq \cos\vartheta \geqq \cos\alpha.$$

Dementsprechend führen wir eine neue Variable ψ ein durch die Substitution

$$1 - \cos\vartheta = (1 - \cos\alpha)\sin^2\psi$$

oder, da

$$1 - \cos\vartheta = 2\sin^2\frac{\vartheta}{2},$$

zugleich mit genauerer Festlegung des Zeichens durch

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\psi. \tag{1}$$

Wenn ψ fortlaufend alle reellen Werte durchläuft, geht ϑ beständig zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$ hin und her. Aus (1) folgt

$$\sqrt{2\cos\vartheta - 2\cos\alpha} = \sqrt{2(1 - \cos\alpha - (1 - \cos\vartheta))}$$

$$= \sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\psi} = \pm 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\psi.$$

Ferner ergibt die Differentiation von (1)

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\psi\cdot d\psi$$

$$d\vartheta = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\psi\cdot d\psi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\psi}}.$$

Die Wurzel ist hier positiv zu nehmen, da $\cos\frac{\vartheta}{2} > 0$ ist. Setzen wir alles in das Integral für t ein und beachten wir, daß wir noch festsetzen können, daß ψ mit t dauernd wachse, — das umgekehrte könnte durch Änderung des Zeichens von ψ wett gemacht werden, das negative Zeichen in (1) aber dadurch entfernt werden, daß man $\vartheta + 2\pi$ an Stelle von ϑ betrachtete —, so folgt

$$t = \frac{1}{\nu}\int\frac{d\psi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\psi}}.$$

Setzen wir noch $\sin\frac{\alpha}{2} = \varkappa$ und rechnen t von $\vartheta = 0$ an, so erhalten wir die sogenannte Legendresche Normalform des elliptischen Integrals

$$t = \frac{1}{\nu}\int\limits_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}},$$

wo $\varkappa^2 < 1$ ist.

Auch hier mag die Integration für den Fall einer vollen Schwingung ausgeführt werden. Einer solchen entspricht der Verlauf von ψ von 0 bis 2π. Also ist die Periode

$$\tau = \frac{1}{\nu}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}},$$

oder nach einer analogen Entwicklung wie in Nr. 91

$$\tau = \frac{2\pi}{\nu}\left(1+\frac{1}{4}\varkappa^2+\frac{9}{64}\varkappa^4+\cdots\right)$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{4}\varkappa^2+\cdots\right),$$

wo $\varkappa^2 = \sin^2\frac{\alpha}{2}$ ist.

Vernachlässigung schon des zweiten Gliedes gibt die Formel für unendlich kleine Schwingungen. Für sehr feine Beobachtungen wird Beachtung des zweiten Gliedes genügen. Selbst wenn α im

Bogenmaß etwa $\frac{1}{10}$ ist, so ist $\varkappa$ angenähert $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{4}\varkappa^2$ also $\frac{1}{1600}$. Man nimmt aber für wissenschaftliche Beobachtungen meist sehr viel kleinere Ausschlagwinkel, so daß auch noch das Glied mit $\frac{1}{4}\varkappa^2$ fortgelassen werden kann.

Aufgabe 54: Man schätze unter Benutzung des Restgliedes der Taylorschen Reihe für die benutzte Reihe den Fehler ab, den man begeht, wenn man mit dem zweiten Gliede abbricht.

93. Der Übergangsfall $\omega_1^2 = 4\nu^2$. In diesem Falle wird aus (I)

$$\dot{\vartheta}^2 = 2\nu^2(1 + \cos\vartheta) = 4\nu^2 \cos^2\frac{\vartheta}{2},$$

also $\dot{\vartheta} = \pm 2\nu \cos\frac{\vartheta}{2}$.

Daraus folgt

$$t = \pm \frac{1}{2\nu}\int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\cos\frac{\vartheta}{2}} = \pm \frac{1}{\nu} \lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{4}\right).$$

Die Integrationskonstante fällt fort, wenn wir annehmen, daß für $\vartheta = 0$ auch $t = 0$ wird.

Man sieht nun aber, daß $t = \pm\infty$ wird für $\vartheta = \pm\pi$. Das Pendel nähert sich also mit stets abnehmender Geschwindigkeit dem obersten Punkte der Kreisbahn, ohne ihn je zu erreichen ($t = \infty$). Oder es kommt von dort her, ohne aber je da gewesen zu sein ($t = -\infty$). Wir haben eine sogenannte asymptotische Bewegung in der Nähe der obersten Stelle.

94. Verhalten der Fadenspannung. Wir haben früher in Nr. 66 für die Fadenspannung S die Formel abgeleitet

$$S = mg\cos\vartheta + ml\omega^2.$$

Setzen wir hierin nach Formel (I′) (Nr. 90)

$$l\omega^2 = l\omega_1^2 + 2g\cos\vartheta - 2g,$$

so erhalten wir

$$S = ml\omega_1^2 + 3mg\cos\vartheta - 2mg,$$

wonach zu jedem ϑ das zugehörige S berechnet werden kann.

Wir müssen nur noch prüfen, ob die Nebenbedingung

$$S > 0$$

erfüllt ist.

S nimmt ab mit wachsendem ϑ.

Für $\vartheta = \pi$ (beim umlaufenden Pendel) ist also

$$S_{\min} = ml\omega_1^2 - 5mg.$$

Damit also $S > 0$ sei, ist beim umlaufenden Pendel nötig und hinreichend, daß

$$\omega_1^2 > 5\nu^2$$

sei. Beim hin- und hergehenden Pendel nehmen wir besser die Formel aus Nr. 91

$$l\omega^2 = 2g \cos\vartheta - 2g \cos\alpha,$$

wodurch

$$S = 3mg \cos\vartheta - 2mg \cos\alpha$$

wird. Für $\vartheta = \alpha$ aber wird

$$S = mg \cos\alpha.$$

Damit also dauernd $S \geqq 0$ sei, muß $\alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ sein. Da

$$l\omega_1^2 = 2g - 2g \cos\alpha$$

ist, heißt das, daß

$$\omega_1^2 \leqq 2\nu^2$$

sein muß. Wenn aber

$$2\nu^2 < \omega_1^2 < 5\nu^2$$

ist, wozu auch der Zwischenfall $\omega_1^2 = 4\nu^2$ gehört, so wird einmal $S = 0$. Es wird also dann der Punkt die Kreisbahn verlassen und frei (mit $S = 0$) in einer Parabel herabfallen. Denn infolge

$$S = 3mg \cos\vartheta - 2mg \cos\alpha$$

und $\cos\alpha < 0$ kann S nur negativ werden an einer Stelle, wo $\vartheta > \frac{\pi}{2}$ ist. Da gibt es aber eine Parabel, die sich stetig und der augenblicklichen Geschwindigkeit entsprechend der Kreisbahn anschließt und zunächst wenigstens innerhalb derselben verläuft.

Denn an der Stelle $S = 0$ ist

$$3 \cos\vartheta = 2 \cos\alpha$$

und also das zugehörige ω^2

$$\omega^2 = -\nu^2 \cos\vartheta.$$

Also der Krümmungsradius der Parabel nach der Formel

$$\frac{v^2}{\varrho} = -g \cos\vartheta$$

$$\varrho = -\frac{v^2}{g \cos\vartheta} = -\frac{l^2\omega^2}{g \cos\vartheta} = l.$$

Die Krümmung der Parabel ist also an dieser Stelle, wie auch zu erwarten war, gleich der des Kreises. Nach dem Scheitel zu nimmt aber die Krümmung der Parabel zu, und da bei der Wurfparabel der Scheitel oben liegt, so wird die Parabel in den Kreis eintreten.

Daß übrigens an der Stelle, wo $S = 0$ wird, der Punkt in das Kreisinnere tatsächlich eintritt, kann auch so erschlossen werden:

Betrachten wir die Beschleunigungskomponente in Richtung des Kreisradius, so ist sie für die Kreisbahn

$$-G\cos\vartheta + S$$

für die Parabel

$$-G\cos\vartheta.$$

Da $S < 0$, so ist die Beschleunigung im letzten Falle größer als im ersten, der Punkt wird also tatsächlich die Kreisbahn nach innen verlassen.

Was dann geschieht, wenn die Parabel das zweite Mal die Kreisbahn trifft, wenn also der Faden plötzlich wieder gespannt wird, kann hier noch nicht erörtert werden. Es handelt sich um ein Impulsionsproblem (siehe § 52).

Dieselbe Bewegung wie unser Pendel würde auch ein Punkt ausführen, der reibungsfrei in einer vertikalen, kreisförmig gebogenen Röhre gleiten kann. Nur wäre S, der Druck der Röhre auf den Punkt, nicht der Bedingung $S > 0$, und daher auch ω_1 keiner Beschränkung unterworfen.

Kapitel IV.

Elemente der Himmelsmechanik.

§ 20. Das allgemeine Gravitationsgesetz.

95. Ableitung des Gesetzes mit Benutzung der lex tertia. Wir haben in Nr. 38 gesehen, wie sich die Bewegung der Planeten um die Sonne in erster Annäherung durch das Newtonsche Kraftgesetz darstellen läßt, das uns sagt, daß die Sonne auf die Planeten eine Kraft ausübt, welche auf die Sonne zugerichtet ist und die Größe hat

$$k = \frac{\lambda m}{r^2}.$$

Dabei hängt λ nicht mehr von den einzelnen Planeten ab.

Nun lassen sich aber die Bewegungen der Monde um die einzelnen Planeten nach einem analogen, nur durch den Wert von λ unterschiedenen Gesetze erklären. Bedenken wir weiter, daß die Erde auf jeden Körper eine Kraft, die Schwerkraft, ausübt, daß nicht einzusehen ist, warum diese Kraftwirkung in einer gewissen Entfernung aufhören soll, so werden wir wohl nicht die Vermutung abweisen können, daß wir es in der Schwerkraft, der Anziehungskraft der Sonne auf die Planeten und derjenigen der Planeten auf die Monde mit Teilerscheinungen eines einzigen Kraftgesetzes zu tun haben. Dieses sogenannte Gravitationsgesetz besteht demnach darin, daß jeder Körper jeden anderen von der Masse m mit einer Kraft anzieht, die auf den ersteren zugerichtet ist und das Gesetz

$$k = \frac{\lambda m}{r^2}$$

erfüllt, wobei λ noch von dem anziehenden Körper abhängt.

Um λ zu finden, nahm Newton, der zuerst diese Generalisation aussprach, zu seiner allgemeinen lex tertia Zuflucht, der zufolge die Kraft k_1, die Körper 1 auf Körper 2 ausübt, stets entgegengesetzt gleich sein soll der Kraft k_2, die 2 auf 1 ausübt. Also

$$\frac{\lambda_1 m_2}{r^2} = \frac{\lambda_2 m_1}{r^2},$$

oder

$$\frac{\lambda_1}{m_1} = \frac{\lambda_2}{m_2} = \cdots = \Gamma$$

von jedem Körper unabhängig, d. h. eine Universalkonstante.

Also ziehen sich zwei Körper von den Massen m_1 und m_2 mit einer Kraft an, die gleich

$$\Gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

ist, wo r die gegenseitige Entfernung und Γ eine Universalkonstante bedeutet.

Das ist das allgemeine Gravitationsgesetz.

In dieser Form ist es klar, wenn man von einer Entfernung r der beiden Körper sprechen kann, d. h. wenn die Dimensionen der Körper klein sind gegen ihre Entfernungen. Allgemeiner und exakter werden wir das Gesetz für Massenelemente aussprechen:

Zwei Massenelemente dm_1 und dm_2 in der Entfernung r von einander ziehen sich mit einer Kraft

$$dk = \Gamma \frac{dm_1\, dm_2}{r^2}$$

an.

Die allgemeine Gravitation erscheint somit als räumlich verteilte Kraft. Diese Kraft hat, wenn wir die Koordinaten des anziehenden Elementes als konstant ansehen, hinsichtlich der Koordinaten des angezogenen Körpers ein Potential:

$$u = -\Gamma \frac{dm_1\, dm_2}{r},$$

d. h. es ist

$$d\bar{k}_1 = -\frac{du}{d\bar{r}_1}$$

(siehe Nr. 87).

Daraus folgt: Die Kraft, welche ein ausgedehnter Körper auf ein Massenelement dm_2 ausübt, hat ein Potential, d. h. es ist

$$d\bar{k}_2 = -\frac{du}{d\bar{r}_2}$$

und dabei ist

$$u = -dm_2\,\Gamma \int\limits_{(1)} \frac{dm_1}{r}.$$

Das Integral ist über den Körper (1) zu erstrecken.

96. Die Anziehung einer aus homogenen, konzentrischen Schalen zusammengesetzten Kugel. Betrachten wir die Anziehung einer homogenen, unendlich dünnen Kugelschale vom Radius ϱ, der Dicke $d\varrho$ und der spezifischen Masse μ auf ein Massenelement dm_2 an der Stelle P in der Entfernung a vom Mittelpunkt O der Kugel. Dabei kann $a \gtrless \varrho$ sein. Teilen wir nun die Kugelschale in Ringscheiben durch Ebenen senkrecht zu OP, so haben alle Punkte eines solchen Streifens dieselbe Entfernung r von dm_2 und es ist also ihr Potential

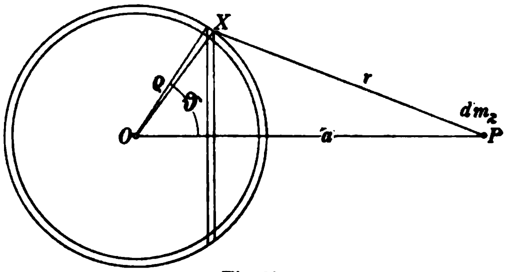


Fig. 66.

$$-\Gamma \frac{dm_2 \cdot \mu 2\pi\varrho \sin\vartheta \cdot \varrho\, d\vartheta \cdot d\varrho}{r},$$

da $\varrho\, d\vartheta$ die Breite des Streifens bedeutet, $\varrho \sin\vartheta$ seinen Radius, wenn ϑ der Winkel XOP ist.

Also ist das Potential der ganzen Kugelschale auf den Punkt P

$$u = -\Gamma dm_2 2\pi\mu\varrho^2 d\varrho \int\limits_0^\pi \frac{\sin\vartheta \cdot d\vartheta}{+\sqrt{a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho\cos\vartheta}}.$$

Denn es ist

$$r = +\sqrt{a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho\cos\vartheta}.$$

Die Wurzel ist der Bedeutung von r entsprechend, stets positiv zu zählen.

Man kann die zur Berechnung von u notwendige Integration ausführen und erhält:

$$u = -\Gamma dm_2 \frac{2\pi\mu\varrho\, d\varrho}{a} \sqrt{a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho\cos\vartheta}\,\Big|_0^\pi.$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden: a) es liege P außerhalb der Kugel: $a > \varrho$. Dann wird

$$u = -\Gamma dm_2 \frac{2\pi\mu\varrho d\varrho}{a}\{a + \varrho - (a - \varrho)\} = -\Gamma dm_2 \frac{4\pi\varrho^2\mu}{a} d\varrho,$$

$$u = -\Gamma \frac{dm_2 \cdot dm_1}{a},$$

da ja $dm_1 = 4\pi\varrho^2\mu d\varrho$ die ganze Masse der Kugelschale ist.

Es berechnet sich also das Potential der Kugelschale auf einen Punkt außerhalb genau so, als ob es sich um die Anziehung eines Punktes handele, der im Mittelpunkt der Kugel liegt und die Masse der ganzen Schale besitzt.

b) Es liege P innerhalb der Kugel: $a < \varrho$. Dann ist

$$+\sqrt{a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho\cos\vartheta_0} = \varrho - a,$$

also

$$u = -\Gamma dm_2 4\pi\mu\varrho d\varrho,$$

d. h. konstant, unabhängig von der Lage des Punktes P.

Ist aber das Potential konstant, so ist die Kraft Null.

Eine homogene Kugelschale übt auf einen Punkt im Innern keine Anziehung aus.

Beide Potentiale gehen in der Grenze $a = \varrho$ stetig ineinander über, die Kräfte aber nicht.

Wir wollen uns nun vorstellen, daß wir eine Vollkugel haben, die aus lauter konzentrischen homogenen Kugelschalen bestehen soll. Der Radius sei R.

Für einen Punkt außerhalb $a > R$ ist dann das Potential

$$u = -\Gamma \frac{dm_2 m_1}{a}.$$

Man braucht nur die obige Formel des Falles a) zu summieren. Die Kraft aber ist

$$\bar{k} = -\frac{du}{d\bar{r}_2} = \Gamma dm_2 m_1 \frac{d\frac{1}{a}}{d\bar{r}_2}.$$

Für die Wirkung nach außen kann man also eine solche Kugel wie einen Punkt behandeln.

Liegt aber P innerhalb der Kugel, ist also $a < R$, so teilen wir die Kugel in zwei Teile: eine Kugel vom Radius a und eine Hohlkugel von den Radien a und R. Für erstere liegt der Punkt außerhalb, für letztere innerhalb. Mithin ist das Potential in diesem Falle

$$u = -\Gamma \frac{dm_2}{a} \int^a 4\pi\varrho^2 d\varrho\mu - \Gamma dm_2 4\pi \int_a^R \mu\varrho d\varrho.$$

Die Kraft kann dagegen im zweiten Fall so berechnet werden, als ob die Masse der inneren Kugel allein im Mittelpunkte konzentriert wäre, d. h. es ist für $a < R$

$$\bar{k} = \Gamma\, dm_2 m_a \cdot \frac{d}{d\bar{r}_2}\left(\frac{1}{a}\right) = \Gamma\, dm_2 \frac{d\frac{1}{a}}{d\bar{r}_2} \int_0^a 4\pi\varrho^2 \mu\, d\varrho\,.$$

Natürlich ist auch hier $\bar{k} = -\frac{du}{d\bar{r}_2}$.

Man erkennt aus dem Vorhergehenden, daß sich bei der Vollkugel Potential und Kraft stetig an der Kugelgrenze verhalten, wenn sie auch außen und innen verschiedenen analytischen Gesetzen gehorchen.

Aufgabe: 55. 1 kg Steinkohle hat einen Arbeitswert von etwa 7000×420 mkg. Wie tief darf die Kohle gelagert sein, damit die Förderarbeit, welche die Schwere allein verursacht, nicht schon größer ist als der Wert der Kohle?

97. Über die Stetigkeit des Potentials und seiner Ableitungen.[1]

Man kann gegen unsere Betrachtungen einwenden, daß wir ohne weiteres die Formeln bis an die Grenzen $\varrho = a$ haben gelten lassen, obwohl sie eigentlich nur für $\varrho > a$ bzw. $\varrho < a$ bewiesen sind. Diesem an sich berechtigten Einwand kann man so begegnen.

Das Potential, das bis auf einen konstanten Faktor gleich

$$\int \frac{dm}{r}$$

und die Kraft, deren Komponente nach der x-Achse bis auf denselben Faktor gleich

$$k_x = -\frac{\partial u}{\partial x_2} = -\int dm \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_2} = \int dm \frac{x_2 - x_1}{r^3}$$

ist, verhalten sich als Funktionen von $\bar{r}_2$ sicher regulär, solange nicht $\bar{r}_2 = \bar{r}_1$, d. h. $r = 0$ werden kann, also der angezogene Punkt in das Innere der Massen hineintritt.

Nun soll aber gezeigt werden, daß auch in diesem Falle die Stetigkeit und Endlichkeit des Potentials und seiner ersten Ableitungen, d. h. der Kraft, nicht aufhören, vorausgesetzt, daß die anziehenden Massen wirklich räumlich verteilt sind, d. h. die spezifische Masse μ endlich bleibt.

Machen wir nämlich den angezogenen Punkt ($\bar{r}_2$) zum Anfangspunkt eines Polarkoordinatensystems $r\vartheta\varphi$, so ist bekanntlich das Volumelement

$$dV = r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr$$

$$x_2 - x_1 = -r\cos\alpha,$$

1) Der Anfänger kann diese Nummer fortlassen.

wo α den Winkel von $\overline{r_1 r_2}$ gegen die x-Achse bedeutet. Das Potential aber wird — bis auf die fortgelassenen konstanten Faktoren

$$\int \mu r \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr$$

die Kraftkomponente

$$\int \mu \cos\alpha \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr.$$

Beide Integrale aber bleiben endlich und stetig, wenn jetzt $r=0$ werden kann, d. h. wenn Massen bis an den angegebenen Punkt heranreichen. (Denn anstatt den Aufpunkt — wie man oft den angezogenen Punkt nennt — zu verschieben und die anziehenden Massen festzuhalten, kann man natürlich auch den Aufpunkt festhalten und die Massen verschieben.) Grenzt man um den Aufpunkt einen kleinen Bereich ΔV von beliebiger Gestalt und der Maximaldimension δ ab, so gibt selbst das plötzliche Auftreten einer endlichen Massendichte vom Maximalbetrage μ zum Potential einen Beitrag

$$\left|\int \mu r\, dr \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\right| < \frac{1}{2}\mu\delta^2 2\pi$$

und zur Kraft einen Beitrag

$$\left|\int \mu\, dr \cos\alpha \sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta\right| < \mu 2\pi\delta,$$

die also beide mit δ unendlich klein werden.

Das plötzliche Auftreten von Masse in unendlicher Nähe des Aufpunktes verursacht also keine plötzliche Änderung des Potentials und der Kraft.

Man darf also eine Formel, die bis an die Grenze der Masse gilt, auch für diese Grenze selbst noch anwenden, wenn Potential und Kraft in Frage kommen. Für die zweiten Ableitungen des Potentials gilt das aber nicht mehr. Vielmehr kann man zeigen, daß dieselben an Grenzen, wo μ unstetig ist, ebenfalls unstetig werden.

Z. B. gilt die Laplace-Poissonsche Gleichung für das Potential

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -4\pi\mu\, \Gamma dm_2$$

(x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten des Aufpunktes), woraus man erkennt, daß die linke Seite mit μ springt. Wo keine Masse ist, gilt insbesondere

$$\Delta u = 0 \quad \text{(Laplace)}.$$

Hier soll darauf nicht weiter eingegangen werden. Die hierher gehörenden Untersuchungen, besonders diejenigen, welche die fundamentale Differentialgleichung von Laplace anbetreffen, pflegt man in der Potentialtheorie zu behandeln. Es sei auf die schon in Nr. 9 genannten physikalisch-mechanischen Lehrbücher hingewiesen, welche den Gegenstand behandeln: Kirchhoff, Schell, Routh, Statik, Bd. 2, Thomson-Tait, Webster. Ein spezielles Lehrbuch ist: Betti, Potentialtheorie, deutsch von Fr. Meyer, ein mehr für Mathematiker geschriebenes das von Korn. Literatur, Geschichte und Überblick findet man in dem Artikel von H. Burckhardt und W. F. Meyer: Potentialtheorie, in der Encyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. II, Teil A, Nr. 7 b. Als grundlegend seien genannt die beiden Arbeiten: Gauß, Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungskräfte (1840) (neu herausgegeben in Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 2) und Green, Ein Versuch, die mathematische

Analysis auf die Theorien der Elektrizität und des Magnetismus anzuwenden (1828; ebenfalls in Ostwalds Klassikersammlung erschienen als Nr. 61). Über den Zusammenhang mit der Funktionentheorie siehe die fundamentale Arbeit von Riemann, I. ges. Werke; als Lehrbuch: Picard, Traité Bd. II.

Aufgabe 56: Man beweise die Laplace-Poissonsche Gleichung für das Potential der aus homogenen, konzentrischen Schalen bestehenden Kugel.

98. Ergebnisse von Beobachtungen. Es bleiben die Fragen zu erörtern: wie groß ist die universelle Konstante Γ, die man auch Gaußsche Konstante nennt? Läßt sich die allgemeine Gravitation auch zwischen irdischen Objekten experimentell nachweisen? Und wie weit bestätigt die Erfahrung das Newtonsche Anziehungsgesetz?

Man hat nun tatsächlich die Gravitation an irdischen Objekten festgestellt und gemessen und zwar nach verschiedenen Methoden: a) aus Pendelversuchen, indem man davon ausging, daß ein horizontales Pendel unter Einwirkung einer seitlich angebrachten Masse schwingen muß wie ein gewöhnliches Pendel unter Einwirkung der Schwerkraft; b) aus Versuchen mit der Wage: man entfernte die Wagschalen möglichst weit voneinander und brachte die eine unter Einwirkung einer großen abwärts ziehenden Masse: die betreffende Schale mußte so ein Übergewicht bekommen, das man durch Zusatzgewichte auf die andere Wagschale direkt messen konnte. c) Durch Versuche mit der Drehwage, eine Methode, die der direkten Messung der Kraft durch ein Dynamometer ziemlich nahe kommt, nur daß die Torsionswirkung der Feder statt der Längswirkung benutzt wird. Diese Versuche haben ziemlich übereinstimmende Werte für Γ ergeben, im Mittel

$$\Gamma = 6{,}675 \cdot 10^{-8} \text{ im c. g. s.-System.}$$

Man hat auch die Ablenkung des Pendels durch Bergmassen benutzt, um Γ zu finden. Man muß allerdings dann das Gewicht des Berges aus seinen Dimensionen und dem spezifischen Gewicht seiner Gesteinsmassen abschätzen.

Vergleicht man die Resultate der besten Methoden miteinander, so ergibt sich eine Unstimmigkeit von etwa $1{,}5\,\%_0$, was bei der Kleinheit von Γ und der Schwierigkeit der Beobachtungen nicht wundern kann.

Wenn nun die Erdbeschleunigung g wirklich von der Anziehung der Erde herstammt, so muß man die Erdmasse daraus bestimmen können. Denn es muß dann sein

$$g = \Gamma \frac{m}{R^2},$$

wo m die Erdmasse. R den Erdradius bedeutet. Sei μ die mittlere spezifische Masse der Erde, so ist $m = \frac{4}{3} R^3 \pi \mu$ — wenn wir in erster Annäherung die Erde als Kugel ansehen — also folgt

$$\mu = \frac{3}{4} g \frac{1}{\pi \Gamma R}.$$

Daraus berechnet sich im Mittel

$$\mu = 5{,}513.$$

Da die spezifische Masse der Gesteine an der Erdoberfläche nur etwa 3 beträgt, so hat man geschlossen, daß sich im Erdinnern wesentlich schwerere Stoffe befinden müssen. Berechnungen von Wiechert haben unter Berücksichtigung aller für die Erde sonst bekannten Daten die Annahme eines Eisenkernes wahrscheinlich gemacht.

Die beste Bestätigung hat nun aber das Newtonsche Gesetz dadurch gefunden, daß die Annahme einer ihm folgenden allgemeinen Anziehung zwischen den Himmelskörpern gestattet, die Keplerschen Gesetze so zu verbessern, daß die Differenzen zwischen Theorie und Beobachtung nur noch minimal sind. Um einen Begriff davon zu geben, sei eine der hauptsächlichsten Abweichungen genannt: ein Fehler von 40″ im Jahrhundert für die Perihelbewegung des Merkur. So hat sich das Genie Keplers bewährt: das von ihm entdeckte Gesetz, das zunächst nur ganz roh stimmt, hat Newton ein Kraftgesetz finden lassen, das in fast selbstverständlicher Weise verallgemeinert, imstande ist, selber die Abweichungen fast vollständig zu erklären. Das Newtonsche Anziehungsgesetz ist mit das bestbewährte Naturgesetz, das wir haben: seinen populären Triumpf feierte es durch die Entdeckung des Neptun (durch Galle), den die Astronomen Adam und Leverrier aus Rechnungen vorausgesagt hatten.

Um die immerhin vorhandenen Abweichungen zu erklären, hat man versucht, das Newtonsche Gesetz zu verbessern, ohne jedoch zu einem definitiven Ergebnis zu kommen. Es muß übrigens bemerkt werden, daß, wie Seliger hervorgehoben hat, die nur roh abschätzbaren Staubmassen in der Nähe der Sonne schon genügen können, um z. B. die Anomalien der Merkurbewegung unter Aufrechterhaltung des Newtonschen Gesetzes zu erklären.

Näheres über diese Fragen findet man in dem Artikel von G. Zenneck: Gravitation. Encykl. d. math. Wiss., Bd. V, Artikel 2.

Aufgaben: 57. Welche Dimensionen hat Γ und wie groß ist diese Konstante im technischen Maßsystem?

57 a. Wenn die Anziehung des Mondes durch die Erde und die Schwerkraft zur selben Klasse gehören und im umgekehrten Verhältnis der Quadrate der Entfernungen vom Erdmittelpunkte stehen, so muß man aus den Daten von Aufgabe 24 in Nr. 34 die Erdbeschleunigung berechnen können. Welcher Wert von g ergibt sich so?

§ 21. Das Problem der Planetenbewegung.

99. Das Zwei-Körperproblem. Es mögen sich zwei Körper (Himmelskörper) von den Massen m_1 und m_2, die wir als Kugeln aus homogenen, konzentrischen Schalen ansehen wollen, nach dem Newtonschen Gesetz anziehen. Wie werden sie sich bewegen, wenn keine anderen Kräfte auf sie einwirken?

Die Orte der Punkte seien durch $\bar{r}_1$ und $\bar{r}_2$ bestimmt, ihre Entfernung sei r, so daß

$$|\bar{r}_2 - \bar{r}_1| = r$$

ist. Dann lauten die Bewegungsgleichungen

$$m_1 \frac{d^2\bar{r}_1}{dt^2} = \Gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)$$

$$m_2 \frac{d^2\bar{r}_2}{dt^2} = \Gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} (\bar{r}_1 - \bar{r}_2).$$

Addieren wir beide Gleichungen, so heben sich die rechten Seiten fort und wir erhalten

$$m_1 \frac{d^2\bar{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2\bar{r}_2}{dt^2} = 0.$$

Betrachten wir den Massenmittelpunkt S beider Planeten, dessen Vektor durch

$$\bar{r}^* = \frac{m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2}{m_1 + m_2}$$

gegeben ist (siehe Nr. 51), so läßt sich die vorstehende Gleichung schreiben:

$$\frac{d^2\bar{r}^*}{dt^2} = 0,$$

woraus folgt:

$$\bar{r}^* = \bar{c}\,t + \bar{a}.$$[1]

Der Massenmittelpunkt beider Planeten bewegt sich in grader Linie mit gleichförmiger Geschwindigkeit.

Wir wollen nun die Bewegung beider Planeten relativ zum Massenmittelpunkt studieren. Zu dem Zweck setzen wir

$$\bar{r}_1 - \bar{r}^* = \bar{y}_1$$

$$\bar{r}_2 - \bar{r}^* = \bar{y}_2,$$

so daß die $\bar{y}$ die Vektoren vom gemeinsamen Schwerpunkt nach den Massenpunkten bedeuten. Wegen $\ddot{\bar{r}}^* = 0$ ist

$$\ddot{\bar{r}}_1 = \ddot{\bar{y}}_1$$

$$\ddot{\bar{r}}_2 = \ddot{\bar{y}}_2.$$

Da S auf der Verbindungslinie beider Planeten liegt und ihre Entfernung im umgekehrten Verhältnis der Massen teilt, so ist

$$\bar{y}_1 = \overline{r_1 - r_2}\,\frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\bar{y}_2 = \overline{r_2 - r_1}\,\frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

oder

$$r = y_1\,\frac{m_1 + m_2}{m_2} = y_2\,\frac{m_1 + m_2}{m_1}.$$

Führen wir überall y_1 in die erste Bewegungsgleichung ein, so erhalten wir

$$m\ddot{\bar{y}}_1 = -\Gamma\bar{y}_1\,\frac{m_1 m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}\,\frac{1}{y_1^3}.$$

Setzen wir noch

$$\frac{\Gamma m_2}{\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)^2} = \lambda,$$

so nimmt die Gleichung die Form an

$$\ddot{\bar{y}}_1 = -\lambda\bar{y}_1\cdot\frac{1}{y_1^3}.$$

Das ist genau die von Newton aus den Keplerschen Gesetzen gezogene Gleichung. Es gelten also auch wenigstens die beiden ersten Keplerschen Gesetze:

Beide Himmelskörper vollführen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt eine Keplersche Bewegung.

Das dritte Keplersche Gesetz freilich wird streng genommen sinnlos: wollten wir es für die beiden in Rede stehenden Planeten aussprechen, so wäre es falsch, denn beide bewegen sich in gleichen Zeiten um ihren gemeinsamen Schwerpunkt.

Andere Planeten sind aber zum Vergleich nicht da. Trotzdem kommt dem dritten Keplerschen Gesetze eine Bedeutung zu, wenn wir unser Problem als einen Ausschnitt aus der Wirklichkeit betrachten: der eine Körper (m_2) sei die Sonne, der andere ein Planet, von der Einwirkung aller anderen Planeten wird abgesehen: der Wirklichkeit entsprechend sei $m_2 \gg m_1$. Dann wird S nahezu mit m_2 zusammenfallen und man kann sagen, daß der andere Körper, der Planet, um die Sonne die Keplersche Bewegung ausführe. Man kann jetzt auch Planeten miteinander vergleichen, indem man jedesmal den betreffenden Planeten und die Sonne allein betrachtet, d. h. m_2 festhält, m_1 variiert. Man sieht aber, daß λ streng genommen nicht nur von der Sonne, d. h. m_2 abhängt; nur in der Grenze $m_2 : m_1 = \infty$ wird $\lambda = \Gamma \cdot m_2$. In dem jetzt angegebenen Sinne hat also das dritte Keplersche Gesetz eine Bedeutung, ist aber nur angenähert richtig.

100. Ansatz des n-Körperproblems. Es seien n Körper (Himmelskörper, Planeten) der schon oft genannten kugelförmigen Beschaffenheit mit den Massen $m_1, m_2, \ldots m_n$ gegeben. Ihre augenblicklichen Ortsvektoren mögen mit $\bar r_1 \ldots \bar r_n$ bezeichnet sein. Die Entfernung des νten vom λten sei $r_{\nu,\lambda} = r_{\lambda,\nu}$. Der Einheitsvektor vom νten zum λten Körper sei $\bar\varrho_{\nu,\lambda}$, so daß

$$\bar\varrho_{\nu,\lambda} = -\bar\varrho_{\lambda,\nu}.$$

Je zwei der Körper mögen sich nach dem allgemeinen Gravitationsgesetz anziehen, andere Kräfte sollen nicht wirken. Es erfährt also der νte Körper von dem λten eine Kraft

$$\bar k_{\nu,\lambda} = \bar\varrho_{\nu,\lambda} \frac{m_\nu m_\lambda}{r^2_{\nu,\lambda}} \Gamma$$

und es ist

$$\bar k_{\nu,\lambda} = -\bar k_{\lambda,\nu}. \tag{A}$$

Es liegen aber die Kräfte $\bar k_{\nu,\lambda}$ und $\bar k_{\lambda,\nu}$ auch in derselben Geraden. Man kann das in folgender Weise ausdrücken:

Da

$$\bar k_{\nu,\lambda} = \bar\varrho_{\nu,\lambda} \cdot u$$

— u ist eine Abkürzung für $\frac{m_\nu m_\lambda}{r^2_{\nu,\lambda}}\Gamma$ — so gibt die Bildung des äußeren Produktes (siehe Anhang I, 5) mit $\overline{r_\nu - r_\lambda}$

$$\overline{(r_\nu - r_\lambda)\cdot k_{\nu,\lambda}} = u \cdot \overline{(r_\nu - r_\lambda)\varrho_{\nu,\lambda}} = 0,$$

weil $\overline{r_\nu - r_\lambda}$ und $\bar\varrho_{\nu,\lambda}$ dieselbe Richtung haben. Und umgekehrt heißt

$$\overline{(r_\nu - r_\lambda) k_{\nu,\lambda}} = 0$$

auch nichts anderes, als daß

$$\bar k_{\nu,\lambda} = u \cdot \bar\varrho_{\nu,\lambda}$$

ist, wo u irgendein Faktor ist, d. h. $\bar k_{\nu,\lambda}$ fällt in die Richtung vom νten zum λten Planeten. Nun kann man aber wegen

$$\bar k_{\nu,\lambda} = -\bar k_{\lambda,\nu}$$

die Gleichung

$$\overline{(r_\nu - r_\lambda) k_{\nu,\lambda}} = 0$$

auch schreiben

$$\overline{r_\nu k_{\nu,\lambda}} + \overline{r_\lambda k_{\lambda,\nu}} = 0. \tag{B}$$

Allgemein wollen wir, wenn eine Kraft $\bar k$ an dem durch $\bar r$ gegebenen Punkte angreift, den Vektor $\bar M = \overline{rk}$ das **Moment** der Kraft in bezug auf den Anfangspunkt O nennen.

Man kann dann (B) so aussprechen: die Summe der Momente der beiden zwischen zwei Himmelskörpern wirkenden Kräfte ist Null.

Die Gleichungen (A) und (B) sind der vollständige Ausdruck der Newtonschen lex tertia von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung.

Die Bewegungsgleichungen unseres Systems heißen nach diesen Voraussetzungen

$$\left.\begin{array}{l}
m_1 \dfrac{d^2 \bar{r}_1}{dt^2} = \qquad\quad \bar{k}_{1,2} + \bar{k}_{1,3} + \cdots + \bar{k}_{1,n} \\
m_2 \dfrac{d^2 \bar{r}_2}{dt^2} = \bar{k}_{2,1} \qquad\quad + \bar{k}_{2,3} + \cdots + \bar{k}_{2,n} \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
m_n \dfrac{d^2 \bar{r}_n}{dt^2} = \bar{k}_{n,1} + \bar{k}_{n,2} + \bar{k}_{n,3} + \cdots + \bar{k}_{n,n-1}
\end{array}\right\} \qquad (C)$$

Es kann als die Hauptaufgabe der mathematischen Astronomie bezeichnet werden, die Integrale dieser Gleichungen zu diskutieren und zu erforschen, ob sich bei geeigneter Wahl der Massen $m_1 \ldots m_n$ für Sonne, Planeten und Monde eine genügende Übereinstimmung der errechneten Resultate mit denen der Beobachtung erzielen läßt. (Über den heutigen Stand dieser Frage siehe Nr. 98 und Nr. 105).

101. Der Schwerpunktssatz des n-Körperproblems. Addieren wir die Gleichungen (C) am Schlusse der vorhergehenden Nummer, so heben sich nach Gleichung (A) alle Kräfte auf der rechten Seite fort und wir erhalten

$$m_1 \frac{d^2 \bar{r}_1}{dt^2} + \cdots + m_n \frac{d^2 \bar{r}_n}{dt^2} = 0 \quad .$$

oder, wenn wir wieder den Schwerpunkt $S(\bar{r}^*)$ einführen durch

$$(m_1 + \cdots + m_n)\bar{r}^* = m_1 \bar{r}_1 + \cdots + m_n \bar{r}_n,$$

so bekommen wir

$$\frac{d^2 \bar{r}^*}{dt^2} = 0$$

$$\bar{r}^* = \bar{c} \cdot t + \bar{a}. \qquad (I)$$

Der Schwerpunkt des ganzen Sonnensystems bewegt sich in gerader Linie mit gleichförmiger Geschwindigkeit.

Dieser Satz gilt natürlich nur unter der Voraussetzung, daß eine Einwirkung anderer Kräfte nicht stattfindet.

Was ist nun sein erfahrbarer Sinn?

Die absolute Bewegung an sich können wir natürlich nicht beobachten. Macht man aber die höchst plausible Annahme, daß das ganze Fixsternsystem im Mittel keine Bewegung ausführt, so muß eine festgestellte Bewegung der Sonne — denn der Schwerpunkt des Planetensystems fällt nahezu mit dem Mittelpunkt der Sonne zusammen — gegen den Fixsternhimmel als Absolutbewegung der Sonne angesprochen werden. Man hat auf diese Weise tatsächlich versucht, $\bar{c}$ zu bestimmen; natürlich ist die Beobachtung sehr schwierig und deshalb unsicher.

Die prinzipielle Schwierigkeit aber liegt darin, daß die für uns beobachtbaren Fixsterne doch nur einen Teil des ganzen Systems ausmachen, und dieser Teil könnte sehr wohl eine Eigenbewegung ausführen. Beobachtbar ist eben in Wirklichkeit immer nur eine relative Bewegung, woraus aber nicht folgt, daß es eine absolute nicht gibt.

102. Der Momentensatz des n-Körperproblems. Daß die Summe der Momente der beiden zwischen zwei Himmelskörpern wirkenden Anziehungskräfte Null ist, gilt für einen jeden Bezugspunkt.

Sei A irgendein fester oder beweglicher Punkt, $\bar{y}_\nu$ der Vektor von A nach dem νten Planeten, $\bar{s}$ der Vektor von dem festen Punkt O nach A.

Dann gilt also analog zu (B) (Nr. 100)

$$\overline{y_\nu k_{\nu,\lambda}} + \overline{y_\lambda k_{\lambda,\nu}} = 0. \tag{B'}$$

Bilden wir nun bei einer jeden der Gleichungen (C) das äußere Produkt mit dem entsprechenden $\bar{y}_\nu$ und addieren alle Gleichungen, so erhalten wir, da sich rechts infolge (B′) wieder alle Glieder fortheben

$$\sum m_\nu \overline{y_\nu \frac{d^2 r_\nu}{dt^2}} = 0. \tag{II}$$

Da jedes Glied der linken Seite das Moment einer Massenbeschleunigung darstellt, kann man den Satz so aussprechen:

Für das Planetensystem ist unter den angegebenen Voraussetzungen die Summe der Momente der Massenbeschleunigungen gleich Null.

Wählen wir als Bezugspunkt den festen Punkt O, setzen wir also $\bar{y}_\nu = \bar{r}_\nu$, so ist

$$\overline{r_\nu \frac{d^2 r_\nu}{dt^2}} = \frac{d}{dt}\overline{r_\nu \frac{dr_\nu}{dt}},$$

wie man durch Ausrechnen der rechten Seite sofort erkennt.

Unter dieser Annahme wird aus (II)

$$\frac{d}{dt}\bar{J}_0 = 0$$

also

$$\bar{J}_0 = \bar{C}_0, \tag{IIa}$$

wo der Impulsvektor $\bar{J}$, bezogen auf den festen Punkt O definiert ist durch

$$\bar{J}_0 = \sum m_\nu \overline{r_\nu \frac{dr_\nu}{dt}},$$

d. h. durch die Summe der Momente der Massengeschwindigkeiten.

Eine analoge Form nimmt (II) an, wenn man alles auf den Schwerpunkt bezieht.

Sei also jetzt speziell $\bar{y}_\nu$ der Vektor vom Schwerpunkt S nach dem νten Planeten, also

$$\bar{r}_\nu = \bar{r}^* + \bar{y}_\nu$$

und infolge (I) (Nr. 101)

$$\ddot{\bar{r}}_\nu = \ddot{\bar{y}}_\nu.$$

Dann lautet (II)

$$\sum m_\nu \overline{y_\nu \ddot{y}_\nu} = 0$$

und weil natürlich wieder

$$\overline{y_\nu \ddot{y}_\nu} = \frac{d}{dt} \overline{y_\nu \dot{y}_\nu}$$

ist

$$\bar{J}_s = \bar{C}_s, \tag{IIb}$$

wo $\bar{J}_s = \Sigma m_\nu \overline{y_\nu \dot{y}_\nu}$ der Impulsvektor für den Schwerpunkt ist.

Der Impulsvektor ist also für den Schwerpunkt wie auch für einen festen Punkt beim n-Körperproblem konstant.

Übrigens bilden alle Sätze (II), (IIa), (IIb) vermöge des Schwerpunktsatzes (I) nur einen einzigen Satz. Denn da $\bar{r}_\nu = \bar{s} + \bar{y}_\nu$, so folgt aus

$$\sum m_\nu \overline{r_\nu \ddot{r}_\nu} = 0$$

sofort

$$\sum m_\nu \overline{s \ddot{r}_\nu} + \sum m_\nu \overline{y_\nu \ddot{r}_\nu} = 0,$$

d. h.

$$\sum m_\nu \overline{y_\nu \ddot{r}_\nu} = 0,$$

weil

$$\sum m_\nu \overline{s \ddot{r}_\nu} = \overline{s (\sum m_\nu \ddot{r}_\nu)} = 0$$

ist vermöge (I).

Legen wir den Momentensatz also in der, der Beobachtung zugänglichen Form (IIb) zugrunde, so ist durch den konstanten Vektor $\bar{C}_s$ eine feste Richtung im Raume, also senkrecht zu ihr eine feste Ebene durch den Schwerpunkt festgelegt: man nennt sie die invariable Ebene des Planetensystems.

103. Der Momentensatz als verallgemeinerter Flächensatz. Es ist

$$\bar{J} = \frac{1}{dt} \sum m_\nu \overline{y_\nu d y_\nu}.$$

Nach der geometrischen Bedeutung des Momentenproduktes (siehe Anhang I, 5) steht nun $\overline{y_\nu d y_\nu}$ auf der Ebene durch den Schwerpunkt, den Planeten und die augenblickliche Bewegungsrichtung des Planeten relativ zum Schwerpunkt senkrecht. Der Größe nach aber ist $\overline{y_\nu d y_\nu}$ der Inhalt des aus $\bar{y}_\nu$ und $d\bar{y}_\nu$ gebildeten Parallelogramms, d. h. der doppelte Inhalt des vom Radiusvektor $\bar{y}_\nu$ in der Zeit dt überstrichenen Sektors dS. Also

$$|\overline{y_\nu d y_\nu}| = 2dS.$$

Es ist somit berechtigt

$$\overline{y_\nu \dot{y}_\nu}$$

die (vektorielle) Flächengeschwindigkeit des Planeten relativ zum Schwerpunkt zu nennen (vgl. Nr. 31, 32).

Für das Planetensystem bleibt also die einzelne Flächengeschwindigkeit nicht konstant, wohl aber die vektorielle Summe aller Flächengeschwindigkeiten, nachdem man jede einzelne mit der entsprechenden Masse multipliziert hat.

Mit Hilfe des vorhergehenden vervollkommneten Begriffes der Flächengeschwindigkeit läßt sich nun in strenger Weise zeigen, daß die Bahnen des Zweikörperproblems wirklich eben sein müssen (siehe Nr. 34).

Denn aus

$$\bar{\ddot{y}} = -u\bar{y}$$

folgt

$$\overline{y\ddot{y}} = 0,$$

daraus

$$\overline{y\dot{y}} = \bar{C}.$$

$\bar{y}$ bleibt also stets senkrecht zu dem konstanten Vektor $\bar{C}$, die Bewegung erfolgt in einer Ebene senkrecht zu $\bar{C}$.

104. Der Energiesatz des n-Körperproblems. Bilden wir von jeder Gleichung (C) in Nr. 100 das innere Produkt mit dem entsprechenden $d\bar{r}_\nu$, so erhalten wir links nach Nr. 79

$$dE_\lambda = d\,\frac{1}{2}\,m_\lambda \bar{v}_\lambda^2,$$

und wenn wir summieren

$$d\mathrm{E} = d\sum E_\lambda = d\,\frac{1}{2}\sum m_\lambda \bar{v}_\lambda^2.$$

Auf der rechten Seite aber bekommen wir

$$\sum_{\nu,\lambda} \bar{k}_{\nu,\lambda}\cdot d\bar{r}_\nu,$$

wo die Summe über alle ν, λ zu erstrecken ist, oder wegen $\bar{k}_{\nu,\lambda} = -\bar{k}_{\lambda,\nu}$

$$\sideset{}{'}\sum_{\nu,\lambda} \bar{k}_{\nu,\lambda} \cdot (d\bar{r}_\nu - d\bar{r}_\lambda),$$

wo aber jetzt die Summe nur über alle Paare λ, ν — jedes einmal — zu bilden ist, was durch den Strich vor Σ angedeutet sei. Weil aber

$$\bar{k}_{\nu,\lambda} = \Gamma \bar{\varrho}_{\nu,\lambda} \frac{m_\nu m_\lambda}{r_{\nu\lambda}^2} = \Gamma \overline{r_\lambda - r_\nu} \frac{m_\nu m_\lambda}{r_{\nu,\lambda}^3}$$

und weil wegen $\overline{r_\lambda - r_\nu}^2 = r_{\lambda,\nu}^2$

$$\overline{r_\lambda - r_\nu} \cdot d(\overline{r_\lambda - r_\nu}) = r_{\lambda,\nu} \cdot dr_{\lambda,\nu}$$

ist, so steht auf der rechten Seite

$$-\sideset{}{'}\sum^{\nu,\lambda} \Gamma \frac{m_\nu m_\lambda}{r_{\nu,\lambda}^2} dr_{\nu,\lambda} = -dU,$$

wo

$$U = -\sideset{}{'}\sum_{\nu,\lambda} \Gamma \frac{m_\nu m_\lambda}{r_{\nu,\lambda}}.$$

ist.

Die Anziehungskräfte haben also insgesamt ein Potential und es besteht somit der Energiesatz

$$d\mathrm{E} = -dU$$

oder

$$\mathrm{E} + U = h \tag{III}$$

(vgl. Nr. 85 und 89).

Für drei Körper ist z. B.

$$U = -\Gamma\left(\frac{m_1 m_2}{r_{1,2}} + \frac{m_2 m_3}{r_{2,3}} + \frac{m_3 m_1}{r_{3,1}}\right).$$

105. Weitere Orientierung. Literatur. Unsere drei Integralgleichungen (I), (II), (III) der Bewegungsgleichungen (C) des n-Körperproblems enthalten 10 skalare Konstanten: $\bar{c}$, $\bar{a}$, $\bar{C}$, h. Da die Gleichungen (C) aber $3n$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung sind, verlangen sie insgesamt $6n$ Konstanten. Wie die von Jacobi inaugurierte, von Lie vollendete formale Theorie der Differentialgleichungen zeigt, zählen unsere Integrale unter Berücksichtigung des Umstandes, daß die Zeit t explizit nirgends vorkommt, so, als ob sie 12 Konstanten hätten, d. h. man kann das Integrationsproblem auf eine einzige Differentialgleichung der Ordnung

$$6n - 12 = 6(n-2)$$

zurückführen.

Bruns hat nun gezeigt, daß es ein weiteres Integral, das algebraisch in den Koordinaten und Geschwindigkeiten wäre, nicht geben kann und Poincaré hat diesen Satz noch etwas verallgemeinert. Auf diese Weise zu versuchen, die Integration weiterzuführen, hat demnach keinen Zweck. Um gleichwohl dem n-Körperproblem beizukommen, schlägt man Näherungsverfahren ein: man geht von der Keplerschen Lösung des Zweikörperproblems aus, die wegen der weit überwiegenden Sonnenmasse tatsächlich eine erste Annäherung sein wird, und sucht nun durch Reihenentwicklungen den Einfluß der andern, in ihren Bewegungen zunächst als bekannt angesehenen Planeten auf den einen betrachteten mathematisch darzustellen. Dann berechnet man wieder die Rückwirkung dieses Planeten auf die andern usw. Man bezeichnet die Abweichungen der Planetenbewegungen von den Keplerschen als Störungen, und dementsprechend das angedeutete Verfahren als Störungsrechnung.

Auf diese Störungsrechnung, die eine Wissenschaft für sich bildet, kann hier nicht eingegangen werden. Es sei auf die Literatur hingewiesen.

Das klassische Werk nach Newton ist die „mécanique céleste" von Laplace (1799). Jünger ist das Werk gleichen Namens von Tisserand. Das hervorragendste neuere Werk über diesen Gegenstand bilden wohl die „Nouvelles méthodes de la mécanique céleste" von Poincaré, der die Integrationsmethoden für Differentialgleichungen überhaupt wesentlich gefördert hat. Die Methoden gehen hauptsächlich auf die von Lagrange in seiner „mécanique analytique" (1. Aufl. 1788), die von Jacobi in seinen Vorlesungen über Dynamik, die von Poisson in seinem: Traité de mécanique, die von Hamilton und die von Lie in ihren verschiedenen Werken gegebenen zurück.

Von Lehrbüchern seien genannt: Charlier, „Mechanik des Himmels", Poincaré, „mécanique céleste", dann ein ausgezeichnetes Buch, das die Elemente der ganzen Mechanik behandelt, wenn auch vom mathematisch-astronomischen Gesichtspunkte aus: Whittaker, „Analytical Dynamics". Auch sei noch einmal auf das schon in der Einleitung genannte Werk von Appell hingewiesen. Des weiteren nehme man die Artikel im sechsten Bande der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften zur Hand.

Schluß des ersten Abschnitts:

§ 22. Übergang zur Systemmechanik.

106. Die Hypothese des materiellen Punktes. Der Schwerpunktssatz bedeutet eine Aussage über die Bewegung eines jeden Systems, die man unter folgendem Bilde fassen kann: Objekt ist ein mathematischer Punkt — der Schwerpunkt — dem eine endliche Masse m, die Masse des Systems, zugeordnet ist. Ferner wirkt an ihm eine Kraft $\bar{k}$ gleich der Summe der äußeren an dem System angreifenden Kräfte. Dann haben wir für diesen Punkt die Gleichung

$$m\bar{w} = \bar{k}.$$

Das System erscheint so unter dem Bilde eines einzigen, mit Masse behafteten Punktes, man nennt einen solchen einen materiellen oder einen Massenpunkt.

Unter der Annahme, daß die Himmelskörper genau genug als Kugeln der in Nr. 96 angegebenen Art angesehen werden können, erscheint die Himmelsmechanik als Mechanik eines Systems einer endlichen Anzahl von Massenpunkten, die gegenseitig Kräfte aufeinander ausüben.

Der großartige Erfolg der Himmelsmechanik beherrschte nun das ganze 18. und auch noch das 19. Jahrhundert derart, daß man glaubte, die ganze Welt als ein System einer endlichen Anzahl solcher Massenpunkte auffassen zu können, die Zentralkräfte aufeinander ausüben, d. h. Kräfte, welche auf den anziehenden Körper zugerichtet sind. Jedes System, z. B. auch ein fester Körper, sollte ein kleines Sonnensystem sein.

Unterstützt wurde diese Meinung durch die neu aufblühende Atomistik (Gassendi im 17., Boscowich im 18. Jahrhundert).

Und so beherrschte die Auffassung, ein jedes materielles System, also ein jedes Objekt der Mechanik bestehe aus einer endlichen Anzahl von Massenpunkten, der Zusammenhang aber werde durch Zentralkräfte zwischen diesen Punkten aufrecht erhalten, die Mechanik bis ins 19. Jahrhundert. Ja, es ist heute noch fast ausschließlich Methode der Lehrbücher, die beiden allgemeinen fundamentalen Sätze der Mechanik, den Schwerpunktssatz und den Momentensatz, auf Grund der Hypothese des Massenpunktes aufzubauen.

Mit besonderer Betonung wurde dieser Standpunkt von Poisson im Anfange, von Boltzmann am Ende des 19. Jahrhunderts eingenommen.

Nun versagt aber diese Hypothese vielfach, sie gibt z. B. keine hinreichende Theorie der elastischen Körper. Aber, wenn sie es auch täte, so wäre es durchaus notwendig, die genannten Fundamentalsätze der Mechanik ohne eine solche metaphysische Hypothese zu begründen, damit es nicht den Anschein gewinne, als ob die Mechanik von solchen Weltkonstruktionen abhänge.

Wir werden deshalb zu Beginn des dritten Abschnitts eine neue Begründung jener allgemeinen Sätze geben, nachdem wir eine erste schon am Ende des zweiten Abschnittes gebracht haben.

Der historischen Bedeutung wegen mag aber die übliche Ableitung von Schwerpunkts- und Flächensatz aus der Hypothese des Massenpunktes hier gegeben werden.

107. Ableitung des Schwerpunktssatzes für beliebige Systeme. Wir betrachten ein System aus n Massenpunkten mit den Massen $m_1 \ldots m_n$; ihre augenblicklichen Orte seien durch $\bar{r}_1 \ldots \bar{r}_n$ gegeben. Die gegenseitige Entfernung sei durch $r_{\nu,\lambda}$ bezeichnet. Der Zusammenhang werde durch Kräfte aufrecht erhalten, die zwischen den Massenpunkten wirken: es übe der λte Punkt auf den νten eine Kraft $\bar{s}_{\nu,\lambda}$ aus.

Diese sogenannten „inneren Spannungen“ mögen dem vollständigen Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung genügen (Newtons lex tertia), es sei also

$$\bar{s}_{\nu,\lambda} + \bar{s}_{\lambda,\nu} = 0, \tag{A}$$

es mögen aber auch die beiden Kräfte Zentralkräfte sein, d. h. in der Verbindungslinie des νten und λten Punktes liegen.

Wie in Nr. 100 ausgeführt, kann das so ausgedrückt werden, daß in bezug auf jeden Punkt A die Summe ihrer Momente verschwinde

$$\overline{y_\lambda s_{\lambda,\nu}} + \overline{y_\nu s_{\nu,\lambda}} = 0. \tag{B}$$

Übrigens sagt die Gleichung

$$\bar{s}_{\lambda,\nu} = \overline{r_\lambda - r_\nu} \cdot \frac{S_{\lambda,\nu}}{r_{\lambda,\nu}}, \tag{C}$$

wo $S_{\lambda,\nu}$ ein Skalar ist und $S_{\lambda,\nu} = S_{\nu,\lambda}$ dasselbe wie (A) und (B) zusammengenommen. $S_{\lambda,\nu} > 0$ bedeutet einen Druck, $S_{\lambda,\nu} < 0$ einen Zug, auch ist

$$|\bar{s}_{\lambda,\nu}| = |S_{\lambda,\nu}|.$$

Außer den inneren Spannungen mögen nun noch auf jeden Punkt des Systems von außen Kräfte wirken, d. h. Kräfte, die von andern nicht zum System gehörenden Punkten mit verursacht sind; die Resultierende dieser auf den νten Punkt wirkenden Kräfte heiße $\bar{k}_\nu$.

Dann haben wir für jeden Punkt den Ansatz

$$m_\nu \frac{d^2 \bar{r}_\nu}{dt^2} = \bar{k}_\nu + \sum_\lambda \bar{s}_{\nu,\lambda} \tag{D}$$

(Newtons Grundgesetz mit Einschluß des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte).

Addieren wir alle Gleichungen (D), so heben sich alle $\bar{s}_{\nu,\lambda}$ wegen (A) fort und wir bekommen, wenn wir noch $\bar{r}^*$ durch

$$\bar{r}^* \sum m_\nu = \sum m_\nu \bar{r}_\nu$$

einführen,

$$\frac{d^2 \bar{r}^*}{dt^2} \cdot \sum_\nu m_\nu = \sum_\nu \bar{k}_\nu. \tag{I}$$

Und das ist offenbar der Schwerpunktssatz, den wir schon kennen (siehe Nr. 51).

108. Ableitung des Momentensatzes für beliebige Systeme. Bilden wir nun aber von jeder Gleichung (D) das äußere Produkt mit dem zugehörenden $\bar{y}_\nu$ und addieren, so heben sich wegen (B) wieder rechts alle $\bar{s}_{\lambda,\nu}$ fort und wir erhalten den sogenannten Momentensatz:

$$\sum m_\nu \overline{y_\nu \ddot{r}_\nu} = \sum \overline{y_\nu k_\nu}. \tag{II}$$

Für jedes System ist die Summe der Momente der Massenbeschleunigungen gleich der Summe der Momente der äußeren Kräfte und zwar in bezug auf einen jeden Punkt.

Doch gibt es wieder wesentlich nur einen Momentensatz, denn vermöge

$$\bar{y}_\nu = \bar{r}_\nu + \bar{s}$$

($\bar{s}$ die Entfernung der Punkte O und A) wird aus der vorstehenden Gleichung

$$\sum m_\nu \overline{r_\nu \ddot{r}_\nu} + \overline{s \sum m_\nu \ddot{r}_\nu} = \sum \overline{r_\nu k_\nu} + \overline{s \sum k_\nu}.$$

d. h. unter Beachtung des Schwerpunktssatzes

$$\sum m_\nu \overline{r_\nu \ddot{r}_\nu} = \sum \overline{r_\nu k_\nu}.$$

Wählen wir als Bezugspunkt den festen Punkt O, so ist wieder

$$\sum m_\nu \overline{r_\nu \ddot{r}_\nu} = \frac{d}{dt} \bar{J}_0,$$

wo der Impulsvektor $\bar{J}$ definiert ist durch

$$\bar{J}_0 = \sum m_\nu \overline{r_\nu \dot{r}_\nu};$$

d. h. als Summe der Momente der Massengeschwindigkeiten. Und der Momentensatz lautet:

$$\frac{d\bar{J}_0}{dt} = \sum \overline{r_\nu k_\nu}. \tag{IIa}$$

Wählen wir als Bezugspunkt A den Schwerpunkt, so wird wegen $\bar{r}_\nu = \bar{r}^* + \bar{y}_\nu$

$$\begin{aligned} \sum m_\nu \overline{y_\nu \ddot{r}_\nu} &= \sum m_\nu \overline{y_\nu \ddot{y}_\nu} + \sum m_\nu \overline{y_\nu \ddot{r}^*} \\ &= \frac{d}{dt} \sum m_\nu \overline{y_\nu \dot{y}_\nu} + \overline{\left(\sum m_\nu y_\nu\right) \ddot{r}_\nu^*} \\ &= \frac{d}{dt} \sum m_\nu \overline{y_\nu \dot{y}_\nu}, \end{aligned}$$

weil $\Sigma m_\nu \bar{y}_\nu = 0$ ist, da A der Schwerpunkt ist. (Siehe Nr. 52.)

Somit lautet der Momentensatz, bezogen auf den Schwerpunkt

$$\frac{d\overline{J}_s}{dt} = \sum \overline{y_\nu k_\nu}, \tag{IIb}$$

wo

$$\overline{J}_s = \sum m_\nu \overline{y_\nu \dot{\bar{y}}_\nu},$$

d. h. gleich der Summe der Momente der relativen Massengeschwindigkeiten zum Schwerpunkt ist.

Da im Gleichgewichtsfall $\bar{w}_\nu = 0$ sein muß, so ergeben sich die folgenden für jedes System notwendigen Gleichgewichtsbedingungen: 1. es muß die Summe der äußeren Kräfte verschwinden: $\sum \bar{k}_\nu = 0$.

2. Es muß die Summe der Momente der äußeren Kräfte verschwinden: $\sum \overline{r_\nu k_\nu} = 0$.

109. Der allgemeine Energiesatz. Bilden wir von jeder Gleichung (D) (Nr. 107) das innere Produkt mit dem entsprechenden $d\bar{r}_\nu$ und addieren, so steht links

$$\sum m_\nu \ddot{\bar{r}}_\nu \cdot d\bar{r}_\nu = d \sum \frac{1}{2} m_\nu \dot{\bar{r}}_\nu^2 = d\mathrm{E}, \tag{1}$$

rechts aber steht erstens

$$\sum \bar{k}_\nu \cdot d\bar{r}_\nu = dA_a, \tag{2}$$

d. h. die Arbeit aller äußeren Kräfte, und zwar die wirkliche Arbeit derselben (siehe Nr. 80), zweitens

$$\sum_{\nu,\lambda} \bar{s}_{\nu,\lambda} \cdot d\bar{r}_\nu = dA_i,$$

wobei ν, λ unabhängig die Ziffern 1 bis n durchlaufen, oder wegen (A)

$${\sum_{\nu,\lambda}}' \bar{s}_{\nu,\lambda} \cdot (d\bar{r}_\nu - d\bar{r}_\lambda),$$

wo jetzt aber die Paare ν, λ alle nur je einmal vorkommen.

Wegen (C) (Nr. 107) wird aber diese Arbeit der inneren Kräfte

$$dA_i = {\sum_{\nu,\lambda}}' \frac{S_{\nu,\lambda}}{r_{\nu,\lambda}} \overline{r_\nu - r_\lambda} \cdot d\overline{r_\nu - r_\lambda},$$

oder da $\overline{r_\nu - r_\lambda} \cdot d(\overline{r_\nu - r_\lambda}) = r_{\nu,\lambda} \cdot dr_{\nu,\lambda}$ (siehe Nr. 100)

$$dA_i = {\sum_{\nu,\lambda}}' S_{\nu,\lambda} dr_{\nu,\lambda}. \tag{3}$$

Um also die Arbeit der inneren Kräfte zu erhalten, hat man die innere Spannung zwischen je zwei Punkten — als Druck positiv gerechnet — mit der Verlängerung der Entfernung beider Punkte zu multiplizieren und diese Produkte zu addieren.

Der Energiesatz lautet

$$dE = dA_a + dA_i. \tag{III}$$

Haben wir speziell einen starren Körper, so ist $dr_{\nu,\lambda}$ auf jeden Fall Null und also auch dA_i.

Bei einem starren Körper leisten also die inneren Spannungen bei keiner Verschiebung Arbeit und es ist die Änderung der kinetischen Energie gleich der Arbeit der äußeren Kräfte:

$$dE = dA_a.$$

Besitzen die äußeren Kräfte in ihrer Gesamtheit ein Potential U (siehe Nr. 89), so gilt für den starren Körper der Energiesatz in der Form

$$E + U = h.$$

110. Schlußbemerkungen. Beispiele zum Schwerpunktssatz bilden alle Untersuchungen des ersten und zweiten Kapitels. Im Schwerpunktssatz ist besonders der für das praktische Leben wichtige Satz enthalten, daß eine Beschleunigung des Systems im Mittel nur durch äußere Kräfte möglich ist. Diejenige äußere Kraft, durch die im praktischen Leben am meisten Bewegung hervorgerufen, wie auch vernichtet wird, ist die Reibung (vgl. Nr. 58 a).

Beispiele für den Momentensatz werden wir in den folgenden Abschnitten behandeln, solche für den wirklichen Energiesatz besonders in § 44.

Hier sei nur die verschiedene Bedeutung des wirklichen Energiesatzes von dem der Punktmechanik noch einmal an einem Beispiel hervorgehoben:

Bei einem auf horizontaler Strecke fahrenden Eisenbahnzug sind für die Bewegung maßgebend an äußeren Kräften der Luftwiderstand und die Haftreibung zwischen Rädern und Schienen (siehe Nr. 237), (wir nehmen an, daß ein Schlüpfen der Räder nicht stattfindet). Diese leisten also auch Arbeit im Sinne der Punktmechanik. Dabei wird wenigstens beim Anfahren die Haftreibung zwischen den Triebrädern und den Schienen nach vorne gerichtet sein, wie man schon daran erkennt, daß die Triebräder am Boden rückwärts schlüpfen, wenn die Reibung nicht groß genug ist, dies zu verhindern. Und insofern ist es berechtigt zu sagen, daß die Haftreibung zwischen den Triebrädern der Lokomotive und den Schienen die Kraft ist, welche den Zug vorwärts bewege, nämlich die erforderliche äußere Kraft. Aber Haftreibung leistet niemals wirkliche Arbeit. Denn das zugehörige $d\bar{r}$ ist ja stets Null. Wirkliche Arbeit leistet aber wohl die Dampfkraft. Und insofern kann man sagen, daß die Dampfkraft den Zug vorwärts bewege, indem sie die Energie dazu hergibt. Aber die Dampfkraft ist — wenigstens wenn man den ganzen Zug als ein System betrachtet — eine innere Kraft, sie ist ja eine Spannung des in der Lokomotive befindlichen Dampfes.

Zweiter Abschnitt.

Statik.

Kapitel V.

Statik des starren Körpers (Theorie).

111. Problemstellung und Definitionen. Aus den in Nr. 106 angegebenen Gründen wollen wir in diesem Kapitel von neuem die Gleichgewichtsbedingungen suchen, die sowohl notwendig als auch hinreichend sind, uns dabei aber auf den starren Körper als Objekt beschränken, d. h. einen Körper, der stets sich selbst kongruent bleibt.

Wir hatten schon früher (Nr. 47) die ganz allgemein gültigen Gleichgewichtsbedingungen dahin ausgesprochen, daß für jedes Volumelement die Summe der räumlich verteilten und der an seiner Oberfläche angreifenden Kräfte Null sein müsse. Mit dieser Bedingung können wir aber noch nicht viel ausrichten, da die inneren Spannungen des starren Körpers notwendigerweise Reaktionskräfte, also unbekannt sind. Denn es gibt ja im Innern eines starren Körpers keine Deformationen. (Siehe Nr. 58.)

Wir suchen jetzt Bedingungen, in denen nur die äußeren Kräfte vorkommen, welche an einem starren Körper angreifen: ist im folgenden von Kräften schlechthin die Rede, so seien stets äußere Kräfte gemeint.

Wir erweitern aber die Aufgabe dieses Kapitels in der folgenden Weise:

Bezeichnen wir zwei Kräftesysteme an einem materiellen System als „gleichwertig“ oder „äquivalent“, wenn sie dem System von demselben Geschwindigkeitszustand aus denselben Beschleunigungszustand erteilen, so fragen wir auch:

„Wann sind an einem starren Körper zwei Kräftesysteme einander gleichwertig?“

Ist ein Kräftesystem so viel wert, als ob gar keine Kraft wirke, so sagen wir auch, die Kräfte heben sich am starren Körper auf oder halten sich an ihm das Gleichgewicht, während wir vom Gleichgewicht des Körpers selbst sprechen, wenn er dauernd in Ruhe bleibt.

§ 23. Die erlaubten Operationen und ihre Invarianten.

112. Fall einer endlichen Anzahl von Kräften. Begriff des Momentes. Wir machen zunächst die Annahme, daß an unserm starren Körper eine endliche Anzahl endlicher Kräfte: $\bar{k}_1 \ldots \bar{k}_n$ an den durch die Vektoren $\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n$ gegebenen Punkten $A_1 \ldots A_n$ angreife. Welche Bedeutung dieser, der Natur nicht streng entsprechenden Annahme zukommt, werden wir später (Nr. 113) sehen.

Die durch den Punkt A und die Richtung von $\bar{k}$ bestimmte Gerade nennen wir die Angriffslinie der Kraft.

Dann sprechen wir das folgende, höchst einleuchtende Axiom aus:

Zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte in derselben Angriffslinie heben sich auf, man darf also zwei solche Kräfte nach Belieben hinzufügen oder weglassen.

(Man kann dieses Axiom für die engere Frage nach dem Gleichgewicht des Körpers aus dem Satz vom zureichenden Grunde (siehe Nr. 63) ableiten, wenn man noch als Axiom hinzunimmt, daß die Frage der Äquivalenz allein durch die Kräfte selbst und ihre Angriffspunkte entschieden wird. Denn in diesem Falle gibt es weder eine ausgezeichnete Richtung, nach der sich der Körper bewegen, noch eine ausgezeichnete Achse, um die er sich drehen könnte.)

Dazu kommt der schon bekannte Parallelogrammsatz (Nr. 44): Man darf Kräfte, die an einem Punkte angreifen, zu einer Resultierenden zusammensetzen.

Aus unserem neuen Axiom ergibt sich sofort der Verschiebungssatz, von dem Spuren schon im Mittelalter bei Jordanus de Nemore, deutlicher bei Benedetti, dem Vorgänger Galileis, auftauchen, bis ihn Varignon, der die elementare Statik abschließt, in seinem „projet d'une nouvelle mécanique" 1687 und in seiner nachgelassenen „Nouvelle mécanique" (1725) zur Grundlage der Statik macht:

Man darf am starren Körper eine Kraft beliebig in ihrer Angriffslinie verschieben, d. h. zwei gleiche Kräfte in derselben Angriffslinie sind einander gleichwertig.

Beweis: Die Kraft $\bar{k}$ greife im Punkte A an. Im Punkte B, der auf der Angriffsgraden von $\bar{k}$ liegt, füge man eine Kraft $\bar{k}_1 = \bar{k}$ und eine Kraft $\bar{k}_2 = -\bar{k}$ hinzu, was man nach unserem neuen Axiom tun darf. Nun heben sich aber nach demselben Axiom $\bar{k}$ und $\bar{k}_2$ auf, also bleibt $\bar{k}_1$ übrig. $\bar{k}$ ist also $\bar{k}_1$ gleichwertig, w. z. b. w.

Als erlaubte Operationen wollen wir nunmehr die folgenden bezeichnen:

1. Verschiebung einer Kraft in ihrer Angriffslinie.

2. Hinzufügung zweier entgegengesetzter gleicher Kräfte am selben Angriffspunkte.

3. Zusammensetzung zweier an demselben Punkte angreifenden Kräfte nach dem Parallelogrammsatze.

Eine Invariante nennen wir jeden, die Kräfte enthaltenden Ausdruck, der bei diesen Operationen ungeändert bleibt.

Wir wollen jetzt zeigen, daß es **zwei Invarianten** *gibt:*
a) die geometrische Summe aller Kräfte:

$$\bar{K} = \sum \bar{k}_\nu,$$

b) die geometrische Summe der Momente aller Kräfte, bezogen auf irgendeinen Punkt

$$\bar{M} = \sum \overline{a_\nu k_\nu}.$$

Dabei verstehen wir also unter dem Moment einer in A angreifenden Kraft in bezug auf den Punkt O das äußere Produkt $\overline{ak}$ der Vektoren $\bar{a} = \overline{OA}$ und $\bar{k}$, d. h. einen Vektor, der auf der Ebene durch O und die Angriffsgrade von $\bar{k}$ senkrecht steht, der so gerichtet ist, daß von ihm aus gesehen die Kraft $\bar{k}$ nach links zeigt (wenn man $\overline{ak}$ und $\bar{k}$ beide von O aus abträgt) und dessen Größe

$$|\overline{ak}| = a \cdot k \cdot \sin(\bar{a}, \bar{k}) = h \cdot k$$

ist, wo h die Länge des Lotes ist, das man von O auf die Angriffsgerade von $\bar{k}$ fällen kann. h heißt auch der „Hebelarm" der Kraft $\bar{k}$ in bezug auf O.

Daß $\bar{K}$ und $\bar{M}$ invariant sind, ist leicht einzusehen.

Für $\bar{K} = \sum \bar{k}_\nu$ ist die Behauptung wohl selbstverständlich, denn bei Operation 1 ändert sich ja keines der Glieder, und daß eine Summe ungeändert bleibt, wenn man zwei entgegengesetzt gleiche Glieder hinzufügt oder wenn man zwei Glieder zusammenfasst, ist klar.

Daß $\bar{M} = \sum \overline{a_\nu k_\nu}$ invariant ist, läßt sich so zeigen: bei der Operation 1 bleibt jedes Glied ungeändert, da Ebene, Sinn und Größe des Momentes ungeändert bleiben. Bei 2 ändert sich $\bar{M}$ auch nicht, da zwei entgegengesetzt gleiche $\bar{k}$ mit demselben $\bar{a}$ entgegengesetzt gleiche Momente haben. Daß $\bar{M}$ auch bei 3 invariant sei, kommt auf die Behauptung hinaus, daß — es mögen etwa $\bar{k}_1$ und $\bar{k}_2$ an demselben Punkte $A(\bar{a})$ angreifen und also zu $\bar{k}_1 + \bar{k}_2$ zusammengesetzt werden —

$$\overline{ak_1} + \overline{ak_2} = \overline{a(k_1 + k_2)}$$

sei. Diese Aussage ist aber richtig, sie ist keine andere als das distributive Gesetz der äußeren Multiplikation (siehe Anhang I, 5).

Diesen letzteren fundamentalen Satz verdankt man, wenn auch nur für den Fall, daß alle Vektoren in derselben Ebene liegen, Varignon.

113. Zurückführung des allgemeinen Falles auf den vorhergehenden. Axiomgruppe VII. Wir betrachten jetzt den Fall, daß eine unendliche Anzahl räumlich oder flächenhaft verteilter Kräfte $d\bar{k}$ auf den Körper wirke.

Eine einzelne Kraft zu verschieben, hat jetzt keinen Sinn. Wir sprechen daher das Axiom der vorigen Nummer in Verbindung mit dem Parallelogrammsatz in etwas abgeänderter Form aus, doch so, daß es für den Fall endlicher Kräfte mit jenen beiden identisch wird:

Axiom VII, 1: Gehen die Angriffsgeraden mehrerer Kräfte $d\bar{k}$ durch einen Punkt hindurch, so sind die Kräfte alle einer einzelnen Kraft gleichwertig, deren Angriffslinie durch denselben Punkt hindurchgeht und welche gleich der Summe $\mathfrak{S}\, d\bar{k}$ der in Rede stehenden Kräfte ist.

Außerdem machen wir noch von dem umgekehrten Parallelogrammsatz Gebrauch:

Man kann jede Kraft in drei Komponenten zerlegen, welche an demselben Punkte angreifen und gegebene Richtungen haben, vorausgesetzt, daß diese Richtungen nicht in eine Ebene fallen (siehe Anhang I, 1).

Wir wollen zeigen, daß man am starren Körper jedes Kräftesystem auf drei Kräfte zurückführen kann.

Beweis: Wir wählen uns in einer Ebene außerhalb des starren Körpers drei Punkte O_1, O_2, O_3, welche nicht in einer Geraden liegen. Jede Kraft, welche an einer Stelle A angreift, können wir dann in drei Komponenten nach den Richtungen AO_1, AO_2 und AO_3 zerlegen, denn diese Richtungen fallen sicher nicht in eine Ebene. Das ganze Kräftesystem besteht jetzt aus drei Gruppen: die eine hat Angriffslinien durch O_1, die andere solche durch O_2, die dritte solche durch O_3. Jede Gruppe können wir nach Axiom VII, 1 zu einer Kraft zusammensetzen, w. z. b. w.

Daß bei den durch Axiom VII, 1 und den Parallelogrammsatz erlaubten Operationen die Summen (Integrale)

$$\bar{K} = \mathfrak{S}\, d\bar{k} \quad \text{und} \quad \bar{M} = \mathfrak{S}\, \bar{a}\, d\bar{k}$$

invariant sind, dürfte einleuchten.

Aus den folgenden Untersuchungen dieses Kapitels (Nr. 116, 124), wird dann hervorgehen, daß dies auch die einzigen Invarianten sind.

Zu Axiom VII, 1 fügen wir noch die folgenden einleuchtenden, durch das tägliche Leben erprobten Axiome hinzu:

Axiom VII, 2: Ein starrer Körper ist sicher nicht im Gleichgewicht, wenn auf ihn eine einzige, von Null verschiedene Kraft wirkt; und

Axiom VII, 3: Ein starrer Körper ist sicher nicht im Gleichgewicht, wenn auf ihn ein sogenanntes „Kräftepaar“, d. h. zwei entgegengesetzt gleiche, nicht in derselben Angriffslinie liegende Kräfte wirken, die nicht Null sind, oder wenn auf ihn *eine* Einzelkraft und *ein* Kräftepaar einwirken.

Der fundamentale Begriff des Kräftepaares stammt von Poinsot („Statique", 1803).

Axiom VII, 4: Ein starrer Körper ist sicher im Gleichgewicht, wenn gar keine äußere Kraft auf ihn wirkt.

(Wollten wir den allgemeinen Schwerpunktsatz voraussetzen (siehe Nr. 52 oder 107), so wäre VII, 2 natürlich eine unmittelbare Folge desselben; ebenso VII, 3 eine Folge des Momentensatzes (siehe Nr. 108 und 114). Überhaupt sind die Axiome VII nur für einen selbständigen Aufbau der Statik nötig.)

114. Bildung des Momentes für verschiedene Bezugspunkte. Das Moment eines Kräftepaares. Bilden wir die Summe der Momente für einen neuen Bezugspunkt O', so bekommen wir keine wesentlich neue Invariante.

Denn sei $\overline{O'A} = \bar{y}$, $\overline{O'O} = \bar{s}$, so daß

$$\bar{a} = \bar{y} - \bar{s}$$

ist, so folgt für das neue Moment

$$\bar{M}' = \mathfrak{S}\bar{y}\bar{dk} = \mathfrak{S}\bar{a}\bar{dk} + \bar{s}\mathfrak{S}\bar{dk}$$

oder

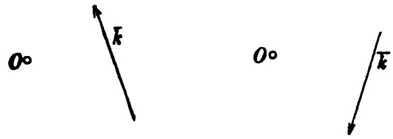
$$\bar{M}' = \bar{M} + \bar{s}\bar{K}.$$

Man erhält also das Moment in bezug auf den neuen Bezugspunkt, indem man zu dem alten Moment noch ein Moment hinzufügt, das man bekommt, indem man die Resultierende $\bar{K}$ in dem alten Bezugspunkte O angreifen läßt und ihr Moment inbezug auf den neuen bildet.

Daraus folgt sofort, daß das Moment eines Kräftepaares — wir verstehen darunter die Summe der Momente der beiden das Paar bildenden Kräfte — von der Wahl des Bezugspunktes unabhängig ist. Denn es ist $\bar{K} = 0$. Wählen wir dann den Bezugspunkt in dem Angriffspunkt der einen der beiden Kräfte, so erkennen wir, daß das Moment eines Kräftepaares auf der Ebene desselben senkrecht steht derart, daß von dem Momentvektor aus gesehen die Kräfte durch ihre Pfeile einen Drehsinn links herum anzeigen und daß die Größe des Momentes gleich dem Produkt aus der Größe der Kraft und dem Hebelarm des Paares, d. h. dem normalen Abstande beider Angriffslinien ist.

§ 24. Zusammensetzung der Kräfte in der Ebene.

115. Zusammensetzung zweier Kräfte. Es sei eine endliche Anzahl endlicher Kräfte — wir können uns ja nach Nr. 113 auf diesen Fall beschränken — gegeben, welche in einer Ebene liegen und an einem starren Körper angreifen. Den Bezugspunkt O der Momente wählen wir ebenfalls in dieser Ebene. Dann stehen alle Momente auf dieser Ebene senkrecht und unterscheiden sich außer durch ihre Größe nur noch durch den Sinn. Es genügt deshalb hier, die Momente als Skalare aufzufassen, die positiv und negativ sein können. Denken wir uns in die Ebene ein x, y Koordinatensystem hineingelegt, so wollen wir die Richtung der z-Achse — das x, y, z-System sei ein sogenanntes rechtshändiges System, d. h. liegt die x-Achse nach rechts, die y-Achse nach links, so soll die z-Achse nach oben gerichtet sein — als positive Richtung für die Momente wählen. Dann ist ein Moment positiv, wenn der Kraftvektor von vorn — von der z-Achse — aus gesehen in bezug auf den Bezugspunkt O nach links zeigt.



Moment positiv. Moment negativ.
Fig. 67.

Wenn nun von den gegebenen Kräften zwei Angriffsgeraden sich in einem Punkte S schneiden, so können wir nach Axiom VII, 1 die beiden Kräfte durch eine in S angreifende ersetzen.

Sind zwei Kräfte parallel und gleichgerichtet, so kann man sie ebenfalls durch eine einzige Resultierende ersetzen.

Beweis: Es seien $\bar{p}$ und $\bar{q}$ parallel und gleichgerichtet. In zwei Punkten A und B der beiden Angriffslinien füge man zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte $\bar{s}$ und $-\bar{s}$ in derselben Angriffslinie hinzu, was man tun darf. Nun setze man $\bar{p}$ und $\bar{s}$ zu einer Resultierenden $\bar{u}$ zusammen, $\bar{q}$ und $-\bar{s}$ zu einer Resultierenden $\bar{v}$.

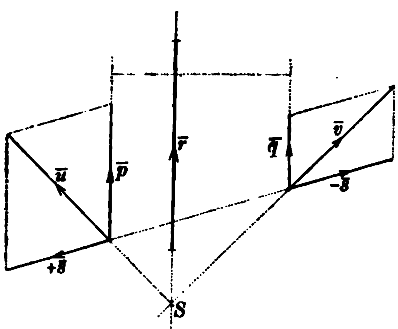


Fig. 68.

Die Angriffsgeraden von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ schneiden sich aber in einem Punkte S und können daher zu einer Resultierenden $\bar{r}$ zusammengesetzt werden.

Aus den Sätzen, daß $\sum \bar{k}$ und $\sum \overline{ak}$ invariant sind, läßt sich nun $\bar{r}$ nach Richtung, Größe und Lage ohne weiteres bestimmen.

Es muß sein

$$\bar{r} = \bar{p} + \bar{q},$$

d. h. $\bar{r}$ ist von derselben Richtung wie die gegebenen Kräfte und seine Größe ist gleich ihrer gewöhnlichen Summe:

$$r = p + q$$

Ferner muß in bezug auf einen beliebigen Punkt O

$$\overline{xr} = ap + \overline{bq}$$

sein, wenn $\bar{x}$, $\bar{a}$, $\bar{b}$ die Vektoren nach den Angriffspunkten von $\bar{r}$, $\bar{p}$, $\bar{q}$ sind.

Wählen wir O auf der gewählten Angriffsgeraden von $\bar{r}$, so ist

$$O = \overline{ap} + \overline{bq}\cdot$$

Daraus folgt zunächst: $\bar{r}$ liegt zwischen $\bar{p}$ und $\bar{q}$, denn nur dann können $\bar{p}$ und $\bar{q}$ entgegengesetzt gleiche Momente haben. Weiter: wenn a und b die Abstände der Angriffsgeraden von $\bar{r}$ von $\bar{p}$ und $\bar{q}$ sind, so folgt

$$pa = qb,$$

d. h. $\bar{r}$ teilt den Abstand von $\bar{p}$ und $\bar{q}$ im umgekehrten Verhältnis der Kräfte.

Damit ist dieser Fall erledigt.

Zwei entgegengesetzt gerichtete, ungleiche Kräfte kann man ebenfalls auf eine Einzelkraft reduzieren.

Beweis analog wie vorhin. Auch jetzt werden sich die Kräfte $\bar{u}$, $\bar{v}$ in einem Punkte S schneiden, obwohl $\bar{u}$, $\bar{v}$ gegen $\bar{p}$, $\bar{q}$ im selben Sinne herausgedreht sind. Aber der Winkel zwischen $\bar{p}$, $\bar{u}$ wird kleiner sein als der Winkel zwischen $\bar{q}$ und $\bar{v}$, weil $p > q$ angenommen ist.

Es wird also eine Resultierende $\bar{r}$ geben. Aus

$$\bar{r} = \bar{p} + \bar{q}$$

folgt wie früher:

Die Resultierende hat dieselbe Richtung wie die größere der beiden Kräfte ($\bar{p}$) und ihre Größe ist gleich der Differenz der gegebenen Kräfte

$$r = p - q.$$

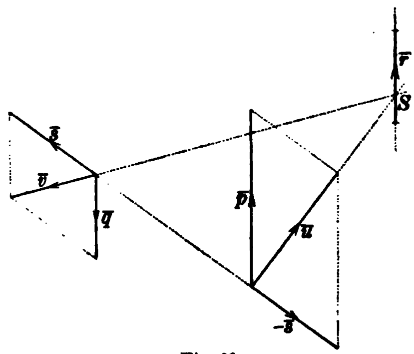


Fig. 69.

Wählen wir den Bezugspunkt für die Momente wieder auf $\bar{r}$, so ergibt sich

$$O = \overline{ap} + \overline{bq}.$$

Daraus erkennt man, daß $\bar{r}$ außerhalb $\bar{p}$ und $\bar{q}$ liegen muß, daß ferner

$$ap = bq$$

sein muß, wenn a und b die Abstände zwischen r und p bzw. q bedeuten.

Daraus folgt dann schließlich, daß, weil $p > q$, $b > a$ sein muß, d. h. die Resultierende liegt auf Seiten der größeren der beiden Kräfte.

Es erübrigt noch der Fall der entgegengesetzt gleichen Kräfte, d. h. das Kräftepaar.

Ein Kräftepaar kann man nicht auf eine Einzelkraft zurückführen.

Wäre dies wohl möglich, $\bar{r}$ die Resultierende, so müßte $\bar{r} = \bar{p} + (-\bar{p}) = 0$ sein.

Andererseits aber wäre

$$x r = \overline{ap} + \overline{b(-p)} = \overline{(a-b)p} = \overline{M},$$

wo $\overline{M}$ das nicht verschwindende Moment des Kräftepaares ist. Es könnte also $\bar{r}$ nicht Null sein.

Man hat das Resultat wohl so gedeutet, daß man sagt: ein Kräftepaar sei äquivalent einer Kraft von der Größe Null ($\bar{r} = 0$), welche in der unendlich fernen Geraden ($\bar{x} = \infty$) angreife. Man hat aber durch eine solche Redeweise praktisch nichts gewonnen.

116. Zusammensetzung beliebig vieler Kräfte. Die Gleichgewichtsbedingungen. Wenn beliebig viele Kräfte $\bar{k}', \bar{k}'' \ldots \bar{k}^{(n)}$ gegeben sind mit den Angriffspunkten $\bar{a}', \bar{a}'' \ldots \bar{a}^{(n)}$, so können wir von diesen immer je zwei zu einer Kraft zusammensetzen, solange nicht nur mehr eine Kraft oder ein Kräftepaar übrig bleibt; denn es können von drei Kräften höchstens zwei einander gleich und entgegengesetzt gerichtet sein.

Man kann somit das Kräftesystem der Ebene reduzieren auf eine einzige Kraft **oder** *auf ein Kräftepaar,*

die freilich auch Null sein können.

Man kann aber das Resultat aus unseren beiden Invarianten

$$\overline{K} = \sum \bar{k} \quad \text{und} \quad \overline{M} = \sum \overline{ak}$$

direkt bestimmen.

a) Ist

$$\overline{K} \neq 0,$$

so resultiert eine Einzelkraft. Denn resultierte ein Kräftepaar, oder wäre das Kräftesystem äquivalent Null, so müßte $\overline{K} = 0$ herauskommen.

$\overline{K}$ gibt dann schon die Resultierende nach Größe und Richtung.

Um ihre Angriffsgrade, die sogenannte „Zentrallinie“ des Kräftesystems zu finden, machen wir davon Gebrauch, daß das Gesamtmoment invariant ist. Sei $\bar{x}$ der Vektor vom Bezugspunkte O nach einem Punkte der Zentrallinie, so muß

$$\overline{xK} = \overline{M}$$

sein. Das ist die Gleichung der Zentrallinie (siehe Anhang II, 2).

Sei h der Abstand der Zentrallinie von O, so kann die vorstehende Gleichung nach dem im Anfang von Nr. 115 Gesagten auch so geschrieben werden:

$$\pm h \cdot K = M.$$

Das Zeichen $\pm$ bestimmt sich nach dem von M. Dieses Zeichen und die Größe von h bestimmt die Lage der Zentrallinie vollständig, da ja ihre Richtung durch $\overline{K}$ gegeben ist (vgl. Fig. 67).

b) Ist $\overline{K} = 0$, aber $\overline{M} \neq 0$, so kann nur ein Kräftepaar das Resultat der Reduktion sein, denn die beiden anderen Fälle sind ausgeschlossen. M ist das Moment dieses Kräftepaares.

c) Ist $\overline{K} = 0$ und $\overline{M} = 0$, so ist das Kräftesystem äquivalent Null, es hält sich am starren Körper das Gleichgewicht. Es muß sich dann das Kräftesystem auf zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte in derselben Angriffslinie reduzieren lassen, die sich aufheben.

$\overline{K} \equiv \sum \overline{k} = 0$ und $\overline{M} \equiv \sum \overline{a k} = 0$ sind also jedenfalls hinreichende Gleichgewichtsbedingungen des starren Körpers; daß sie auch notwendig sind, folgt aus den Axiomen VII, 2 *und* VII, 3.

Denn wirkt keine Kraft auf den starren Körper, so ist nach dem Axiom VII, 4 der Körper im Gleichgewicht, d. h. er bleibt in Ruhe, wenn er einmal in Ruhe war.

Es genügt, die Bedingung $\overline{M} = 0$ für einen Punkt auszusprechen: denn da nach Nr. 114 für einen neuen Bezugspunkt $\overline{M}' = \overline{M} + \overline{s K}$ ist, so ist $\overline{M}'$ von selbst Null, wenn $\overline{M}$ und $\overline{K}$ Null sind.

In dem besonderen Falle, daß drei Kräfte auf den starren Körper wirken und daß von diesen wenigstens zwei ($\overline{k}'$ und $\overline{k}''$) sich in einem Punkte S schneiden, läßt sich die Gleichgewichtsbedingung besonders anschaulich aussprechen:

$$\sum \overline{k} = \overline{k}' + \overline{k}'' + \overline{k}''' = 0$$

heißt, die Kräfte bilden aneinander gereiht ein geschlossenes Dreieck.

$$\sum \overline{a k} = 0$$

heißt, wenn wir S zum Bezugspunkt machen,

$$a''' \overline{k}''' = 0,$$

d. h. $\overline{k}'''$ geht ebenfalls durch S hindurch:

die Angriffsgeraden der drei Kräfte müssen durch einen Punkt hindurchgehen.

Die Zusammensetzung von Kräftepaaren ist in unseren vorhergehenden Betrachtungen mit enthalten. Denn zwei Kräftepaare sind nichts anderes als vier Kräfte besonderer Art.

Man erkennt sofort:

Zwei Kräftepaare in derselben Ebene ergeben wieder ein Kräftepaar, dessen Moment gleich der Summe der Momente jener ist.

Zwei Kräftepaare von entgegengesetzt gleichen Momenten heben sich auf.

Daraus folgt schließlich:

Zwei Kräftepaare von gleichem Moment sind einander äquivalent.

Allgemeiner:

Zwei Kräftesysteme von gleichem Moment und gleicher Resultierenden sind einander äquivalent.

Beweis: S_1 sei das eine, S_2 das andere System. Man konstruiere zu S_2 das entgegengesetzte System S_2', indem man alle Kräfte der Richtung nach umdreht. Dann heben sich sicher S_2 und S_2' gegenseitig auf, und man darf sie also beide zu S_1 hinzufügen. Nunmehr heben sich aber auch S_1 und S_2' auf, denn die Summe ihrer Kräfte und die Summe der Momente ist nach der Voraussetzung Null. Es bleibt also S_2 übrig, w. z. b. w.

Damit ist zugleich, wenigstens für die Ebene, bewiesen, daß

$\bar{K}$ und $\bar{M}$ die einzigen Invarianten sind.

Denn Kräftesysteme mit gleichem $\bar{K}$ und $\bar{M}$ sind einander in allen Fällen äquivalent.

117. Analytische Formulierung der Resultate. Es habe nach den rechtwinkligen Achsen $x, y, \bar{k}$ die Komponenten k_x, k_y, $\bar{K}$ die Komponenten K_x, K_y, $\bar{a}$ die Komponenten a, b. Der Bezugspunkt O sei zugleich Anfangspunkt des Koordinatensystems.

Dann entstehen aus

$$\bar{K} = \sum \bar{k}$$

die beiden Gleichungen

$$K_x = \sum k_x,$$
$$K_y = \sum k_y,$$

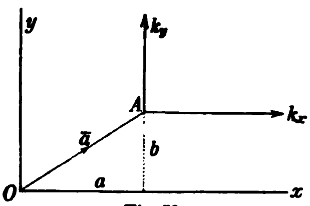


Fig. 70.

und da $\overline{ak}$ die Komponenten

$$0,\ 0\ ak_y - bk_x,$$

hat (siehe Anhang II, 1), so wird aus

$$\bar{M} = \sum \overline{ak}$$

die eine Gleichung

$$M = \sum (ak_y - bk_x).$$

Die Richtigkeit dieser Formel lehrt auch sofort die Anschauung (Fig. 70).

Als Gleichgewichtsbedingungen hat man somit

$$\sum k_x = 0,$$

$$\sum k_y = 0$$

und

$$\sum (a k_y - b k_x) = 0.$$

Diese Gleichung tritt als neu zu den beiden ersten aus Abschnitt I bekannten hinzu.

Ist $\overline{K} \neq 0$, so lautet die Gleichung der Zentrallinie, da

$$\bar{x} K = \overline{M}$$

sein muß,

$$y K_x - x K_y = M,$$

x, y sind dabei die laufenden Koordinaten der Zentrallinie.

Aufgabe 58: Man reduziere die Kräfte von den Größen 10, 12, 7, 13 kg, deren Angriffsgeraden eine Achse unter Winkeln von 30°, 90°, 45°, 120° in vier Punkten schneiden, welche die Abstände 3, 2 und 4 m voneinander haben.

118. Graphische Methode (Seilpolygon). Diese Methode ist nichts anderes als eine systematische zeichnerische Durchbildung des Grundgedankens von Nr. 115.

Gegeben seien die Kräfte $\bar{k}_1, \bar{k}_2 \ldots \bar{k}_n$ mit ihren Angriffslinien.

Man kann dann zunächst $\overline{K} = \sum \bar{k}$ leicht bestimmen: Man reihe die Kräfte in irgendeiner Reihenfolge ungeändert nach Größe und Richtung zu einem Streckenzug $K_0 K_1 \ldots K_n$ mit fortlaufendem Pfeilsinn aneinander, dem sogenannten Krafteck oder Kräftepolygon. Die Verbindungsstrecke $\underline{K_0} K_n$ des Anfangs- mit dem Endpunkte gibt dann die Resultierende $\overline{K}$. Schließt sich das Krafteck, ist $K_n = K_0$, so ist $\overline{K} = 0$, die erste Bedingung des Gleichgewichts ist erfüllt.

Wie findet man nun in dem Falle $\overline{K} \neq 0$ die Zentrallinie und wie entscheidet man im Falle $\overline{K} = 0$, ob Gleichgewicht herrscht oder ob ein Kräftepaar resultiert?

Wir lösen zunächst die erste Frage, nehmen also $\overline{K} \neq 0$ an.

Wir setzten früher die Kräfte Stück für Stück zusammen. Dabei konnte nur die Schwierigkeit paralleler Kräfte auftreten, die wir dadurch meisterten, daß wir zwei sich aufhebende Kräfte $\bar{s}$ und $-\bar{s}$ hinzufügten.

Derselbe Kunstgriff wird offenbar möglich sein, wenn der Schnittpunkt zweier Kräfte praktisch (zeichnerisch) unerreichbar ist.

Wir wenden ihn jetzt prinzipiell an, indem wir von Anfang an zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte $\bar{r}_0 = \overline{P K_0}$ und $-\bar{r}_0 = \overline{K_0 P}$ in dem Strahl $S_1 S_0$ angreifen lassen, wo S_1 ein willkürlich gewählter Punkt auf der Angriffsgeraden von $\bar{k}_1$ ist, P ein willkürlich gewählter Punkt des Kraftecks.

Natürlich muß $S_1 S_0$ der Strecke PK_0 parallel sein.

Wir setzen nun $\bar{r}_0$ und $\bar{k}_0$ zusammen: der Größe und Richtung nach wird das $\bar{r}_1$, die Strecke PK_1 sein, die Angriffsgerade $(S_1 S_2)$ wird durch S_1 hindurchgehen und PK_1 parallel sein. S_2 sei ihr Schnittpunkt mit der Angriffsgeraden von $\bar{k}_2$. Nun setzen wir $\bar{r}_1$ mit $\bar{k}_2$ zusammen zu $\bar{r}_2 = \overline{PK_2}$, die Angriffsgerade von $\bar{r}_2$ wird durch S_2 hindurchgehen müssen und $\bar{r}_2$ parallel sein. So fahren wir fort.

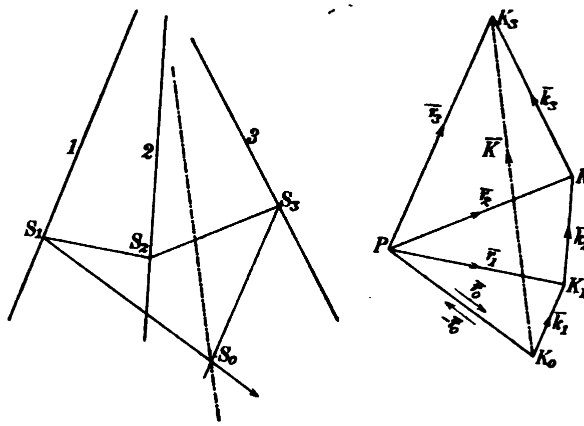


Fig. 71.

Schließlich ist außer $-\bar{r}_0$ in $S_1 S_0$ nur noch $\bar{r}_n = \overline{PK_n}$, die Resultierende von $\bar{r}_{n-1}$ und $\bar{k}_n$ übrig, ihre Angriffsgerade wird durch S_n auf der Angriffsgeraden von $\bar{k}_n$ hindurchgehen.

Die Resultierende von $-\bar{r}_0$ und $\bar{r}_n$ ist nach Richtung und Größe natürlich durch $\overline{K_0 K_n} = \bar{K}$ gegeben, um aber einen Punkt ihrer Angriffsgeraden zu finden, brauchen wir nur den Schnittpunkt S_0 der Angriffsgeraden von $-\bar{r}_0$ und $\bar{r}_n$ zu konstruieren. (In der Figur ist $n = 3$.)

Das Resultat läßt sich leicht zu folgender Regel zusammenfassen:

„Man wähle im Krafteck einen Punkt P, den Pol willkürlich und ziehe die Polstrahlen PK_0, $PK_1 \ldots$ bis PK_n. Auf einer Angriffsgeraden, etwa der von $\bar{k}_1$, wähle man einen Punkt S_1 beliebig und zeichne nun das sogenannte Seileck, d. h. Seilstrahlen parallel zu den Polstrahlen, so daß die beiden Seilstrahlen, die einer Kraft zugehören, d. h. deren entsprechende Polstrahlen die Kraft begrenzen, sich auf der Angriffsgeraden der Kraft schneiden. Der erste und letzte Seilstrahl, d. h. diejenigen, deren Polstrahlen im Krafteck — auch Poleck genannt — die Resultierende einschließen, schneiden sich in einem Punkte der Zentrallinie."

Wenn jetzt $\bar{K} = 0$ ist, d. h. $K_n = K_0$ ist, so verfahren wir ganz analog. Es wird jetzt $\bar{r}_n = \bar{r}_0$ werden, der erste und letzte Polstrahl werden zusammenfallen. Aber der erste und letzte Seilstrahl werden das im allgemeinen nicht tun, sie werden parallel sein.

Das Kraftsystem ist somit auf ein Kräftepaar zurückgeführt: $-\bar{r}_0$ und $\bar{r}_n = +\bar{r}_0$ sind die Kräfte nach Richtung und Größe, die Angriffsgeraden werden die sogenannten freien Seilstrahlen $S_1 S_0$ und $S_n S_{n+1}$ sein, die parallel sind. (In der Figur 72 ist $n = 4$).

Nur wenn diese Seilstrahlen zusammenfallen, wenn also auch das Seileck geschlossen ist, werden $-\bar{r}_0$ und $\bar{r}_n$ sich aufheben, also Gleichgewicht bestehen. (Man hat dann dieselbe Figur wie 71, nur daß statt $\bar{K}$ zu schreiben ist $-\bar{k}_4$).

Damit also Gleichgewicht besteht, müssen Krafteck und Seileck sich schließen.

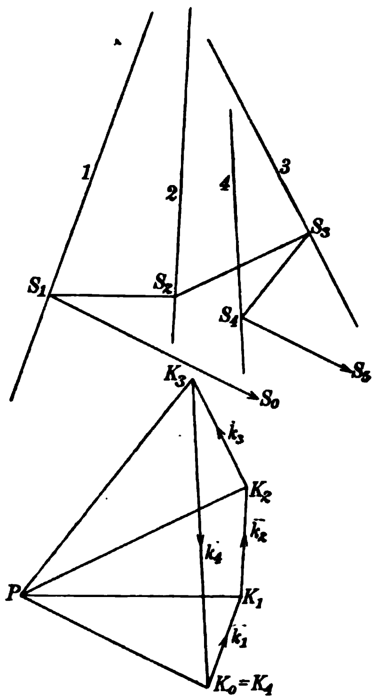


Fig. 72.

Die Namen Seilstrahl und Seileck haben folgende Bedeutung: Denken wir uns den Gleichgewichtsfall und $S_1 S_2 S_3 \ldots S_n$ als ein Polygon aus Idealfäden (siehe Nr. 65). An den Ecken mögen die Kräfte $\bar{k}_1 \ldots \bar{k}_n$ angreifen. Damit nun Gleichgewicht besteht, müssen sich an den Ecken die Kräfte jeweils mit den Seilspannungen das Gleichgewicht halten, d. h. jedes $\bar{k}_\nu$ muß mit den beiden Seilspannungen, die ihm zugehören, ein geschlossenes Dreieck bilden. Man erkennt daraus direkt, daß $\bar{r}_{\nu-1}$ und $-\bar{r}_\nu$ diese Spannungen sind, denn sie liegen ja in den Richtungen der Seilstrahlen.

Freilich müßten wir, um den allgemeinen Fall zu erhalten, auch Drucke in den Fäden (Seilen) zulassen. (Man spräche deshalb besser von einem Stabpolygon.)

Die Gleichgewichtsbedingung eines solchen Seilecks zu suchen, war ein Problem Varignons. Bei ihm kommt daher unsere Figur schon vor. Damit das Seileck $S_1 \ldots S_n$ unter den Kräften $\bar{k}_1 \ldots \bar{k}_n$ im Gleichgewicht sei, müssen die zu den Seilstrahlen parallelen Polstrahlen durch einen Punkt gehen.

Diesen Satz fand Varignon.

Die Benutzung dieses Resultats in dem hier dargelegten Sinne, zur Entscheidung, ob bei einem starren Körper Gleichgewicht herrscht oder nicht, stammt von Culmann („Graphische Statik“ 1864 u. 1866).

Alle weiteren Literaturnachweise findet man in der Enzyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. IV. Artikel 5, Henneberg: „Die graphische Statik der starren Körper“.

Man bezeichnet nämlich die in dieser Nummer dargestellte Methode und ihre Weiterbildung als „graphische Statik“.

Aufgabe 59: Man löse die Aufgabe 58 auf graphischem Wege.

119. Die Culmannsche Gerade. Bei der Konstruktion des Seilecks sind drei Stücke willkürlich: die beiden Koordinaten des Pols P und die Lage des Punktes S_1 auf der ersten Angriffsgeraden. Es wird also ∞^3 Seilecke zu einem Kräftesystem geben. Wir wollen über die gegenseitige Lage dieser verschiedenen Seilecke den folgenden Satz aussprechen:

Die entsprechenden Seilstrahlen zweier zu einem Kräftesystem gehörenden Seilecke schneiden sich in Punkten, welche auf einer Geraden liegen, der sogenannten Culmannschen Geraden, und diese Gerade ist der Verbindungsstrecke der beiden Pole parallel.

Den trivialen Fall, daß die beiden Pole zusammenfallen, können wir wohl von der Betrachtung ausschließen: die Culmannsche Gerade ist dann die unendlich ferne Gerade.

Wir wollen einen sehr schönen Beweis des Satzes geben, der auf der dynamischen Bedeutung der Figuren beruht und den man im wesentlichen Mohr verdankt.

Die Ecken des Kraftecks mögen wieder wie früher $K_0 K_1 \ldots K_n$ heißen; die Polstrahlen $P'K_0$, $P'K_1 \ldots$ fassen wir dann wieder als Kräfte $\bar{s}_0, \bar{s}_1 \ldots \bar{s}_n$ auf. Dann haben wir die beiden folgenden Reihen von Äquivalenzen

$$\begin{array}{llll@{\qquad}llll}
\bar{r}_0 & \text{und } \bar{k}_1 & \text{äquivalent} & \bar{r}_1 & \bar{s}_0 & \text{und } \bar{k}_1 & \text{äquivalent} & \bar{s}_1 \\
\bar{r}_1 & \text{„} \quad \bar{k}_2 & \text{„} & \bar{r}_2 & \bar{s}_1 & \text{„} \quad \bar{k}_2 & \text{„} & \bar{s}_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\bar{r}_{n-1} & \text{„} \quad \bar{k}_n & \text{„} & \bar{r}_n & \bar{s}_{n-1} & \text{„} \quad \bar{k}_n & \text{„} & \bar{s}_n
\end{array}$$

Versehen wir die zweite Reihe mit dem Minuszeichen, wodurch an der Äquivalenz nichts geändert wird, und fügen sie zur ersten hinzu, so bekommen wir die neue Reihe

$\bar{r}_0$ und $-s_0$ äquivalent $\bar{r}_1$ und $-\bar{s}_1$ äquivalent $\bar{r}_2$ und $-\bar{s}_2$ usw.

Daraus aber folgt zunächst, daß die vektorielle Gleichung bestehen muß

$$\bar{r}_0 - \bar{s}_0 = \bar{r}_1 - \bar{s}_1 = \cdots$$

Die ist aber selbstverständlich, denn alle diese Differenzen sind gleich dem Vektor $\overline{PP'}$.

Aber es folgt weiter, daß die Schnittpunkte der Angriffsgeraden von $\bar{r}_0$ und $-\bar{s}_0$, der von $\bar{r}_1$ und $-\bar{s}_1$ usw. alle auf einer Geraden liegen müssen, eben der Angriffsgeraden ihrer gemeinsamen Resultierenden $\overline{PP'}$. Es liegt aber $\bar{r}_\nu$ im $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Seilstrahl des ersten, $-\bar{s}_\nu$ im $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Seilstrahl des zweiten Seilecks. Und damit ist der Culmannsche Satz bewiesen.

120. Lösung der Aufgabe, das Seileck durch drei gegebene Punkte zu legen. Da bei der Zeichnung eines Seilecks noch drei Stücke willkürlich sind, wird man das Seileck drei Bedingungen unterwerfen können; man wird z. B. vorschreiben dürfen, daß drei bestimmte Seilstrecken durch drei gegebene Punkte hindurchgehen. Ehe wir zur Lösung dieser wichtigen Aufgabe schreiten, seien zwei Bemerkungen gestattet:

1. Man kann irgend zwei Polstrahlen, also auch irgend zwei Seilstrahlen eine Kraft zuordnen, nämlich die Resultierende aller der Kräfte, die zwischen die beiden Polstrahlen gereiht sind. Handelt es sich um den ν^{ten} und den $\nu+\lambda^{\text{ten}}$ Polstrahl, so kann man ihnen die Teilresultierende von $\bar{k}_\nu, \bar{k}_{\nu+1} \ldots \bar{k}_{\nu+\lambda-1}$ zuordnen. Ein Punkt der Angriffslinie dieser Teilresultierenden wird dann durch den Schnittpunkt des ν^{ten} mit dem $(\nu+\lambda)^{\text{ten}}$ Seilstrahl gegeben sein. Das ist nach den allgemeinen Ausführungen von Nr. 118 ganz selbstverständlich.

2. Umgekehrt kann man in den vollendeten Figuren des Kraft- und Seilecks eine jede Kraft in zwei Komponenten zerlegen, und zwar durch bloße Einschaltung je eines Polstrahls und eines Seilstrahls, wenn man die Kraft in zwei gleichgerichtete Komponenten spalten

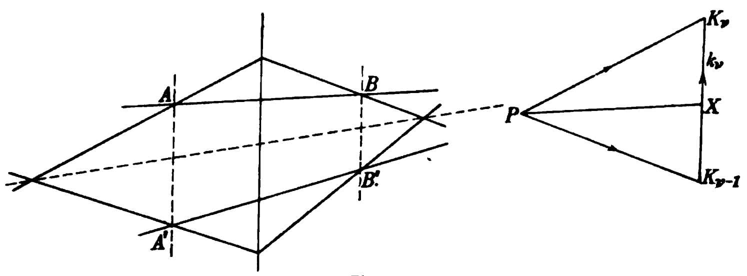


Fig. 73.

will. Man braucht nur irgendeinen Punkt X der Kraft $\bar{k}_\nu$ mit P zu verbinden und zu PX irgendeine Parallele im Seileck zu ziehen. Schneidet diese den ν^{ten} und den $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Seilstrahl in A resp. B, so sind A und B Angriffspunkte der Komponenten.

Daraus folgt sofort folgender Hilfssatz: Wählt man auf zwei Seilstrahlen die Punkte A und B und zieht durch sie die Parallelen zur zugehörigen Kraft, bis sie die Seilstrahlen eines zweiten Seilecks in

$A'B'$ treffen, so schneiden sich AB und $A'B'$ auf der Culmannschen Geraden.

Dieser Satz ist nach Nr. 119 selbstverständlich, da man AB und $A'B'$ als Seilstrahlen auffassen kann für zwei Kräfte in AA' resp. BB'.

Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir an die Lösung unserer Aufgabe heran.

Wenn der ν^{te}, der $(\nu+\lambda)^{\text{te}}$ und der $(\nu+\lambda+\mu)^{\text{te}}$ Seilstrahl durch die Punkte A, B, C gehen sollen, so betrachten wir die Teilresultierenden, die zu ihnen gehören und die wir stets nebst ihren Angriffslinien durch eine erste Seilkonstruktion finden können, die wir doch ausführen müssen. Dadurch aber führen wir die Aufgabe auf den einfachen Fall zurück, daß drei benachbarte Seilstrahlen durch A, B, C geben sollen.

Die beiden zugehörigen Kräfte seien $\bar{k}_1$ und $\bar{k}_2$.

Nachdem wir ein erstes Seileck konstruiert haben, ziehen wir durch A, B Parallele zu $\bar{k}_1$, bis sie die zu $\bar{k}_1$ gehörenden Seilstrahlen in A', B' schneiden. Nach dem Hilfssatz gibt dann der Treffpunkt von AB mit $A'B'$ einen Punkt (G) der Culmannschen Geraden, die zu dem ersten und zu dem gesuchten Seileck gehört. Ebenso ziehen wir durch B, C Parallele zu $\bar{k}_2$, bis sie die alten Seilstrahlen in B'', C'' schneiden. BC und $B''C''$ bestimmen einen neuen Punkt (H) der Culmannschen Geraden, die wir nunmehr ziehen können.

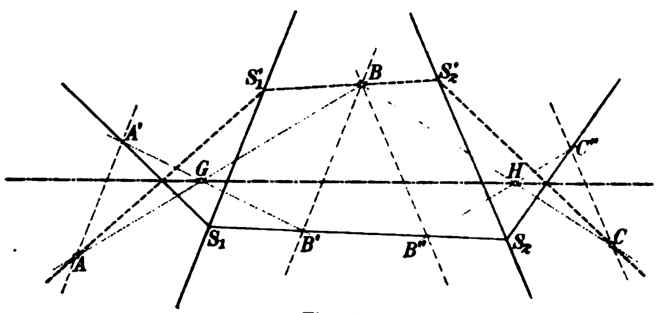


Fig. 74.

Unsere drei Seilstrahlen können wir jetzt richtig zeichnen, wenn wir bedenken, daß sie durch A, B, C hindurchgehen sollen und die alten auf der Culmannschen Geraden schneiden müssen. Alle anderen Seilstrecken ergeben sich dann von selbst, indem wir bedenken, daß ja zwei Seilstrahlen immer auf einer Kraft zusammenstoßen und sich immer je ein neuer und ein alter auf der Culmannschen Geraden schneiden müssen.

Bei der ganzen Konstruktion, die man Mohr verdankt, braucht man auf das Krafteck nicht zurückzugreifen.

§ 25. Zerlegung der Kräfte in der Ebene.

121. Zerlegung in zwei Kräfte. Soll eine Kraft $\bar{k}$, deren Angriffspunkt durch $\bar{a}$ gegeben ist, in zwei Kräfte $\bar{p}$ und $\bar{q}$ zerlegt werden, deren Angriffspunkte durch $\bar{x}$ und $\bar{y}$ bestimmt seien, d. h. soll $\bar{k}$ den Kräften $\bar{p}$ und $\bar{q}$ äquivalent sein, so müssen nach Nr. 116 die Gleichungen bestehen:

$$\bar{p} + \bar{q} = \bar{k},$$

$$\overline{xp} + \overline{yq} = \overline{ak}.$$

Das sind in der Ebene drei skalare Gleichungen. Andererseits ist jede Kraft mit ihrer Angriffslinie in der Ebene ebenfalls durch drei Stücke bestimmt, etwa durch die Richtung (einen Winkel), die Größe der Kraft und einen Punkt der Angriffslinie. Dabei zählt ein solcher Punkt nur als ein Stück, da die ∞^1 verschiedenen Punkte derselben Angriffsgeraden einander gleichwertig sind.

Die Kräfte $\bar{p}$ und $\bar{q}$ repräsentieren also sechs Variabele, drei von ihnen wird man noch geben können.

Da nun aber in den beiden ersten Gleichungen

$$\bar{p} + \bar{q} = \bar{k}$$

nur Richtung und Größe der beiden Kräfte vorkommen, so wird man von diesen vier Variabeln höchstens zwei geben dürfen.

Danach gibt es zwei Typen von Aufgaben: 1. Es können zwei Stücke der Vektoren $\bar{p}, \bar{q}$ gegeben sein. Alle diese Aufgaben führen wesentlich auf eine Aufgabe. Denn wenn zwei Stücke der Vektoren $\bar{p}, \bar{q}$ gegeben sind (z. B. die beiden Richtungen, oder die beiden Längen, oder eine Richtung und eine Länge), so kann man aus dem Kraftdreieck allein die beiden andern sofort finden. Und da noch ein Angriffspunkt gegeben sein muß, so bleibt von diesem Typus allein die Aufgabe:

Die Kräfte $\bar{p}, \bar{q}, \bar{k}$ sind gegeben, so daß $\bar{p} + \bar{q} = \bar{k}$ erfüllt ist. Zwei Angriffsgeraden, die von $\bar{p}$ und $\bar{k}$ sind ebenfalls bekannt, es soll die dritte, die von $\bar{q}$ gesucht werden.

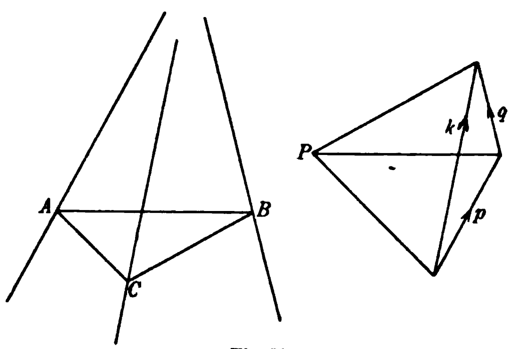


Fig. 75.

Wenn der Schnittpunkt S der beiden gegebenen Angriffsgeraden erreichbar ist, so kann man die Aufgabe durch einen Strich lösen: man hat einfach durch S die

Parallele zu $\bar{q}$ zu zeichnen. Denn die drei Angriffsgeraden müssen natürlich durch einen Punkt gehen (siehe die Bemerkung in Nr. 116).

Wenn nun S nicht erreichbar ist, so nehmen wir ein Seilpolygon zu Hilfe. Die Konstruktion versteht sich von selbst, wenn man beachtet, daß natürlich die Kräfte $-\bar{p}$, $-\bar{q}$ und $\bar{k}$ miteinander im Gleichgewicht sein müssen.

Man wählt einen Pol P beliebig, fängt die Seilkonstruktion in einem beliebigen Punkte A von $\bar{p}$ an und findet als dritte Ecke B, einen Punkt der Angriffsgeraden von $\bar{q}$.

Diese Konstruktion löst zugleich die Aufgabe, durch einen unerreichbaren Schnittpunkt (S) zweier Geraden eine Parallele zu einer gegebenen Richtung ($\bar{q}$) zu zeichnen.

122. Fortsetzung. 2. Es ist nur ein Stück von den Vektoren $\bar{p}$ und $\bar{q}$ gegeben, z. B. a) eine Länge oder b) eine Richtung. Dafür aber sind beide Angriffspunkte A, B der gesuchten Kräfte gegeben.

Wir lösen beide Aufgaben wieder vermittels eines Seilecks. Zunächst die Aufgabe 2a): Gegeben sei A, B und die Länge von p.

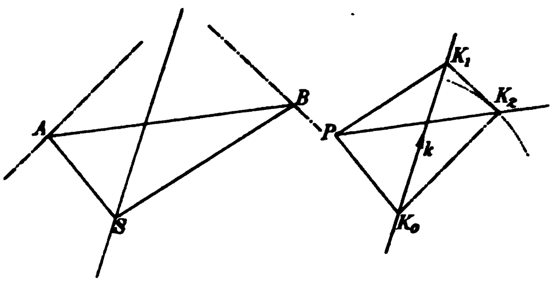


Fig. 76.

Wir wählen auf der Angriffsgeraden von $\bar{k}$ einen Punkt S und ziehen zuerst das Seileck SAB. Dazu konstruieren wir den Pol P, indem wir beachten, daß PK_0 parallel AS und PK_1 parallel SB sein muß (oder umgekehrt). Endlich ziehen wir einen dritten Polstrahl parallel AB. Auf diesem erhalten wir die dritte Ecke des Kraftecks, indem wir um K_0 mit p einen Kreis schlagen. Der Schluß der Aufgabe versteht sich dann von selbst: sie hat zwei oder gar keine Lösung.

Endlich lösen wir die wichtigste Aufgabe 2b) und zwar in etwas allgemeinerer Form:

Gegeben sei eine Reihe von Kräften $\bar{k}_1 \ldots \bar{k}_n$ mit ihren Angriffslinien. Man soll zwei Kräfte $\bar{p}$ und $\bar{q}$ finden, welche ihnen das Gleichgewicht halten und von denen die Angriffsgerade der einen ($\bar{p}$) gegeben ist, von der anderen ($\bar{q}$) dagegen nur ein Punkt (B) der Angriffslinie.

Wir zeichnen uns zunächst den Kräftezug $K_0 \ldots K_n$. Dieser ist durch zwei Strecken zu schließen, von denen wir nur die Richtung der einen ($\bar{p}$) kennen. Wir ziehen dementsprechend durch K_0 einen Strahl in der Richtung $\bar{p}$. Auf ihm liegt die letzte gesuchte Ecke K_{n+1}.

Nun wählen wir einen Pol P und fangen die Seilkonstruktion beim Punkte B an. D. h. wir beginnen mit dem einen bekannten zu $\bar{q}$ gehörenden Seilstrahl, der PK_n parallel ist. Wir fahren dann in der Seilkonstruktion fort und kommen mit einem Seilstrahl parallel PK_0 in einem Punkte S_0 der gegebenen Angriffsgeraden von $\bar{p}$ an.

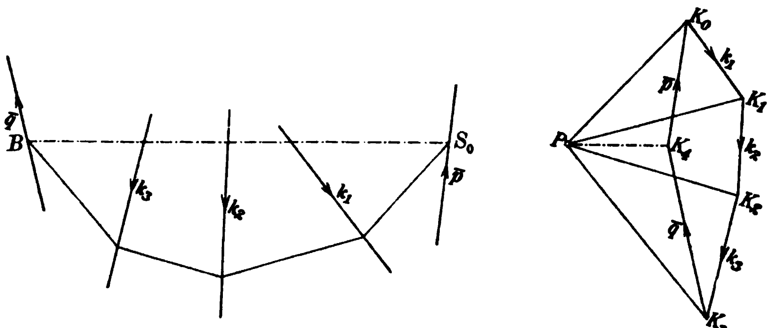


Fig. 77.

Nun muß das Seileck durch den fehlenden Seilstrahl geschlossen werden. Wir können ihn demnach zeichnen, es ist S_0B, die sogenannte Schlußlinie des Seilecks. Ihr muß der noch unbekannte Polstrahl PK_{n+1} parallel sein, den wir also nunmehr ebenfalls ziehen können. K_{n+1} ist jetzt gefunden und die Aufgabe gelöst: $\overline{K_nK_{n+1}} = \bar{q}$ und $\overline{K_{n+1}K_0} = \bar{p}$ sind die gesuchten Kräfte. (In der Fig. 77 ist $n = 3$).

Die Angriffsgerade von $\bar{q}$ läßt sich natürlich sofort durch B parallel zu $\bar{q}$ ziehen.

Wäre nur eine Kraft $\bar{k}$ da, so wäre die Lösung trivial, wenn der Schnittpunkt S der Angriffsgeraden von $\bar{k}$ mit der von $\bar{p}$ erreichbar wäre. Man brauchte nur B mit S zu verbinden und hätte die Richtung von $\bar{q}$ gefunden.

Unsere Konstruktion löst also auch die Aufgabe: Einen gegebenen Punkt B mit dem unerreichbaren Schnittpunkte S zweier Geraden zu verbinden.

Warum mußten wir die Konstruktion gerade im Punkte B beginnen?

123. Zerlegung in drei Kräfte. Von den vielen hier möglichen Aufgaben soll nur die wichtigste behandelt werden: gegeben sind die drei Angriffsgeraden der Kräfte, gesucht sind ihre Größen.

Wir lösen die Aufgabe zunächst graphisch und nehmen vorderhand an, daß der Schnittpunkt S zweier der gegebenen Angriffsgeraden erreichbar sei. Dann zerlegen wir zunächst die gegebene Kraft $\bar{k}$ in zwei Komponenten: die eine $\bar{k}'$ gehe durch S, die andere $\bar{r}$ liege in der dritten Angriffsgeraden. Das ist die Aufgabe 2 b) der vorigen Nummer. Dann zerlegen wir $\bar{k}'$ in zwei Komponenten nach den beiden ersten Angriffsgeraden; dazu braucht man nur noch $\bar{k}'$ durch Ziehen von Parallelen zu den Angriffsgeraden zu einem Dreieck zu ergänzen.

Wenn nun S nicht erreichbar ist, so hätten wir die Aufgabe 2b) der vorigen Nummer zu lösen, wobei jedoch der Punkt B als Schnitt zweier Geraden gegeben und nicht erreichbar wäre. Geht man die Konstruktion der vorigen Nummer durch, so führt dieser Umstand wieder auf diese beiden Aufgaben: durch einen unerreichbaren Punkt eine Parallele zu ziehen (Konstruktion des ersten Seilstrahls durch B) und einen unerreichbaren Punkt mit einem gegebenen zu verbinden (Konstruktion der Schlußlinie). Diese beiden Aufgaben sind aber mit den Aufgaben 1) und 2b) der vorigen Nummer mit erledigt. Und somit kann auch unsere Aufgabe allgemein als gelöst angesehen werden.

Der Studierende möge die Konstruktion wirklich durchführen.

Wir wollen die vektor-analytische Lösung der Aufgabe besprechen.

p, q, r seien die gesuchten Längen, positiv gerechnet, wenn $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$ in die Richtung von Einheitsvektoren $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ fallen, sonst negativ. Es ist somit

$$\bar{p} = p\bar{\alpha}, \quad \bar{q} = q\bar{\beta}, \quad \bar{r} = r\bar{\gamma}.$$

$\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ mögen die Vektoren nach den Angriffspunkten der Kräfte sein.

Die gegebene Kraft sei $\bar{k}$, ihr Angriffspunkt durch $\bar{x}$ gegeben. Dann haben wir für p, q, r die drei Gleichungen

$$p\bar{\alpha} + q\bar{\beta} + r\bar{\gamma} = \bar{k},$$

$$p\overline{a\alpha} + q\overline{b\beta} + r\overline{c\gamma} = \overline{xk}.$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit einem willkürlichen Parameter λ und addieren, so erhalten wir, wenn wir zur Abkürzung

$$\lambda\bar{\alpha} + \overline{a\alpha} = \bar{u}, \quad \lambda\bar{\beta} + \overline{b\beta} = \bar{v}, \quad \lambda\bar{\gamma} + \overline{c\gamma} = \bar{w}, \quad \lambda\bar{k} + \overline{xk} = \overline{M}$$

setzen, die eine vektorielle Gleichung

$$p\bar{u} + q\bar{v} + r\bar{w} = \overline{M}.$$

Bilden wir das innere Produkt mit $\overline{vw}$, so erhalten wir sofort das Resultat

$$p = \frac{\overline{M} \cdot \overline{vw}}{\bar{u} \cdot \overline{vw}}.$$

Denn $\bar{v} \cdot \overline{vw}$ und $\bar{w} \cdot \overline{vw}$ sind Null, weil $\overline{vw}$ auf $\bar{v}$ und $\bar{w}$ senkrecht steht. Analog berechnen sich q und r.

Der Parameter λ kommt natürlich im Resultat nur scheinbar vor.

Ist eine Lösung immer möglich?

Wenn man in den Nenner $\bar{u} \cdot \overline{vw}$ die Werte einsetzt und beachtet, daß $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ alle in einer Ebene liegen, $\overline{a\alpha}$, $\overline{b\beta}$, $\overline{c\gamma}$ alle auf derselben senkrecht stehen, so erhält man

$$\bar{u} \cdot \overline{vw} = \lambda^2[\overline{a\alpha} \cdot \overline{\beta\gamma} + \overline{b\beta} \cdot \overline{\gamma\alpha} + \overline{c\gamma} \cdot \overline{\alpha\beta}].$$

Nun kann man die Pfeile von $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ so wählen, daß sie das von den drei Angriffsgeraden gebildete Dreieck links herum durchlaufen. Auch können wir den Bezugspunkt O im Innern dieses Dreiecks wählen. Seien dann h_1, h_2, h_3 die Lote von O auf die Dreieckseiten, φ_1, φ_2, φ_3 die Dreieckswinkel, so ist

$$|\overline{a\alpha}| = h_1, \quad |\overline{\beta\gamma}| = \sin\varphi_1 \quad \text{usw.}$$

Und da $\overline{a\alpha}$ und $\overline{\beta\gamma}$ stets dieselbe Richtung haben, so ist

$$\bar{u} \cdot \overline{vw} = \lambda^2(h_1 \sin\varphi_1 + h_2 \sin\varphi_2 + h_3 \sin\varphi_3).$$

Dieser Ausdruck aber ist immer positiv und von Null verschieden, außer es seien

$$h_1 \sin\varphi_1, \quad h_2 \sin\varphi_2, \quad h_3 \sin\varphi_3$$

alle drei Null.

Das kann geschehen dadurch, daß

1. alle drei h Null sind, die Geraden durch einen Punkt gehen,

2. alle drei φ Null resp. π sind, d. h. alle drei Geraden einander parallel sind.

Andere Fälle sind nicht möglich.

Diese Ausnahmefälle hätte man von vornherein leicht einsehen können; aber unsere Betrachtung zeigt, daß es auch die einzigen sind.

Endlich sei die sehr einfache Methode von A. Ritter genannt: Um die Komponente r in der dritten Geraden zu finden, fällen wir vom Schnittpunkt S_3 der ersten und zweiten die Lote a_3 resp. h_3 auf die dritte und auf die gegebene Kraft k. Machen wir dann S_3 zum Momentenbezugspunkt, so gibt die Invarianz der Momentensummen sofort

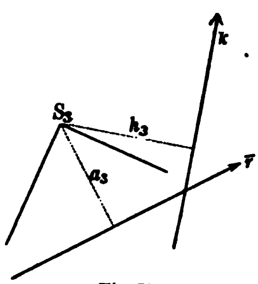


Fig. 78.

$$r a_3 = k h_3, \quad \text{d. h.}$$

$$r = \frac{k h_3}{a_3}.$$

Und der Richtungssinn von $\bar{r}$ ist auch sofort klar.

Sollten die beiden ersten Richtungsgeraden parallel sein, so versagt diese Methode: man braucht dann aber nur $\bar{k}$ in je eine Komponente nach der dritten und nach der gemeinsamen Richtung der beiden ersten zu zerlegen und hat in der ersten Komponente das gesuchte r.

§ 26. Zusammensetzung der Kräfte im Raume.

124. Zurückführung auf eine Kraft und ein Kräftepaar. Gegeben seien eine Reihe von Kräften $\bar{k}_1 \ldots \bar{k}_n$ mit den Angriffspunkten $A_1 \ldots A_n$. Wir wählen einen Bezugspunkt O, die Vektoren OA mögen $\bar{a}$ heißen: $\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n$.

Zu jeder Kraft $\bar{k}_\nu$ fügen wir nun in O eine Kraft

$$\bar{k}_\nu' = \bar{k}_\nu$$

und eine Kraft

$$\bar{k}_\nu'' = -\bar{k}_\nu$$

hinzu, was wir tun dürfen.

Die Kräfte $\bar{k}_\nu'$ in O setzen wir zu einer Resultierenden zusammen, diese wird in O angreifen und der Größe und Richtung nach durch

$$\bar{K} = \sum_{\nu=1}^{n} \bar{k}_\nu$$

bestimmt sein.

$\bar{k}_\nu$ und $\bar{k}_\nu'' = -\bar{k}_\nu$ bilden ein Kräftepaar vom Moment $\overline{a_\nu k_\nu}$. Wir stehen also vor der Aufgabe, Kräftepaare, deren Ebenen sich schneiden — sie haben alle den Punkt O gemeinsam — zusammenzusetzen.

Wir brauchen nur zu zeigen, daß wir zwei solche Kräftepaare überhaupt zu einem zusammensetzen können: daß dann dieses eine ein Moment hat, welches gleich der geometrischen Summe der Momente der gegebenen Paare ist, folgt aus der Invarianz dieser Summe bei den erlaubten Operationen.

Wir haben nun früher (Nr. 116) gezeigt, daß man ein Kräftepaar in seiner Ebene beliebig verändern darf, wenn nur sein Moment erhalten bleibt.

Sollen wir nun zeigen, daß man zwei Kräftepaare in sich schneidenden Ebenen zusammensetzen kann, so verfahren wir folgendermaßen: Wir wählen in der Schnittlinie beider Ebenen nach Belieben eine Strecke AB. Dann können wir jedes Kräftepaar ersetzen durch eins, für das A, B die Angriffspunkte sind. Wir brauchen ja nur in jeder Ebene zwei solche Kräfte in A und B angreifen zu lassen, daß Sinn und Größe des Momentes erhalten bleibt, was stets möglich ist. Jetzt aber haben wir im ganzen vier Kräfte, von denen zwei in A und zwei in B angreifen. Daß wir die auf je eine zurückführen können, ist klar. Und daß wieder ein Kräftepaar herauskommt, sieht man auch sofort, wenn es nicht schon deshalb sein müßte, daß die Summe der Kräfte nach wie vor Null bleibt.

Wir können also Kräftepaare tatsächlich zusammensetzen und erhalten das Resultat:

Ein räumliches Kräftesystem läßt sich am starren Körper auf eine Einzelkraft und ein Kräftepaar zurückführen. Die Einzelkraft ist gleich der geometrischen Summe der gegebenen Kräfte

$$\bar{K} = \sum \bar{k}_\nu$$

und greift in einem willkürlich wählbaren Punkt O an; das Kräftepaar hat ein Moment gleich der geometrischen Summe der Momente der gegebenen Kräfte in bezug auf diesen Punkt O:

$$\bar{M} = \sum \overline{\bar{a}_\nu \bar{k}_\nu}.$$

Bei unendlich vielen, unendlich kleinen, stetig verteilten Kräften $d\bar{k}$ ist natürlich

$$\bar{K} = \mathrm{S}\, d\bar{k},$$
$$\bar{M} = \mathrm{S}\, \overline{\bar{a}\, d\bar{k}}$$

(vgl. Nr. 113).

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten natürlich gerade so wie in der Ebene infolge Axiom VII, 2, 3, 4:

$$\bar{K} \equiv \mathrm{S}\, d\bar{k} = 0 \quad \text{und} \quad \bar{M} \equiv \mathrm{S}\, \overline{\bar{a}\, d\bar{k}} = 0.$$

Daß zwei Kräftesysteme dann und nur dann äquivalent sind, wenn die Summe der Kräfte $\bar{K}$ und die Summe der Momente $\bar{M}$ übereinstimmen, wird genau so bewiesen wie der entsprechende Satz für Kräftesysteme in der Ebene (siehe Nr. 116).

Also sind $\bar{K}$ und $\bar{M}$ auch die einzigen Invarianten.

125. Die Kraftschraube (Dyname). Unser Resultat hängt noch ab von der Wahl des Bezugspunktes O. Wählen wir einen anderen Punkt O' und sei $\overline{OO'} = \bar{s}$, so bleibt $\bar{K}$ ungeändert. Das Moment $\bar{M}'$ in bezug auf O' ist aber nach Nr. 114

$$\bar{M}' = \bar{M} - \overline{\bar{s}\bar{K}}.$$

Der hinzukommende Bestandteil $-\overline{\bar{s}\bar{K}}$ steht nun immer senkrecht zu $\bar{K}$, im übrigen aber kann er durch geeignete Wahl von $\bar{s}$, d. h. von O', jede Richtung und Größe erhalten.

Zerlegt man also $\bar{M}$ und $\bar{M}'$, überhaupt an jeder Stelle das Moment in einen Bestandteil parallel $\bar{K}$ und einen solchen senkrecht zu $\bar{K}$, so kann man ersteren nicht ändern, letzteren dagegen beliebig, Man kann ihn also durch geeignete Wahl von $\bar{s}$ resp. von O' auch zu Null machen, d. h. man kann erreichen, daß das Moment dieselbe Richtung wie die resultierende Kraft $\bar{K}$ erhält.

Nennen wir den Inbegriff einer Kraft und eines Kräftepaares dessen Ebene senkrecht zur Kraft steht, dessen Momentvektor also in derselben Geraden wie die Kraft liegt, eine Kraftschraube oder Dyname, so können wir sagen:

Man kann ein Kräftesystem am starren Körper stets auf eine Kraftschraube reduzieren, d. h. erreichen, daß

$$\overline{M} = p\overline{K}$$

ist. p eine Strecke, die positiv und negativ sein kann, heißt der Parameter der Kraftschraube.

Man kann also im Raume das Moment im allgemeinen nicht zum Verschwinden bringen, das Kräftesystem also nicht auf eine einzige Kraft zurückführen. Denn die Komponente von $\overline{M}$ parallel zu $\overline{K}$ läßt sich ja nicht ändern, und daß sie nicht immer von vornherein Null ist, erkennt man daraus, daß man gleich als Kräftesystem eine Kraftschraube zugrunde legen kann.

Die Punkte, für welche $\overline{M}$ dieselbe Richtung wie $\overline{K}$ bekommt, liegen in einer Geraden, der sogenannten Zentralachse des Kräftesystems.

Denn sei O ein solcher Punkt, für ihn also $\overline{M} = p\overline{K}$, so ist der Zusatz $\overline{\overline{s}\overline{K}}$, der bei Wahl eines anderen Punktes O' hinzutritt und der senkrecht zu $\overline{K}$, also auch zu $\overline{M}$ steht, dann und nur dann Null, wenn $\overline{s}$ dieselbe Richtung wie $\overline{K}$ hat. Die Zentralachse hat also die Richtung von $\overline{K}$.

Seien $\overline{M}$ und $\overline{K}$ für irgendeinen Punkt O gegeben, so läßt sich p leicht berechnen und die Gleichung der Zentralachse in der Plückerschen Form aufstellen (siehe Anhang II, 2).

Denn sei $\overline{x} = \overline{OX}$ und X ein Punkt der Zentralachse, so ist das Moment für X

$$\overline{M'} = \overline{M} - \overline{\overline{x}\overline{K}}.$$

Es soll aber $\overline{M'} = p\overline{K}$ sein.

Also haben wir

$$\overline{\overline{x}\overline{K}} = \overline{M} - p\overline{K}.$$

Setzen wir für $\overline{M} - p\overline{K}$ zur Abkürzung $\overline{c}$, so ist

$$\overline{\overline{x}\overline{K}} = \overline{c}$$

bereits die Gleichung der Zentralachse, $\overline{K}$, $\overline{c}$ sind die Plückerschen Vektoren; es muß aber noch

$$\overline{c} \cdot \overline{K} = 0$$

erfüllt sein, d. h.

$$(\overline{M} - p\overline{K}) \cdot \overline{K} = 0$$

oder

$$\overline{M} \cdot \overline{K} - pK^2 = 0,$$

woraus sich ergibt

$$p = \frac{\overline{M} \cdot \overline{K}}{K^2} = \frac{M_x K_x + M_y K_y + M_z K_z}{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2}$$

wenn wir orthogonale Komponenten einführen.

Setzen wir den Wert von p in den Ausdruck für $\bar{c}$ ein, so bekommen wir

$$\bar{c} = \bar{M} - \frac{\bar{M} \cdot \bar{K}}{K^2} \cdot \bar{K} = \frac{1}{K^2}\left(K^2 \bar{M} - (\bar{M} \cdot \bar{K}) \bar{K}\right).$$

Das ist aber nach der Entwicklungsformel (siehe Anhang)

$$\bar{c} = \frac{1}{K^2} \overline{K(\overline{MK})} = -\frac{1}{K^2} \overline{(\overline{MK}) K}.$$

Die Gleichung der Zentralachse lautet also definitiv

$$\overline{xK} = \frac{1}{K^2} \overline{(\overline{KM}) K},$$

einer ihrer Punkte ist also durch

$$\bar{x}_0 = \frac{1}{K^2} \overline{KM}$$

gegeben. Es ist dies der Fußpunkt des Lotes von O auf die Zentralachse, denn es steht ja $\bar{x}_0$ auf $\bar{K}$ senkrecht.

Die Parametergleichung der Zentralachse lautet

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + \lambda \cdot \bar{K},$$

wo λ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft.

126. Analytische Formulierung der Resultate. Da $\overline{ak}$ die rechtwinkligen Komponenten

$$a_y k_z - a_z k_y, \quad a_z k_x - a_x k_z, \quad a_x k_y - a_y k_x$$

hat (siehe Anhang II, 1), so ist

$$K_x = \sum k_x, \quad K_y = \sum k_y, \quad K_z = \sum k_z,$$

$$M_x = \sum (a_y k_z - a_z k_y), \quad M_y = \sum (a_z k_x - a_x k_z), \quad M_z = \sum (a_x k_y - a_y k_x)$$

und die Gleichgewichtsbedingungen für den starren Körper lauten:

$$\sum k_x = 0, \quad \sum k_y = 0, \quad \sum k_z = 0,$$

$$\sum (a_y k_z - a_z k_y) = 0, \quad \sum (a_z k_x - a_x k_z) = 0, \quad \sum (a_x k_y - a_y k_x) = 0.$$

Aufgabe 60: Man berechne den Parameter und bestimme die Zentralachse für das Kräftesystem, bestehend aus den drei Kräften mit den orthogonalen Komponenten 0, 15 kg, 0; 10 kg, 0, 0; 0, 0, 21 kg und den Koordinaten der Angriffspunkte 0, 0, 10 m; 0, 0, 0 und 5 m, 0, 0.

127. Das Moment in bezug auf eine Achse. Der Ausdruck

$$a_x k_y - a_y k_x$$

oder eine Summe über diese Größen, herrührend von verschiedenen Kräften, läßt eine doppelte Auffassung zu: Einmal ist es die Komponente des Momentvektors, bezogen auf einen Punkt O der z-Achse, nach dieser Achse, dann aber bedeutet er selber ein in der z-Achse gelegenes Moment, das wir aus dem gegebenen Kräftesystem erhalten, wenn wir k_z und z gleich Null setzen. Dann werden die Komponenten des Momentes nach der x- und y-Achse von selbst Null, die Komponente nach der z-Achse aber bleibt ungeändert.

k_z und z gleich Null setzen, heißt aber nichts anderes, als die Kraft (resp. die Kräfte) in die x-y-Ebene hineinprojizieren.

In analoger Weise können wir von einem Kräftesystem das Moment in bezug auf irgendeine Achse bilden:

Wir verstehen unter dem Moment eines Kräftesystems in bezug auf eine Gerade das Moment, das wir erhalten, wenn wir das Kräftesystem auf eine Ebene senkrecht zur Geraden projizieren und das Moment dieser Projektionen in bezug auf den Durchstoßpunkt O der Geraden mit der Ebene bilden.

Da wir jede Gerade im Raume nach Belieben zur z-Achse eines rechtshändigen Koordinatensystems machen können, so folgt allgemein:

Das Moment in bezug auf eine Gerade ist gleich der Projektion desjenigen Momentvektors auf die Gerade, den man in bezug auf einen Punkt der Geraden gebildet hat.

Hat man der Geraden einen bestimmten Richtungssinn gegeben, so kann man das Moment in bezug auf sie als einen Skalar auffassen, der positiv oder negativ ist, je nachdem es mit dem Sinn der Geraden zusammenfällt oder nicht.

Ist h der kürzeste Abstand der Kraft von der Geraden, so ist h auch der kürzeste Abstand der in Rede stehenden Projektion der Kraft von dem Durchstoßpunkt O. Ist ferner α der Winkel, den die Gerade mit der Angriffslinie der Kraft k einschließt, so ist die Projektion der Kraft k auf die Ebene senkrecht zur Geraden $k \sin \alpha$ und hr Moment in bezug auf die Gerade ist der absoluten Größe nach

$$k \sin \alpha \cdot h.$$

Außer in dem trivialen Falle $k = 0$ ist also das Moment einer Kraft in bezug auf eine Gerade nur Null, wenn entweder die Kraft der Geraden parallel ist oder wenn sie die Gerade schneidet.

128. Die Gleichgewichtsbedingung, ausgedrückt durch das Nullwerden von Momenten. Es fragt sich, kann man die Gleichgewichtsbedingungen des starren Körpers dadurch ersetzen, daß man das Nullwerden mehrerer Momente ausspricht.

Verschwindet der Momentvektor für zwei Punkte O und O', ist also $\overline{M} = 0$ und $\overline{M}' = 0$, so folgt aus

$$\overline{M}' = \overline{M} - \overline{sK},$$

$$\overline{sK} = 0,$$

d. h. ein eventuell vorhandenes $\overline{K}$ könnte nur in der Verbindungslinie OO' liegen.

Weiß man vielleicht von vornherein, daß das unmöglich ist — sind z. B. alle $d\bar{k}$ vertikal, OO' aber horizontal — so genügt $\bar{M} = 0$ und $\bar{M}' = 0$. Im allgemeinen wird man aber noch ein drittes Moment $\bar{M}''$, bezogen auf einen Punkt O'', gleich Null setzen müssen, wo O'' nicht in der Geraden $O'O$ liegen darf. Das genügt sicher, denn $\bar{K}$ kann nicht gleichzeitig in den drei verschiedenen Geraden OO', $O'O''$, $O''O$ liegen.

Es genügt also, um des Gleichgewichts sicher zu sein, das Moment in bezug auf drei Punkte gleich Null zu setzen, die nicht in einer Geraden liegen.

Kommt man auch mit Momenten in bezug auf Geraden aus?

Da jede Gleichung, welche ausdrückt, daß das Moment in bezug auf eine Gerade Null ist, eine skalare Gleichung bedeutet, die Bedingungen

$$\bar{K} = 0 \quad \text{und} \quad \bar{M} = 0$$

aber zwei vektorielle, d. h. sechs skalare Gleichungen darstellen, so kann man erwarten, daß im allgemeinen das Nullsetzen der Momente für sechs Geraden genügen wird, um das Gleichgewicht zu garantieren.

Für eine besondere Art von sechs Geraden genügt dies sicher: drei Geraden g_1, g_2, g_3 mögen ein Dreieck $OO'O''$ bilden, die drei andern h, h' h'' je durch einen Punkt O, resp. O', resp. O'' hindurchgehen, aber nicht in der Ebene von $OO'O''$ liegen. Denn weil die Momente für g_1, g_2, h'' — diese drei mögen durch O'' hindurchgehen — verschwinden, so verschwindet der Momentvektor $\bar{M}''$ für O'', denn ein Vektor verschwindet, wenn seine orthogonalen Projektionen auf drei Geraden verschwinden, die nicht in einer Ebene liegen. Das gilt für jeden der drei Punkte $OO'O''$, also besteht nach dem obigen tatsächlich Gleichgewicht.

In welchen Ausnahmefällen man aus dem Verschwinden der Momente für sechs Geraden nicht auf Gleichgewicht schließen darf, wollen wir im nächsten Paragraphen untersuchen.

Aufgabe 61: Ein Tisch stütze sich mit drei Beinen — deren untere Enden A, B, C wir als Punkte ansehen wollen — auf eine horizontale Fläche. Außer den dort herrschenden, vertikal nach oben gerichteten Stützdrucken N_1, N_2, N_3 sei die resultierende auf den Tisch wirkende Kraft G nach abwärts gerichtet und ihre Angriffsgerade schneide das Dreieck A, B, C in einem Punkte S, dessen Abstände r_1, r_2, r_3 von den drei Seiten des Dreiecks gegeben seien. Außerdem seien noch die Höhen des Dreiecks gegeben.

Man berechne die Stützdrucke N_1, N_2, N_3. Warum kann nur Gleichgewicht herrschen, wenn S im Innern des Dreiecks liegt, d. h. r_1, r_2, r_3 positiv sind?

Man benutze die am Ende dieser Nummer gegebene Gleichgewichtsbedingung und nehme die Seiten des Dreiecks und die Vertikalen durch die Ecken als Momentenachsen.

§ 27. Das Nullsystem.[1]

129. Zurückführung auf zwei Kräfte. Wir wissen, daß man im allgemeinen ein Kraftsystem nicht auf eine Kraft zurückführen kann (Nr. 124), wohl aber auf drei Kräfte (Nr. 113). Kann man das System auf zwei Kräfte reduzieren?

Für den Fall eines bloßen Kräftepaares ist die Antwort bejahend, aber trivial. Diesen Fall ($\overline{K} = 0$, $p = \infty$) schließen wir daher einstweilen aus. Ebenso sehen wir von dem Fall $p = 0$, d. h. $\overline{M} = 0$ ab, dann kann man ja das System auf eine Kraft zurückführen.

Im allgemeinen Fall kann man aber ebenfalls das System durch zwei Kräfte ersetzen. Denn sei für einen Punkt O das Kräftesystem durch $\overline{M}$ und $\overline{K}$ gegeben, so kann man ja das Kräftepaar $\overline{M}$ durch zwei Kräfte $\overline{q}$ und $-\overline{q}$ darstellen, von denen $-\overline{q}$ in O angreift. $-\overline{q}$ und $\overline{K}$ kann man dann zu einer Kraft $\overline{r}$ in O zusammensetzen und hat so als Resultat zwei Kräfte: $\overline{q}$ und $\overline{r}$.

Dabei kann man noch $-\overline{q}$ in O und in der Ebene des Kräftepaares beliebig nach Größe und Richtung wählen. Das hat zur Folge, daß man im allgemeinen wenigstens die Angriffsgerade von $\overline{r}$ beliebig vorschreiben kann.

Sei nämlich die Angriffsgerade g_1 gegeben, so wähle man einen Punkt O auf ihr und denke sich die zugehörige Ebene des Kräftepaares — senkrecht zu $\overline{M}$ — gezeichnet. Man lege eine Ebene durch $\overline{K}$ und die vorgegebene Angriffsgerade g_1 von $\overline{r}$; diese Ebene schneidet die Ebene des Kräftepaares in einer Geraden g'. Man kann im allgemeinen in diese Gerade eine Kraft $-\overline{q}$ so hineinlegen, daß die Resultierende von $-\overline{q}$ und $\overline{K}$ die vorgeschriebene Richtung hat: man hat ja nur $\overline{K}$ in zwei Komponenten nach g_1 und g' zu zerlegen, was stets möglich ist, wenn nicht g_1 und g' zusammenfallen. $\overline{r}$ ist somit durch g' vollständig bestimmt: es ist gleich $\overline{K}$ (und somit $\overline{q} = 0$), wenn g' in die Richtung von $\overline{K}$ hineinfällt, es ist unendlich (also auch $\overline{q}$), wenn g' in der Ebene des Kräftepaares liegt. Die zweite Kraft $\overline{q}$ ist dann nebst ihrer Angriffsgeraden vollständig mitbestimmt. Denn nach Richtung und Größe ist sie es ja durch $-\overline{q} = \overline{r} - \overline{K}$ und der Lage nach dadurch, daß $\overline{q}$ und $-\overline{q}$ das Moment $\overline{M}$ ergeben müssen.

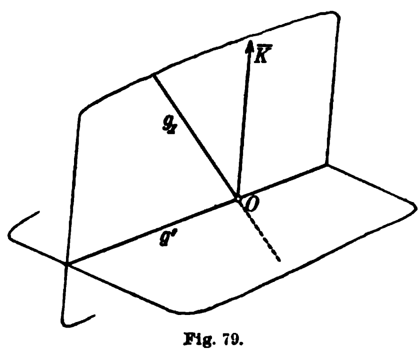


Fig. 79.

[1] Diesen Paragraphen kann der Anfänger zunächst auslassen.

Man kann also ein Kräftesystem immer auf zwei Kräfte zurückführen: im allgemeinen kann man eine Angriffsgerade noch willkürlich wählen, dann ist die andere eindeutig mitbestimmt, desgleichen sind es die Größen der Kräfte.

In bezug auf eine Kraftschraube sind also die Geraden des Raumes im allgemeinen paarweise einander zugeordnet, man nennt diese Paare einander konjugiert. Denn ihre Beziehung, daß man nämlich das Kräftesystem auf zwei in ihnen gelegene Kräfte zurückführen kann, ist nach der Natur dieser Aussage wechselseitig.

Aber es gibt zwei Ausnahmen:

1. die Geraden, welche der Zentralachse parallel sind, d. h. die Richtung $\bar{K}$ haben. $\bar{q}$ wird dann Null, der Hebelarm des Kräftepaares also unendlich. Zu allen diesen Geraden sind also unendlich ferne Geraden als konjugiert zugeordnet. Diese Ausnahme mag mit dieser Bemerkung als erledigt gelten;

2. die Geraden, welche in einem Punkte auf der Richtung des zugehörigen Momentes senkrecht stehen: für sie wird $\bar{q}$ unendlich, und, damit $\bar{M}$ endlich sei, muß die konjugierte Gerade in sie hineinfallen.

Diese Geraden, die man auch Nullinien nennt, sind also sich selbst konjugiert.

Sie heißen Nullinien, weil sie die charakteristische Eigenschaft haben, daß für sie das Moment des Kräftesystems verschwindet. Das folgt gemäß Nr. 127 daraus, daß der Momentvektor auf ihnen senkrecht steht.

130. Nullpunkt und Nullebene. Die Nullinien, welche durch einen Punkt gehen, bilden nach dem Vorstehenden eine Ebene, nämlich die Ebene des zu dem Punkte gehörenden Kräftepaares. Man nennt diese Ebene auch die Nullebene des Punktes und den Punkt den Nullpunkt der Ebene.

Daß es durch jeden Punkt eine und nur eine Nullebene gibt, ist nach dem Vorhergehenden klar. Aber es gibt auch umgekehrt zu jeder Ebene einen und nur einen Nullpunkt.

Seien nämlich für einen Punkt O' der Ebene $\bar{K}$ und $\bar{M}'$ bestimmt, so gehe man auf der Geraden g' in der Ebene, welche zu $\bar{M}'$ senkrecht steht und also eine Nullinie ist, zu einem anderen Punkte O über. Das zugehörige $\bar{M}$ unterscheidet sich dann von $\bar{M}'$ um einen Bestandteil $s K$, der senkrecht zu g' in einer Geraden g'' senkrecht zu $\bar{K}$ liegt. Im übrigen variiert die Größe von $\overline{s K}$ mit $\bar{s} = \overline{O O'}$

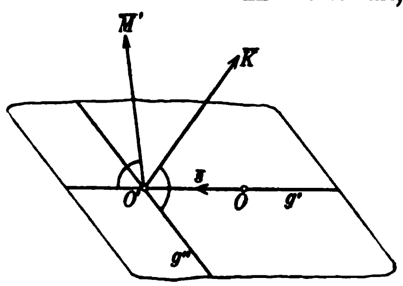


Fig. 80.

frei. Man kann also O so wählen, daß $\overline{M}$ senkrecht auf der Ebene steht, man braucht ja nur $\overline{M}'$ in eine Komponente nach g'' und in eine solche senkrecht zur Ebene zu zerlegen (was möglich ist, da g'', $\overline{M}'$ und die Senkrechte zur Ebene alle auf g' senkrecht stehen und also in einer Ebene liegen) und die erstere durch den Zusatz $s\overline{K}$ zum Verschwinden zu bringen.

O ist dann der gesuchte Nullpunkt.

Nur für eine Ebenenschar liegt der Nullpunkt im Unendlichen: für diejenigen Ebenen nämlich, welche die Richtung $\overline{K}$ enthalten. Dann stellt sich ja g'' senkrecht zur Ebene und $\overline{sK}$, also auch $\bar{s}$ müßte unendlich werden.

Konjugierte Geraden, Nullinien, Nullebenen und Nullpunkte stehen nun in folgender Beziehung zueinander:

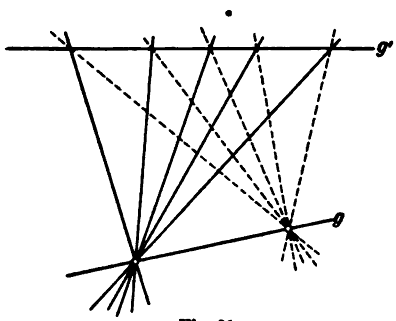


Fig. 81.

1. Jede Gerade, welche zwei konjugierte Gerade schneidet, ist eine Nullinie.

Denn da man das Kräftesystem auf zwei Kräfte in den konjugierten Geraden zurückführen kann und diese die in Rede stehende Gerade schneiden, so verschwindet für diese das Moment.

2. Die Nullebene eines jeden Punktes einer Geraden g enthält die zu dieser konjugierte Gerade g'.

Denn alle Geraden durch den Punkt, welche die konjugierte Gerade schneiden, sind nach 1. Nullinien; bilden aber auch eine Ebene, eben die Nullebene des Punktes.

3. Der Nullpunkt einer jeden Ebene durch eine Gerade g' liegt auf der zu dieser konjugierten Geraden g.

Denn alle Nullinien dieser Ebene gehen ja nach 1. durch die andere Gerade.

Die Nullinien bestimmen also die gegenseitige Zugehörigkeit der konjugierten Geraden. Man nennt nun die Gesamtheit der Nullinien mit der durch sie gegebenen gegenseitigen Zuordnung von Punkten zu Ebenen und Geraden zueinander ein Nullsystem.

131. Beziehung des Nullsystems zur Kraftschraube. Nennen wir der bequemen Ausdrucksweise halber die durch $\overline{K}$ gegebene Richtung der Zentralachse „vertikal nach oben", die Richtungen senkrecht dazu horizontal, so ist zunächst klar, daß alle horizontalen Geraden, welche die Zentralachse schneiden, Nullinien sind. Denn das Moment liegt ja für Punkte der Zentralachse in dieser.

Wählen wir nun einen Punkt A außerhalb der Zentralachse im

Abstande a von derselben, machen wir den Fußpunkt O dieses Lotes zum Bezugspunkte, so ist das Moment in A

$$\overline{M}' = \overline{M} - \overline{aK},$$

wenn $\bar{a} = \overline{OA}$ ist.

$-\overline{aK}$ liegt horizontal, und zwar nach links, wenn man von O nach A hinblickt, die Größe dieses Zusatzes ist aK. Also wird $\overline{M}'$ nach links oder nach rechts aus der Vertikalen abweichen — aber noch immer senkrecht zu $\bar{a}$ stehen — je nachdem $\overline{M}$ nach oben oder unten, d. h. p positiv oder negativ ist.

Zählen wir den Winkel α, um den $\overline{M}'$, die Normale zur Nullebene in A, aus der Vertikalen abweicht, nach links positiv, so ist mit Einschluß des Zeichens

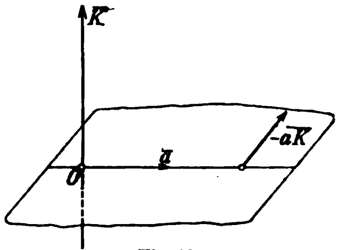


Fig. 82.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{aK}{M} = \frac{a}{p}.$$

Entfernt man sich also mit dem Punkte A von der Zentralachse, so richtet sich die zugehörige Nullebene immer steiler auf, für $a = \infty$ wird $\alpha = \frac{\pi}{2}$: wir wissen ja auch schon, daß die Ebenen, welche der Zentralachse parallel sind, den Nullpunkt im Unendlichfernen haben.

Man sieht daraus auch, daß die horizontalen Nullinien die Zentralachse schneiden.

Ferner sieht man, daß das Nullsystem jede Verschraubung um die Zentralachse gestattet, d. h. verschiebt man das ganze System längs der Zentralachse oder dreht es um dieselbe, so geht es in sich über.

Wie liegen nun die konjugierten Geraden zueinander?

Sei g gewählt, $\bar{a} = \overline{OA}$ ihr kürzester Abstand von der Zentralachse.

Es muß dann die konjugierte Gerade g' nach der vorigen Nummer in der zu A gehörenden Nullebene liegen.

Vor allem wird also g' die Gerade OA schneiden — B sei der Schnittpunkt — und da

$$\overline{K} = \bar{q} + \bar{r}$$

sein soll — es liege $\bar{q}$ in g, $\bar{r}$ in g' — und $\overline{K}$ sowohl wie $\bar{q}$ auf OA senkrecht stehen, so muß auch $\bar{r}$ also g' auf OA senkrecht stehen:

Die beiden konjugierten Geraden schneiden also samt der Zentralachse ein und dieselbe Gerade AOB senkrecht.

OB sei gleich b gesetzt: es werde positiv gezählt, wenn es in der Richtung mit OA übereinstimmt, sonst negativ.

Nun weicht die Normale der Nullebene in A von der Vertikalen um einen Winkel α ab, für welchen

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{p}$$

gilt — α positiv gerechnet, wenn die Abweichung in der Richtung $\bar{a}$ gesehen nach links erfolgt —, folglich weicht die Nullinie g' um den Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$ nach rechts ab.

Andererseits liegt g in der Nullebene von B. Wenn also

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{p}$$

— für positive und negative b —, so weicht g von der Vertikalen um $\frac{\pi}{2} - \beta$ nach rechts ab.

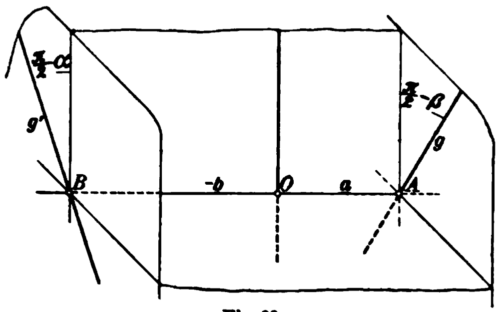


Fig. 83.

Mit der Geraden g sind nun gegeben a und $\frac{\pi}{2} - \beta$, d. h. a und β, es berechnen sich dann nach den vorstehenden Formeln der Abstand b der konjugierten Geraden g' einschließlich des Zeichens aus

$$b = p \operatorname{tg}\beta$$

und ihre Neigung $\frac{\pi}{2} - \alpha$ aus

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{p}.$$

Stehen die beiden konjugierten Geraden aufeinander senkrecht, so spricht man von einem Kraftkreuz, es muß dann $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 1$ sein, d. h.

$$ab = p^2.$$

Daß Nullinien sich selbst konjugiert sind, erkennt man aus diesen Formeln leicht. Denn dann muß $\alpha = \beta$ sein, und es folgt dann auch $a = b$.

Man sieht, daß das Nullsystem nur von der Zentralachse und dem Parameter p abhängt, auf die Größe von K kommt es nicht an.

132. Das Nullsystem als linearer Komplex. Setzen wir unser Problem in die Sprache der Vektorrechnung um, so lautet es: man soll alle möglichen Vektoren $\bar{q}$, $\bar{r}$ und $\bar{a}$, $\bar{b}$ bestimmen, so daß

$$\bar{q} + \bar{r} = \bar{K},$$
$$\overline{aq} + \overline{br} = \bar{M}$$

ist. $\bar{a}$, $\bar{b}$ sind die Vektoren von dem Bezugspunkte O nach Punkten A resp. B der beiden konjugierten Geraden.

Man kann die Gleichungen nach den Plückerschen Vektoren (siehe Anhang II, 2) $\bar{q}$ und $\overline{aq}$ der einen Geraden auflösen:

$$\left.\begin{aligned}\bar{q} &= \bar{K} - \bar{r},\\ \overline{aq} &= \bar{M} - \overline{br},\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

es muß dann nur das innere Produkt beider verschwinden: es muß also sein

$$(\bar{K} - \bar{r}) \cdot (\bar{M} - \overline{br}) = 0$$

oder

$$\bar{K} \cdot \bar{M} = \bar{r} \cdot \bar{M} + \bar{K} \cdot \overline{br}.$$

Setzen wir

$$\bar{r} = r \cdot \bar{\eta},$$

wo $\bar{\eta}$ ein Einheitsvektor in der zweiten Geraden ist, so folgt

$$r = \frac{\bar{K} \cdot \bar{M}}{\bar{\eta} \cdot \bar{M} + \bar{K} \cdot \overline{b\eta}}. \tag{2}$$

Dieses Resultat zeigt das alte Ergebnis: Man kann im allgemeinen die eine Angriffsgerade, d. h. ihre Plückerschen Vektoren $\bar{\eta}$ und $\overline{b\eta}$, willkürlich wählen; dann sind die andere Gerade und die Größen der Kräfte $\bar{q}$ und $\bar{r}$ eindeutig bestimmt (nach den Gleichungen (1) und (2)).

Ausnahmen bilden nur die Fälle:

1. $\bar{q} = 0$, d. h. $\bar{K} = \bar{r}$, aber $\overline{aq} = \bar{M} - \overline{br} \neq 0$, so daß $\bar{a} = \infty$ wird,

2. $r = \infty$, also auch $q = \infty$. Das tritt ein, wenn der Nenner in (2) verschwindet, d. h.

$$\bar{\eta} \cdot \bar{M} + \bar{K} \cdot \overline{b\eta} = 0 \tag{I}$$

ist. Daß (I) nun tatsächlich die Gleichung der Nullinie ist, sieht man leicht ein. Denn nach dem Vertauschungssatze (siehe Anhang I, 6) ist die linke Seite von (I) gleich

$$\bar{\eta} \cdot (\bar{M} - \overline{bK}) = \bar{\eta} \cdot \bar{M}',$$

wo $\bar{M}'$ den Momentvektor für den Punkt B bedeutet.

$\bar{\eta} \cdot \bar{M}'$ ist aber das Moment in bezug auf die zweite Gerade, und Gleichung (I) sagt, daß dieses verschwinden soll. Das war aber die charakteristische Eigenschaft der Nullinie.

Setzen wir für den zweiten Plückerschen Vektor $\overline{b\eta}$ zur Abkürzung $\bar{c}$, so lautet (I)

$$\bar{\eta} \cdot \bar{M} + \bar{K} \cdot \bar{c} = 0,$$

oder in rechtwinkligen Komponenten

$$\eta_x M_x + \eta_y M_y + \eta_z M_z + c_x K_x + c_y K_y + c_z K_z = 0. \tag{I'}$$

Das ist aber die allgemeinste lineare homogene Gleichung, die es zwischen den sechs Plückerschen Koordinaten $\eta_x \ldots c_z$ geben kann. Man nennt nun jede Mannigfaltigkeit von ∞^3 Geraden — es gibt im ganzen ∞^4 Geraden im Raume (siehe Anhang II, 2), — die durch eine homogene Gleichung zwischen den sechs Plückerschen Koordinaten gegeben ist, einen Komplex. Ist die Gleichung linear, so wird man von einem linearen Komplex reden.

Unsere Betrachtungen zeigen,

daß das System der Nullinien und ein linearer Komplex identische Begriffe sind.

Macht man die durch $\bar{K}$ gegebene Richtung der Zentralachse zur z-Achse, so wird aus (I′)

$$p\eta_z + c_z = 0. \tag{I''}$$

Ist a der kürzeste Abstand der Nullinie von der Zentralachse, α der Winkel, den sie mit der Zentralachse einschließt, so ist $\eta_z = \cos\alpha$; $\bar{c}$ steht auf $\bar{a}$ senkrecht, hat die Größe a und bildet mit der z-Achse den Winkel $\pm\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, es ist also $c_z = \pm a \sin\alpha$, und somit wird aus (I″)

$$p \cos\alpha \pm a \sin\alpha = 0,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm \frac{p}{a}. \tag{I'''}$$

Das Zeichen richtet sich nach dem von p; a und $\operatorname{tg}\alpha$ sind stets positiv nach Definition.

Aus den Formeln (1) (2) und (I) dieser Nummer kann man alle früheren Resultate leicht wieder gewinnen. Es mag das dem Leser überlassen bleiben.

Aufgabe 62: Man zeige, daß das von den beiden konjugierten Kräften $\bar{r}$ und $\bar{q}$ gebildete Tetraeder einen von der Wahl der einen Angriffslinie unabhängigen Inhalt hat. (Man vergleiche Anhang II, 1.)

133. Erledigung des Ausnahmefalles von Nr. 128. Zerlegung eines Kräftesystems nach sechs Geraden. Wir hatten in Nr. 128 gezeigt, daß das Gleichgewicht im allgemeinen gesichert ist, wenn die Momente in bezug auf sechs Geraden verschwinden. Das bedeutet aber nach den Resultaten der vorhergehenden Nummer das Bestehen von sechs Gleichungen für $\bar{M}$ und $\bar{K}$ der Form (I′), nämlich

$$\eta_x^{(\nu)} M_x + \eta_y^{(\nu)} M_y + \eta_z^{(\nu)} M_z + c_x^{(\nu)} K_x + c_y^{(\nu)} K_y + c_z^{(\nu)} K_z = 0$$
$$(\nu = 1, 2 \ldots 6).$$

Daraus kann man nun in der Tat immer dann auf das Verschwinden von $\bar{K}$ und $\bar{M}$ schließen, wenn die Determinante aus sechs Zeilen und sechs Spalten

$$\begin{vmatrix} \eta_x^{(1)} & \eta_y^{(1)} & \cdots & c_z^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_x^{(6)} & \eta_y^{(6)} & \cdots & c_z^{(6)} \end{vmatrix}$$

nicht Null ist.

Ist sie aber Null, so können sehr wohl die obigen sechs Gleichungen bestehen, d. h. die sechs Momente verschwinden, ohne daß Gleichgewicht herrscht.

Was bedeutet nun das Verschwinden der Determinante? (Daß sie nicht identisch verschwindet, folgt aus dem in Nr. 118 gegebenen Beispiel.)

Es gibt dann ein Kräftesystem, für welches die Momente in bezug auf die sechs Geraden verschwinden, d. h. diese Geraden bilden sechs Geraden eines Nullsystems.

Aus dem Verschwinden der Momente für sechs Geraden kann man also dann und nur dann auf Gleichgewicht schließen, wenn diese sechs Geraden nicht einem Nullsystem angehören.

Aus unseren Betrachtungen folgt noch der rein geometrische Satz:

Durch fünf Geraden kann man immer einen linearen Komplex legen, durch sechs jedoch im allgemeinen nicht.

Denn zu fünf Geraden kann man immer eine sechste Gerade bestimmen, so daß die obige Determinante verschwindet, für beliebige sechs Gerade aber verschwindet die Determinante nicht.

Dem Verschwinden der Determinante kann man noch eine andere mechanische Bedeutung geben. Ist die Determinante Null, so hat auch das Gleichungssystem

$$\sum \eta_x^{(\nu)} \lambda_\nu = 0,$$
$$\sum \eta_y^{(\nu)} \lambda_\nu = 0,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\sum c_z^{(\nu)} \lambda_\nu = 0$$

eine von Null verschiedene Lösung.

Deuten wir die λ_ν als Kräfte, welche in den sechs Geraden liegen:

$$\bar{\eta}^{(\nu)} \lambda^{(\nu)} = \bar{k}_\nu,$$

so lauten unsere Gleichungen

$$\sum \bar{k}_\nu = 0,$$
$$\sum \overline{b_\nu k_\nu} = 0$$

(da ja $\bar{c}^{(\nu)} \cdot \lambda_\nu = \overline{\eta_x^{(\nu)} b_\nu} \cdot \lambda_\nu = -\overline{b_\nu k_\nu}$ ist), d. h. die Kräfte $\bar{k}_\nu$ halten sich das Gleichgewicht, da ihre Summe und die Summe ihrer Momente verschwindet.

Man kann also dann und nur dann in sechs Geraden sechs Kräfte hineinlegen, die sich, ohne alle Null zu sein, das Gleichgewicht halten, wenn die sechs Geraden einem Nullsystem angehören (Möbius).

Wenn aber die sechs Geraden nicht einem Nullsystem angehören, so kann man ein beliebiges Kraftsystem nach ihnen zerlegen, d. h. auf sechs Kräfte zurückführen, die in den Geraden liegen.

Denn man hat nur die linearen Gleichungen aufzulösen

$$\sum \bar{\eta}^{(\nu)} \lambda^{(\nu)} = \bar{K},$$
$$\sum \bar{c}^{(\nu)} \lambda^{(\nu)} = -\bar{M},$$

und das geht, da ja die Determinante der Koeffizienten der linken Seiten nicht verschwindet.

Dieser Satz findet Anwendung in der Theorie der räumlichen Fachwerke.

134. Geschichte und Literatur. Die hier vorgetragenen Sätze und Begriffe stammen zum größten Teile von Möbius, einem hervorragenden Geometer, Mechaniker und Astronomen aus dem Anfange des 19. Jahrhunderts. Seine Statik ist noch sehr lesenswert. Noch eine andere Statik aus dieser Zeit sei genannt, welche ebenfalls die geometrischen Gesichtspunkte stark in den Vordergrund stellt, die von Minding. Später haben sich die Geometer viel mit der Komplextheorie beschäftigt. Es gibt auch eine besondere, ins Detail ausgebildete Theorie der Kraftschrauben: es seien die Namen Plücker, Klein und Ball (theory of screws, deutsch von Budde) genannt. Man faßt die in den §§ 26 und 27 vorgetragenen Theorien und ihre Weiterbildungen oft unter dem Namen „Geometrie der Kräfte" zusammen: Das hervorragende Werk Studys, „Geometrie der Dynamen" geht von dieser Basis aus. Von elementaren Lehrbüchern seien genannt: Föppl, Techn. Mechanik, Bd. II; Timerding, Geometrie der Kräfte, Marcolongo-Timerding, Theoret. Mechanik, Bd. I. Eine rein analytische Darstellung findet man in Heuns Kinematik (wir werden auf dieselben Dinge später noch einmal bei der Kinematik des starren Körpers stoßen; siehe § 46, Nr. 263). Ein Lehrbuch, das die geometrische Seite der Mechanik besonders betont, ist das von Schell: Theorie der Bewegung und der Kräfte. Es sei auch nochmals auf das Lehrbuch von Webster: „The dynamics of particles and of rigid, elastic, and fluid bodies" hingewiesen. Natürlich findet man auch in den großen Werken über Mechanik eine Darstellung des Nullsystems und der zugehörigen Dinge, so in Appell: Traité de mécanique (3 Bde), in Routh: A treatise on analytical staties, 2 Bde. Als zusammenfassendes Referat beachte man den Artikel 2 des Bandes IV (Mechanik) der Enzykl. der math. Wissenschaften: Timerding, Geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers.

Kapitel VI.

Statik des starren Körpers (Anwendungen).

§ 28. Zusammensetzung paralleler Kräfte.

135. Parallele und gleichgerichtete Kräfte lassen sich stets auf eine einzige Kraft zurückführen. Diesen fundamentalen Satz wollen wir beweisen:

Die Kräfte $d\bar{k}$ mögen parallel und gleichgerichtet sein, d. h. es sei

$$d\bar{k} = \bar{\varepsilon}\, dk,$$

wo $\bar{\varepsilon}$ ein fester Einheitsvektor ist und $dk > 0$.

Dann ist

$$\bar{K} = \mathop{\mathrm{S}} d\bar{k} = \bar{\varepsilon} \mathop{\mathrm{S}} dk,$$

hat also dieselbe Richtung und ist nicht Null. Das Moment für einen beliebigen Punkt ist

$$\bar{M} = \mathop{\mathrm{S}} \overline{\bar{x}\, d\bar{k}} = \overline{(\mathop{\mathrm{S}} \bar{x}\, dk)\,\bar{\varepsilon}},$$

steht also immer auf $\bar{\varepsilon}$ senkrecht.

Moment und resultierende Einzelkraft stehen also in diesem Falle aufeinander senkrecht, man kann demnach das Moment zum Verschwinden bringen (siehe Nr. 125). Die Zentralachse des Kräftesystems, die Angriffslinie der Resultierenden, heißt wohl auch die Mittellinie des Kraftsystems.

Praktische Anwendung findet unser Satz vor allem in zwei Fällen:

1. Die Schwerkräfte können bei gewöhnlichen Objekten, die klein sind gegen die Erde, als parallel angesehen werden.

Die Schwerkräfte lassen sich demnach für gewöhnliche irdische Objekte, sofern sie als starre Körper behandelt werden dürfen, auf eine einzige Kraft, das Gesamtgewicht G, zurückführen. Die Angriffsgerade dieser Resultierenden heißt Schwerachse.

2. Die Normaldrucke ebener Flächenstücke sind gleichfalls parallel. Sie haben also ebenfalls eine Resultierende, $N = \mathop{\mathrm{S}} dN$, deren Schnittpunkt mit dem ebenen Flächenstück Druckmittelpunkt genannt wird.

Habe die z-Achse die Richtung der Kräfte, so lassen sich die Koordinaten x^*, y^* der Mittellinie leicht berechnen. Es muß ja das Moment der Resultierenden K gleich dem Moment der Einzelkräfte sein, sowohl für die x- wie für die y-Achse. Für die z-Achse sind beide Null.

Daraus folgt für die y-Achse

$$x^* K = \int x\,dk$$

und für die x-Achse

$$y^* K = \int y\,dk,$$

also

$$x^* = \frac{\int x\,dk}{K},$$

$$y^* = \frac{\int y\,dk}{K}.$$

$\int x\,dk$ nennt man das statische Moment, auch wohl Moment erster Ordnung der Belegung dk in bezug auf die yz-Ebene. Allgemein: ist jedes Volumenelement dV mit einem Skalar $dk = \varkappa\,dV$ belegt und x der Abstand des Volumelementes dV von einer Ebene, so nennt man $\int x\,dk$ das statische Moment der Belegung in bezug auf die betreffende Ebene.

Bei der Schwere ist die Belegung das Gewicht: $dk = dG = \gamma\,dV$.

136. Der Schwerpunkt. Bringt man einen starren Körper in verschiedene Lagen, so bleibt jede Belegung dG an ihrer Stelle im Körper, aber die Richtung der Schwerkraft ändert sich relativ zum Körper.

Für jede Lage wird es relativ zum Körper eine besondere Schwerachse geben.

Wir behaupten nun, daß alle diese Schwerachsen durch einen Punkt hindurchgehen, und diesen Punkt nennen wir den Schwerpunkt des Körpers.

Zum Beweise legen wir in den Körper fest ein rechtwinkliges Koordinatensystem Ox, y, z.

Bringen wir die z-Achse nach unten, so hat ein Punkt der Schwerachse nach der vorigen Nummer die Koordinaten

$$x^* = \frac{\int x\,dG}{G}, \quad y^* = \frac{\int y\,dG}{G}.$$

Drehen wir nun die y-Achse nach unten, so bleibt jedes x, y, z, dG fest und die neue Schwerachse hat die Koordinaten

$$x^* = \frac{\int x\,dG}{G}, \quad z^* = \frac{\int z\,dG}{G}.$$

Ebenso hat ein Punkt der Schwerachse parallel der x-Achse die Koordinaten

$$y^* = \frac{\int y\,dG}{G}, \quad z^* = \frac{\int z\,dG}{G}.$$

Daraus sehen wir, daß jedenfalls diese drei Schwerachsen durch den

Punkt mit den Koordinaten x^*, y^*, z^* hindurchgehen. Wir wollen ihn Schwerpunkt heißen. Sein Vektor ist gegeben durch

$$\bar{r}^* = \frac{\mathsf{S}\,\bar{r}\,dG}{G},$$

machen wir ihn selbst zum Anfangspunkt, so ist $\bar{r}^* = 0$, also auch

$$\mathsf{S}\,\bar{r}\,dG = 0.$$

Wir wollen nun beweisen, daß für jede Lage des starren Körpers die Schwerachse durch den Schwerpunkt hindurchgeht. Sei die Schwerkraftrichtung relativ zu unserem Koordinatensystem durch $\bar{\varepsilon}$ gegeben, so ist das Moment bezogen auf den Schwerpunkt

$$\bar{M} = \mathsf{S}\,\overline{\bar{r}\,d\bar{k}} = \overline{(\mathsf{S}\,\bar{r}\,dk)\,\varepsilon} = 0,$$

weil $\mathsf{S}\,\bar{r}\,dk = 0$ ist.

Also geht die Resultierende durch den Schwerpunkt hindurch, w. z. b. w.

Man kann also für alle Lagen eines starren Körpers die Schwerewirkung durch eine Kraft ersetzen, die gleich dem Gewicht des Körpers ist, nach unten gerichtet ist und im Schwerpunkt des Körpers angreift. Der Vektor nach diesem Schwerpunkt ist gegeben durch

$$\bar{r}^* = \frac{\mathsf{S}\,\bar{r}\,dG}{G}.$$

Dieser Ersatz ist aber nach den allgemeinen Prinzipien des zweiten Abschnittes nur gestattet, so lange es sich um Gleichgewicht oder Bewegung des g a n z e n starren Körpers handelt.

Nun war aber $dG = g\,dm$, wenn dm die Masse des Volumelementes bedeutet.

Solange also g als konstant angesehen werden darf — und sofern g als von gleicher Richtung gilt, ist auch das erstere als erlaubt zu betrachten, denn erst in größeren Entfernungen wird die Veränderlichkeit des g merklich —, kann man g aus der Summe herausziehen; und da auch $G = mg$ ist, hebt es sich im Zähler und Nenner fort. Man erhält also

$$\bar{r}^* = \frac{\mathsf{S}\,\bar{r}\,dm}{m},$$

d. h. *für gewöhnliche irdische Objekte kann der Schwerpunkt mit dem Massenmittelpunkt identifiziert werden.*

(Siehe Nr. 51 bis 53. Die dort angegebenen Sätze und Berechnungsmethoden für den Massenmittelpunkt gelten also auch für den Schwerpunkt.) Wir brauchen hinfort die an sich verschiedenen Begriffe synonym. Man muß aber festhalten, daß der Schwerpunkt eine rein dynamische Bedeutung und nur eine solche für den starren Körper hat, der Massenmittelpunkt eine massenkinematische und für alle Systeme gültige.

Für den resultierenden Normaldruck starrer ebener Flächenstücke folgt aus dem Satze 7 von Nr. 52, daß er innerhalb der kleinsten, nirgends konkaven Figur angreift, welche das Flächenstück einschließt, während sonst Größe und Angriffspunkt von vornherein nicht bekannt sind. Denn zum Beweise von Satz 7 war nur nötig zu wissen, daß dm, dem hier dk entspricht, stets positiv ist.

137. Graphische Zusammensetzung paralleler längs einer Strecke stetig verteilter Kräfte. Die Seilkurve. Wir wollen annehmen, daß die Kräfte $d\bar{k}$ symmetrisch zu einer ihnen parallelen Ebene geordnet sind. Dann können wir sicher alle Kräfte, welche in einer Ebene senkrecht zu der Symmetrieebene liegen, zu einer Resultierenden zusammensetzen, die in der Symmetrieebene liegt.

So stoßen wir auf die sehr häufig vorkommende Aufgabe:

Man soll parallele und gleichgerichtete Kräfte zusammensetzen, die längs einer Strecke AB stetig verteilt sind.

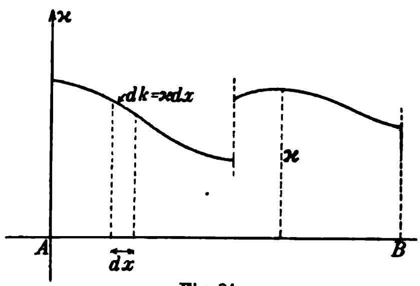


Fig. 84.

Wir zeichnen AB horizontal, die Kräfte vertikal. Zähle x von A angefangen nach B hin, so wird sein

$$dk = \varkappa dx,$$

wo $\varkappa$ eine endliche Funktion von x ist. Sie soll im allgemeinen regulär sein, aber einzelne Sprünge aufweisen können.

$\varkappa$ heiße die spezifische Belastung an der Stelle x, die Kurve, welche $\varkappa$ als Funktion von x darstellt, heiße die Belastungslinie.

Um nun die in Rede stehenden vertikalen unendlich vielen Kräfte graphisch zusammenzusetzen, denken wir statt ihrer zunächst einmal eine große Anzahl (n) kleiner vertikaler Kräfte $\Delta k = \varkappa \Delta x$, wo $\varkappa$ ein Mittelwert im Streifen der Breite Δx sei; als Angriffsgerade nehmen wir irgendeine Vertikale innerhalb Δx.

Dann ist uns die graphische Methode nach Nr. 118 geläufig: wir erhalten ein Krafteck, dessen Strecken Δk alle in einer Vertikalen liegen, und ein Seilpolygon, dessen Ecken auf den Angriffsgeraden liegen. Beachten wir noch, daß die auf einer Angriffsgeraden zusammentreffenden Seilstrahlen parallel zu den Polstrahlen sind, welche das entsprechende Δk begrenzen.

Lassen wir nun n immer größer und die Δx immer kleiner werden, so bleibt $\Sigma \Delta k = K_0 K_n$ erhalten, die Teilpunkte K rücken aber immer dichter aneinander, und wenn wir P, den Pol, festhalten, wird das Büschel der Polstrahlen auch immer dichter. Das Seilpolygon aber erhält immer mehr Ecken und Seiten, und da die Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Seiten unendlich klein werden, so wird das Seilpolygon in der Grenze in eine Seilkurve übergehen.

Diese Seilkurve wird an jeder Stelle eine Tangente haben, in welche die beiden Seilstrahlen übergehen, die sich vor dem Grenzübergang an der betreffenden Stelle schnitten. Dieser Tangente wird

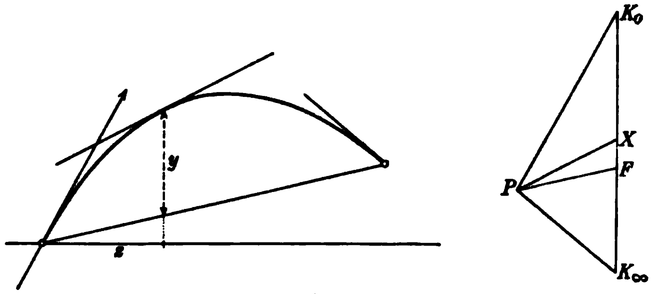


Fig. 85.

aber ein bestimmter Polstrahl PX parallel sein und zwar derart natürlich, daß K_0X gleich ist der gesamten Last links von der Stelle z, die wir betrachten. Also

$$K_0X = \int_{x=0}^{z} \varkappa\, dx.$$

Anfangs- und Endtangente der Seilkurve werden natürlich dem ersten resp. letzten Polstrahl (PK_0 resp. K_∞) parallel sein, ihr Schnittpunkt S gibt einen Punkt der Angriffslinie der Resultierenden.

138. Graphische Bestimmung einer Schwerachse. Die Darlegungen der vorhergehenden Nummer finden Anwendung, wenn es sich darum handelt, die Schwerachse einer ebenen homogenen Figur in irgendeiner Richtung zu finden.

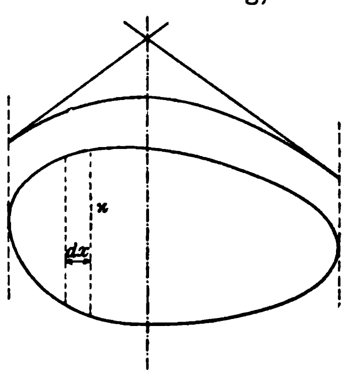


Fig. 86.

Man nehme eine x-Achse senkrecht zur gegebenen Richtung und teile die Figur parallel zur Richtung in Streifen der Breite dx. Sei $\varkappa$ die Länge eines solchen Streifens, so läuft unsere Aufgabe darauf hinaus, die Angriffsgerade der Resultierenden der parallelen Kräfte $\varkappa dx$ zu finden. Man wird also einfach, wie in der vorhergehenden Nummer angegeben wurde, die Seilkurve konstruieren, die zwischen den äußersten zur Richtung der Schwerachse parallelen Tangenten der Figur zu spannen ist.

Der Schnittpunkt der beiden Tangenten im Anfangs- und im Endpunkte der Seilkurve wird dann ein Punkt der gesuchten Schwerachse sein.

Man muß natürlich in Praxi bei einer endlichen Einteilung in hinreichend schmale Streifen stehen bleiben. Es empfiehlt sich nicht einmal, die Einteilung gar zu fein zu machen, da sich mit der Anzahl der Streifen die Zeichenfehler häufen.

Angenähert wird man ferner jeden Streifen durch ein schmales Rechteck parallel zur gegebenen Richtung ersetzen. Will man genauer arbeiten, so nimmt man Trapeze statt der Rechtecke und benutzt für die Trapeze die in Nr. 53 gegebene Konstruktion der Schwerachse, soweit die Genauigkeit dies verlangt.

Aufgabe 63: Man konstruiere den Schwerpunkt des in Aufgabe 119 (Nr. 258) gezeichneten Normalprofils.

§ 29. Beispiele und Aufgaben.

139. Beispiele.

Beispiel 1. Ein Balken vom Gewichte G und gegebener Schwerpunktslage balanziere quer auf einer festen kreisrunden Walze. Wann ist er im Gleichgewicht und um welchen Winkel kann die Richtung vom Mittelpunkt der Walze nach dem Berührungspunkte höchstens von der Vertikalen abweichen?

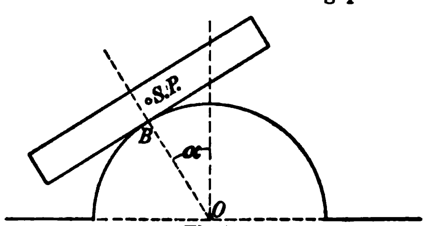


Fig. 87.

Der Reibungswinkel zwischen Balken und Unterlage sei φ.

Nimmt man Normaldruck und Reibung an der Berührungsstelle zu einer Resultierenden D zusammen, so muß diese allein dem Gewicht G das Gleichgewicht halten, es muß also D vertikal nach oben gerichtet, $D = G$ sein und es müssen D und G in derselben Angriffslinie liegen, d. h. der Schwerpunkt über dem Berührungspunkt B. Da ferner D von der Normalen um den Winkel α abweicht, andererseits dieser Winkel kleiner als φ sein muß, so folgt

$$\alpha \leq \varphi.$$

Beispiel 2. Ein Stab von gegebenem Gewicht G und gegebener Schwerpunktslage (a, b seien die Entfernungen von den Enden) stütze sich mit seinem unteren Ende auf eine horizontale Ebene, am oberen Ende werde er durch eine Kraft p gehalten, die von der Vertikalen um den Winkel ε abweiche. Der Reibungskoeffizient zwischen Stab und Boden sei f, die Neigung des Stabes gegen den Horizont α. Unsere Gleichgewichtsbedingungen ergeben

$$p \sin \varepsilon - R = 0,$$
$$p \cos \varepsilon + N - G = 0,$$
$$- G a \cos \alpha + p \cos \varepsilon (a + b) \cos \alpha - p \sin \varepsilon (a + b) \sin \alpha = 0,$$

d. h.

$$p = G \frac{a}{a+b} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos (\alpha + \varepsilon)},$$

$$R = p \sin \varepsilon = G \frac{a}{a+b} \frac{\cos \alpha \sin \varepsilon}{\cos (\alpha + \varepsilon)},$$

$$N = G - p\cos\varepsilon = G\left(1 - \frac{a}{a+b}\cdot\frac{\cos\alpha\cos\varepsilon}{\cos\alpha\cos\varepsilon - \sin\alpha\sin\varepsilon}\right)$$

$$= G\,\frac{-a\sin\alpha\sin\varepsilon + b\cos(\alpha+\varepsilon)}{(a+b)\cos(\alpha+\varepsilon)}.$$

Die Ungleichheitsbedingung $|R| \leq fN$ gibt, $\varepsilon > 0$ vorausgesetzt,

$$a\cos\alpha\sin\varepsilon \leq f(-a\sin\alpha\sin\varepsilon + b(\cos\alpha\cos\varepsilon - \sin\alpha\sin\varepsilon)),$$

oder, wenn man durch $\cos\alpha\sin\varepsilon f$ dividiert,

$$a\operatorname{ctg}\varphi \leq -a\operatorname{tg}\alpha + b(\operatorname{ctg}\varepsilon - \operatorname{tg}\alpha),$$

oder

$$b\operatorname{ctg}\varepsilon \geq a\operatorname{ctg}\varphi + (a+b)\operatorname{tg}\alpha. \tag{I}$$

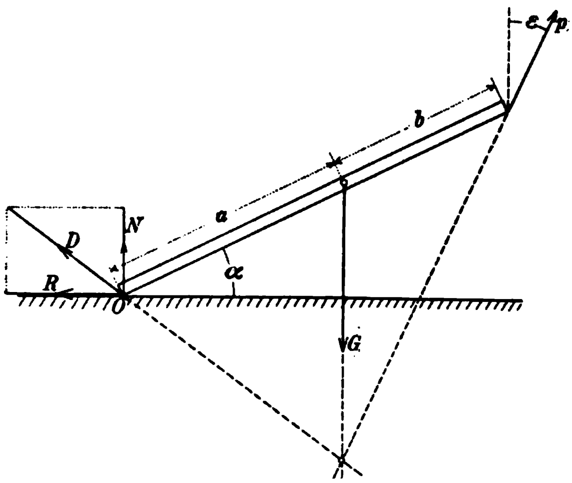


Fig. 88a.

Man kann die Aufgabe auch so lösen, daß man die Resultierende D von R und N einführt und bedenkt, daß sich jetzt D, G und p in einem Punkte schneiden müssen.

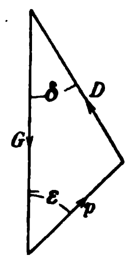


Fig. 88b.

Man leitet dann für den Winkel ϑ, den D mit N einschließt, aus der Figur leicht die Relation

$$a\operatorname{ctg}\vartheta + a\operatorname{tg}\alpha = b(\operatorname{ctg}\varepsilon - \operatorname{tg}\alpha)$$

ab. Die Relation (I) folgt dann aus der Bedingung

$$\vartheta \leq \varphi.$$

D und p berechnen sich dann daraus, daß sie mit G ein geschlossenes Dreieck bilden müssen, dessen Winkel an der Seite G natürlich ε und ϑ sind (s. Fig. 88b).

Beispiel 3. Ein Stab vom Gewichte G und gegebener Schwerpunktslage (a und b seien die Entfernungen von den Enden) stütze sich mit dem einen Ende auf einen horizontalen Boden, mit dem anderen Ende gegen eine vertikale Wand. Wann bleibt er unter der Wirkung der Reibung in Ruhe?

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten (siehe Fig. 89)

$$N_1 + R_2 - G = 0,$$

$$N_2 - R_1 = 0,$$

$$G b\cos\vartheta - N_2(a+b)\sin\vartheta - R_2(a+b)\cos\vartheta = 0.$$

Das sind nur drei Gleichungen zur Bestimmung der vier Reaktionen R, N. Die Aufgabe ist also statisch unbestimmt, wie man sich ausdrückt.

Lassen wir R_2 als Unbekannte und setzen $\frac{b}{a+b} = \beta$, so folgt

$$N_1 = G - R_2,$$
$$N_2 = (G\beta - R_2)\operatorname{ctg}\vartheta,$$
$$R_1 = N_2 = (G\beta - R_2)\operatorname{ctg}\vartheta.$$

Nun sind aber noch die Ungleichheiten zu erfüllen:

$$N_1 \geqq 0, \quad N_2 \geqq 0,$$
$$|R_1| \leqq f_1 N_1, \quad |R_2| \leqq f_2 N_2.$$

Es mag dem Leser selbst überlassen bleiben, daraus die eine resultierende Bedingung:

$$\beta \leqq f_1 \frac{\operatorname{tg}\vartheta + f_2}{1 + f_1 f_2}$$

abzuleiten.

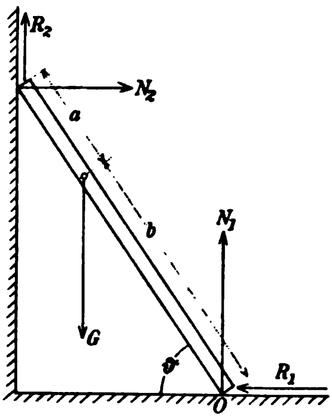


Fig. 89.

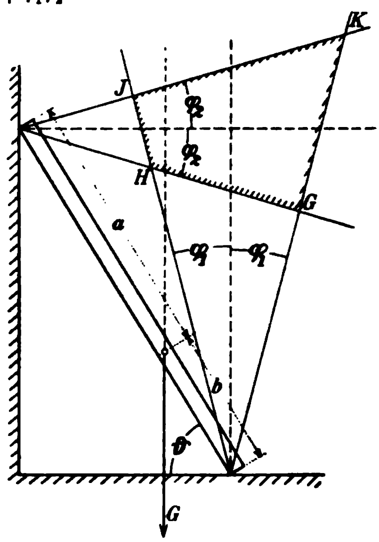


Fig. 90.

Da β ein echter Bruch ist, so ist diese Bedingung trivial, das Gleichgewicht also sicher vorhanden, wenn

$$f_1 \operatorname{tg}\vartheta + f_2 f_1 \geqq 1 + f_1 f_2, \quad \text{d. h.}$$
$$f_1 \operatorname{tg}\vartheta > 1,$$
$$\operatorname{ctg}\vartheta < f_1,$$
$$\frac{\pi}{2} - \vartheta \leq \varphi_1$$

ist. In diesem Falle ist also Gleichgewicht vorhanden, wo auch immer der Schwerpunkt auf der Stange liegen mag.

Wesentlich einfacher ist die graphische Lösung der Aufgabe:

Man fasse N_1 und R_1 zu einer Resultierenden D_1 zusammen, N_2 und R_2 zu einer Resultierenden D_2. Unser Stab steht jetzt unter der Einwirkung dreier Kräfte D_1, D_2 und G.

Diese müssen sich also in einem Punkte schneiden. Nun ist aber das mögliche Treffgebiet von D_1 mit D_2 durch das Viereck $GHJK$ gegeben, in dem sich die beiden Paare äußerster Erzeugenden der beiden Reibungskegel schneiden (siehe Fig. 90).

Es wird also dann immer Gleichgewicht möglich sein, wenn die Angriffsgerade von G das Viereck $GHJK$ schneidet. Denn dann gibt es immer zwei in den Reibungskegeln gelegene Kräfte D_1 und D_2, die sich mit G in einem Punkte treffen. Und ihre Größe läßt sich natürlich stets so bestimmen, daß sie mit G ein geschlossenes Dreieck bilden.

Man sieht nun sofort, daß für alle Lagen des Schwerpunktes S Gleichgewicht herrscht, wenn J links von der vertikalen Stützfläche liegt, d. h. wenn

$$\varphi_1 \geqq \frac{\pi}{2} - \vartheta$$

ist. Drückt man aber aus, daß J links von der Angriffsgeraden von G liegt, so erhält man leicht die obige allgemeine Bedingung.

Wir haben $0 \leqq \beta \leqq 1$ vorausgesetzt. Es wäre nicht schwer, die anderen Fälle analog zu erledigen. Graphisch bekommt man das Resultat sofort: es muß die Angriffsgerade das Viereck $GHJK$ schneiden.

Bei negativem β kann auch der Grenzpunkt K in Frage kommen.

Beispiel 4. Ein zylinderförmiger Körper kann sich in einer Parallelführung hin- und herbewegen. Wann wird infolge einer in der Richtung der Bewegungsmöglichkeit wirkenden aber exzentrisch angreifenden Kraft k Selbstsperrung eintreten, d. h. eine Bewegung unmöglich sein?

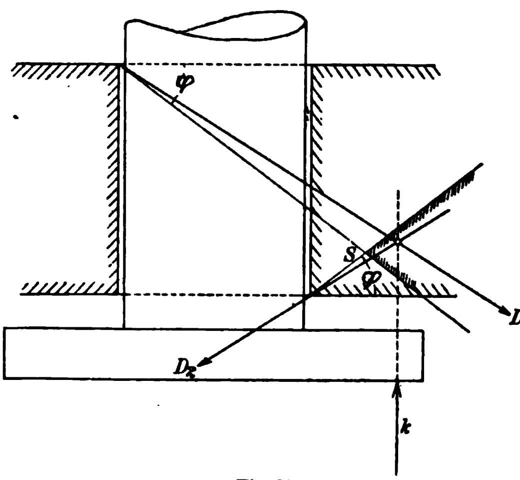


Fig. 91.

Untersuchen wir zunächst die Möglichkeit des Gleichgewichts.

Wenn, wie in der Figur, eine Kraft k exzentrisch unten rechts nach oben wirkt, so wird sich der Körper, von dem wir annehmen wollen, daß er in seiner Führung einen gewissen Spielraum besitzt, oben links und unten rechts an die Führung anpressen.

Zeichnen wir an beiden Stellen die Drucke D_1 und D_2 — die Resultierenden aus Normaldruck und Reibung —, so müssen sich $k_1 D_1 D_2$ in einem Punkte schneiden. Das wird aber nur dann möglich sein, wenn k rechts vom Punkte S, dem Schnittpunkte der extremen Erzeugenden der beiden Reibungskegel, liegen wird.

Dieser Grad von Exzentrizität wird also jedenfalls notwendig zur Selbstsperrung sein.

Aber er ist auch hinreichend. Denn wenn Bewegung eintritt, so werden D_1 und D_2 genau durch S hindurchgehen, und da die Bewegung vertikal aufwärts geschehen soll, müssen D_1 und D_2 in S eine nach unten gerichtete Resultierende k' haben, damit keine horizontale Kraftkomponente da sei.

Die Resultierende von k und k', die zur Einleitung der Bewegung nach aufwärts gerichtet sein muß, liegt aber nach Nr. 115 auf der Seite von k, also noch weiter nach rechts, wenn k rechts von S liegt. Wir werden aber später beweisen (siehe Nr. 236), daß bei einer Translationsbewegung die Resultierende durch den Schwerpunkt gehen muß. Wenn also der Schwerpunkt nicht so sehr exzentrisch liegen sollte (nämlich nicht rechts von S), und das wollen wir annehmen, so wird tatsächlich die Einleitung einer Bewegung nach oben unmöglich sein, wenn k rechts von S liegt.

Auf der hier besprochenen Möglichkeit der Selbstsperrung beruht eine einfache Steigvorrichtung, welche Arbeiter benutzen, um an Telegraphenstangen emporzuklettern und sich oben festzuhalten. Diese Vorrichtung besteht wesentlich in seitlich an die Schuhe geschnallten runden Klammern, mit denen die Stangen umfaßt werden. Die exzentrisch wirkende Last des eigenen Körpers bewirkt Selbstsperrung.

140. Aufgaben.

64. Ein Stab von gegebenem Gewicht G und gegebener Schwerpunktslage (a, b seien die Entfernungen von den Enden) stütze sich mit den Enden A, B gegen einen glatten horizontalen Boden und eine glatte vertikale Wand. Er werde dadurch gehalten, daß ein Punkt P des Stabes mit dem Eckpunkt O durch einen Idealfaden verbunden sei. Wie groß ist die Spannung S in diesem Faden und wie groß sind die Normaldrucke N_1 und N_2?

Die Aufgabe kommt darauf hinaus, G nach den Angriffslinien von N_1, N_2 und S zu zerlegen.

Man kann also die Aufgabe entweder graphisch lösen oder nach dem Ritterschen Verfahren (siehe Nr. 128).

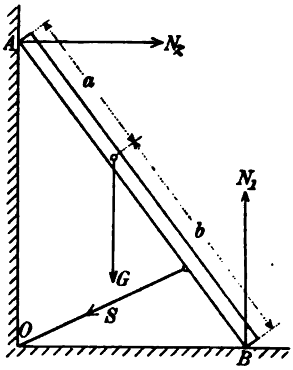


Fig. 92.

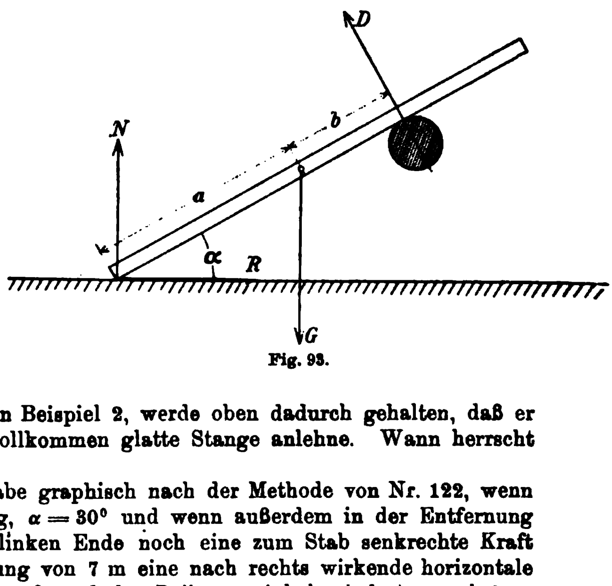


Fig. 93.

65. Derselbe Stab, wie in Beispiel 2, werde oben dadurch gehalten, daß er sich gegen eine horizontale vollkommen glatte Stange anlehne. Wann herrscht Gleichgewicht?

Man löse dieselbe Aufgabe graphisch nach der Methode von Nr. 122, wenn $a = 5$ m, $b = 4$ m, $G = 10$ kg, $\alpha = 30^0$ und wenn außerdem in der Entfernung von 3 m vom aufgestützten linken Ende noch eine zum Stab senkrechte Kraft von 8 kg und in der Entfernung von 7 m eine nach rechts wirkende horizontale Kraft von 2 kg wirke. Wie groß muß der Reibungswinkel mindestens sein?

66. Ein Bild vom Gewicht G, dessen Schwerpunktslage S durch die Entfernung c von der hinteren Bildwand und die Entfernung a von seiner unteren Fläche gegeben sei, werde dadurch an eine vertikale Wand aufgehängt, daß an einer Stelle H in der Entfernung h von der unteren Kante O ein Faden von der Länge l befestigt wird, der an einen Punkt B der Wand geknüpft ist. Mit der unteren Kante O stütze sich das Bild gegen die vollkomme glatte Wand. Unter welchem Winkel α wird es sich gegen die Wand neigen?

Es empfiehlt sich, den Hilfswinkel β einzuführen, der durch h, α, l ausgedrückt werden kann.

Man erhält dann eine Gleichung für α. Man zeige, daß α Null wird, wenn c Null wird und löse dementsprechend die Aufgabe für den Fall, daß c sehr klein sei gegen a, h und l; d. h. man setze $\cos\alpha = 1$, indem man bei Gliedern erster Ordnung in c (und also auch α) stehen bleibt.

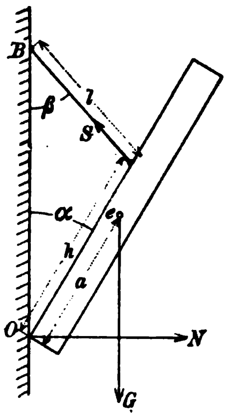


Fig. 94.

67. Eine horizontale kreisförmige Platte werde in der Mitte O durch eine nach oben gerichtete Stützkraft getragen. Man soll am Rande der Platte drei gegebene Gewichte P, Q, R so aufsetzen, daß Gleichgewicht herrscht. Man zeige, daß dazu notwendig ist, daß man aus P, Q, R als Strecken ein Dreieck bilden kann und daß dann die Winkel α, β, γ als Außenwinkel dieses Dreiecks gefunden werden.

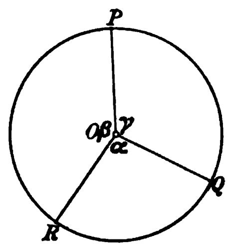


Fig. 95.

68. Aus vier gleich großen und gleich schweren Kugeln bilde man eine Pyramide. Wie groß muß der Reibungskoeffizient zwischen den Kugeln sein, damit Gleichgewicht möglich ist?

69. Ein Balken ist zwischen zwei horizontale, parallele Stützen gelagert, so wie Fig. 96 zeigt. Wo muß eine Last L angreifen, damit Gleichgewicht herrscht?

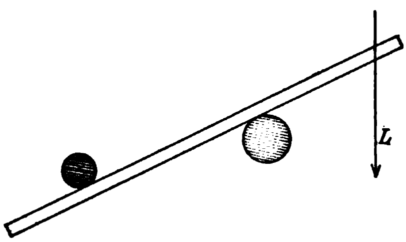


Fig. 96.

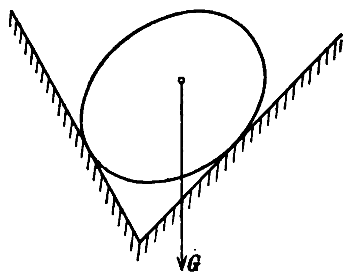


Fig. 97.

70. Wann wird ein in einer horizontalen Rinne von dreieckigem Querschnitt liegender Körper im Gleichgewicht sein?

71. Ein Stab von bekannter Schwerpunktslage und bekanntem Gewichte G stütze sich mit seinem oberen Ende an eine vertikale glatte Wand, mit dem unteren Ende auf eine glatte horizontale Fläche. An das untere Ende sei durch einen Faden ein Gewicht G' in der durch die Figur 98 erläuterten Weise geknüpft. Bei welcher Neigung ϑ des Stabes gegen den Horizont wird Gleichgewicht herrschen?

72. Ein homogener Stab der Länge l liege in einer halbkugelförmigen Schale vom Radius a, so daß er sich mit dem unteren Ende auf die Schale

stützt und sich außerdem an den Rand der Schale anlehnt. Für welchen Neigungswinkel ϑ gegen den Horizont wird Gleichgewicht herrschen? Reibung sei nicht vorhanden.

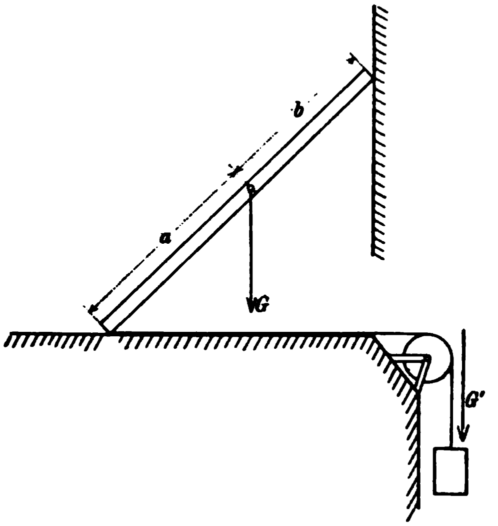


Fig. 98.

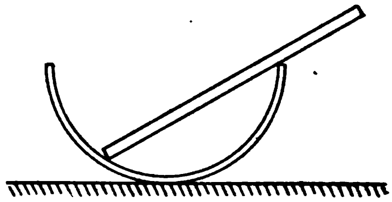


Fig. 99.

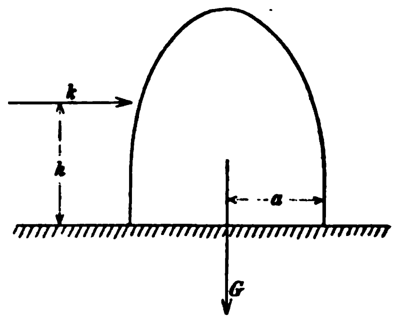


Fig. 100.

78. Ein Körper vom Gewichte G liege auf einer horizontalen Fläche. Auf ihn wirke horizontal im Abstande h vom Boden eine Kraft k. Welche Ungleichheiten müssen für k und h erfüllt sein, wenn noch Gleichgewicht herrschen soll? Der Reibungskoeffizient f am Boden und der Abstand a der Schwerachse von der äußeren Kante des Körpers seien gegeben. (Man beachte das in Nr. 135 und Nr. 136 über den Normaldruck Gesagte!)

§ 30. Der Hebel.

141. Gleichgewicht eines um eine feste Achse drehbaren starren Körpers. Wir betrachten einen starren Körper, der so gestützt ist, daß er sich höchstens um eine feste Achse drehen kann, ohne sich in ihrer Richtung zu verschieben.

Dann muß die Berührungsfläche zwischen unserem starren Körper und der Führung (dem Lager) das Stück einer Rotationsfläche sein. Denn betrachten wir eine Kurve auf der Berührungsfläche, so beschreibt sie bei der Drehung eine Rotationsfläche.

Bei einer solchen gehen aber alle Normalen durch die Achse hindurch, die Normaldrucke zwischen unserem Körper und dem Lager schneiden demnach alle die Achse, haben also in bezug auf diese kein Moment. Dagegen übersieht man leicht, daß bei genügend geschlossenem Lager ringsum der Lagerdruck jede Resultierende und jedes Moment senkrecht zur Lagerachse haben kann.

Von den sechs Gleichgewichtsbedingungen wird also nur eine, die Momentengleichung um die Drehachse die Lagerdrucke nicht enthalten, die fünf anderen aber sind stets erfüllbar durch geeignet gewählte Lagerdrucke und dienen also dazu, über diese unbekannten Lagerreaktionen gewisse Aussagen zu machen.

Mithin lautet die einzige von den Lagerdrucken freie Gleichgewichtsbedingung, die einzige sogenannte reine Gleichgewichtsbedingung, für einen um eine feste Achse drehbaren starren Körper, einen sogenannten Hebel:

Es muß das Moment der eingeprägten Kräfte in bezug auf die Drehachse Null sein.

Dieser Hebelsatz scheint den ältesten Bestandteil menschlichen Wissens aus der Mechanik darzustellen. Aristoteles hat ihn gekannt, Archimedes aus einfachen Annahmen abgeleitet, das ganze Mittelalter hindurch beschäftigt man sich kaum mit etwas anderem.

Die Lagerreibung oder Zapfenreibung, d. h. die Reibung zwischen Hebel und Lager, ist als eingeprägte Kraft zu behandeln, sobald eine Bewegung des Hebels als möglich zugelassen wird. Unsere obige Gleichgewichtsbedingung wird auch jetzt gelten, aber sie enthält die unbekannten Lagerreaktionen implizit, wenigstens dann, wenn man die Grenzen des Gleichgewichts sucht. Denn die Grenzwerte der Reibung hängen ja von den Lagerreaktionen ab.

Wenn wir früher (Nr. 58) gesagt haben, daß die Haftreibung immer eine Reaktionskraft sei, so bedarf dieser Ausspruch der Modifikation. Wenn überhaupt die Möglichkeit einer entsprechenden Gleitbewegung diskutiert wird, wollen wir sie hinfort als eine eingeprägte Kraft zählen, indem wir an den Grenzfall denken, wo je nach dem Anfangszustand Ruhe oder Bewegung möglich ist. Diese Festsetzung steht übrigens mit der allgemeinen Definition der Reaktionskraft im Einklang (siehe Nr. 62).

Neben dem eigentlichen Fall des Gleichgewichtes betrachten wir in vielen Beispielen, nämlich bei den sogenannten (einfachen) Maschinen und Werkzeugen: Winde, Hebel, Schraube, Flaschenzug usw., auch immer den Fall langsamer Bewegung, wo dann die Reibungskraft sicher eine eingeprägte Kraft ist. Daß wir auf diesen Fall die Gesetze der Statik anwenden dürfen, wird freilich erst im dritten Abschnitt bewiesen werden, da aber eine Abweichung der statischen von der kinetischen Behandlungsweise nach Abschnitt I jedenfalls durch Beschleunigungen bedingt wird, so ist es klar, daß unser Verfahren bei langsamen und langsam veränderten Bewegungen erlaubt ist.

142. Anwendungen: Wage und Winde.

1. Die Wage bildet wohl die bedeutendste, theoretisch und praktisch wichtigste Anwendung. Die gewöhnliche Wage beruht darauf, daß im Gleichgewicht bei gleichen Hebelarmen zwei an einen

Hebel angehängte Gewichte einander gleich sein müssen und also verglichen werden können. Bei der sogenannten römischen Wage (Laufwage) hängt die zu wiegende Last an einem gegebenen Hebelarm: ein fest gegebenes Gewicht (Laufgewicht) läuft an einem variabeln Hebelarm x und wird so eingestellt, daß Gleichgewicht herrscht. L ist dann nach dem Hebelsatz dem x proportional, kann also direkt durch dieses gemessen werden.

Wichtig ist natürlich die Fehlertheorie der Wage und eine Untersuchung über ihre Genauigkeit und Empfindlichkeit. Die Elemente einer solchen Theorie findet man in jedem Lehrbuche der Physik, eine ausführliche Behandlung bei W. Felgenträger, Theorie, Konstruktion und Gebrauch der Hebelwage, Leipzig 1907.

Ein Referat über die zahlreichen hingehörenden Untersuchungen enthält der Artikel von Ph. Furtwängler: „Die Mechanik der einfachsten physikalischen Apparate und Versuchsanordnungen" in der Enzykl. der math. Wiss. Bd. IV, Art. 7.

Es soll hier nicht näher darauf eingegangen werden. Hervorgehoben sei nur folgendes: Man vergleicht an der Wage Gewichte. Da aber auch für die feinste Untersuchung im Bereiche der Wage g als konstant angesehen werden kann, so fällt bei Vergleichung der Gewichte g heraus; und da man die Masseneinheit durch ein bestimmtes Objekt willkürlich festsetzen kann, so mißt man eigentlich mit der Wage Massen mit Hilfe eines geeichten Gewichtssatzes. Die Wage ist unser feinstes Instrument, Massen zu messen.

Will man Gewichte mit ihr messen, so bedarf es noch einer besonderen Feststellung des g an Ort und Stelle.

Übrigens sind in dem Artikel von Ph. Furtwängler auch die Methoden, g mit Hilfe des Pendels zu messen, ausführlich besprochen.

Aufgaben: 74. Man eiche eine sogenannte Briefwage, d. h. man stelle den Ausschlagwinkel α als Funktion der Last L fest. Der Schwerpunkt der Wage allein, ohne Last L, liege auf dem Zeiger im Abstande a von der Drehachse. G sei das Gewicht der Wage. Der Arm $OA = b$, an dessen Ende A die Last angreife, sei senkrecht zum Zeiger. (Eine eventuell vorhandene Schale für die Last ist in L eingerechnet.) (Fig. 101.)

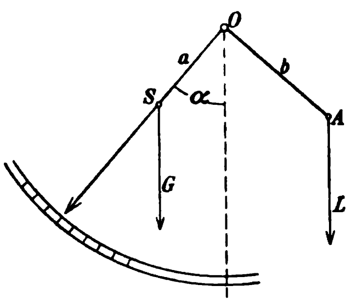


Fig. 101.

75. Eine gewöhnliche Wage habe nicht genau gleiche Arme, doch spiele der Zeiger der unbelasteten Wage genau auf Null ein. Wenn nun ein Körper auf der einen Wagschale p kg, auf der andern q kg wiegt, wie groß ist dann sein wahres Gewicht?

2. Die Winde. Eine Welle sei an zwei Stellen horizontal gelagert, die Zapfen seien zylindrisch. Um die Welle sei ein Seil geschlungen, an dem eine vertikal herabhängende Last L hänge. An

einem Ende der Welle sei eine Handhabe, senkrecht zu ihr wirke eine Kraft P in einer Ebene senkrecht zur Welle. Wie groß muß im Gleichgewichtsfalle P sein und was läßt sich über die Lagerdrucke sagen?

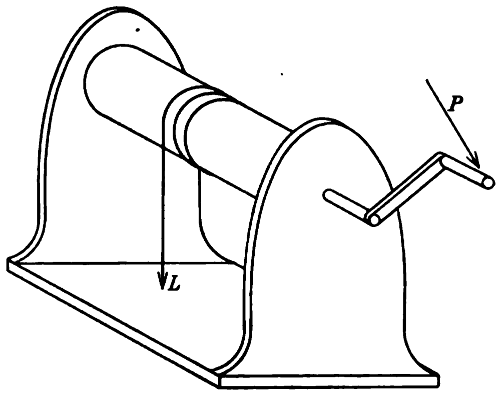


Fig. 102 a.

Wenn wir annehmen, daß die Berührung zwischen den Wellenzapfen und den Lagern nur in einer einzigen Erzeugenden des Zylinders stattfindet, so können wir jedenfalls die Lagerdrucke in jedem Lager als parallele Kräfte auf eine Resultierende zurückführen, die in einem mittleren Punkte eines jeden Lagers angreift (vgl. Nr. 135, 136).

Sind die Lager kurz gegen die anderen Dimensionen, so wird es ziemlich gleichgültig sein, an welchen Punkten des Lagers wir die Resultierende annehmen. Es seien die Punkte O_1 (hinten) O_2 (vorne): H_1 und V_1 resp. H_2 und V_2 seien die Horizontal- und Vertikalkomponenten der beiden Lagerdrucke.

Sind einmal die Punkte O_1 und O_2 angenommen, so können wir, wie wir sehen werden, die vier Größen H und V berechnen, aber die Lage von O_1 und O_2 oder die genauere Verteilung der Drucke in den Lagern nicht.

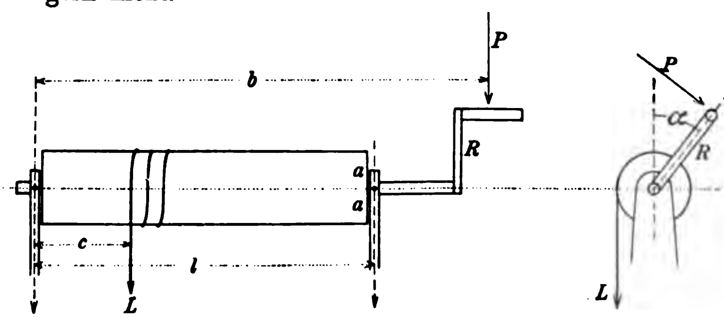


Fig. 102 b.

Die Bedeutung der Längen a, R, c, b, l erhellt aus der Fig. 102b, ebenso die des Winkels α.

Die Gleichung $\sum \bar{k} = 0$ gibt dann nach der Horizontalen und Vertikalen zerlegt:

$$V_1 + V_2 - L - P \sin \alpha = 0, \tag{1}$$

$$H_1 + H_2 + P \cos \alpha = 0. \tag{2}$$

Die Momentengleichung für die Drehachse gibt die eigentliche Gleichgewichtsbedingung:

$$aL - R \cdot P = 0, \tag{3}$$

d. h.

$$P = \frac{a}{R} L.$$

Bleiben noch die Momentengleichungen für die horizontale und vertikale Achse durch O_1:

$$-Lc + V_2 l - P \sin\alpha \cdot b = 0, \tag{4}$$

$$H_2 l + P \cos\alpha \cdot b = 0. \tag{5}$$

Die Auflösung nach den Unbekannten P, V_1, V_2, H_1, H_2 läßt sich elementar ausführen und gibt

$$H_2 = -\frac{b}{l}\frac{a}{R} L \cos\alpha,$$

$$V_2 = \frac{1}{l} L\left(c + b\frac{a}{R}\sin\alpha\right),$$

$$H_1 = \frac{a}{R} L \cos\alpha\left(\frac{b}{l} - 1\right),$$

$$V_1 = \frac{1}{l} L\left(l - c + (l-b)\frac{a}{R}\sin\alpha\right).$$

H_2 und H_1 können bei laufendem α positiv und negativ sein, V_1 und V_2 können auf alle Fälle positiv sein: die Lager müssen also unten geschlossen sein. Ob sie aber auch oben geschlossen sein müssen, hängt davon ab, ob V_1 und V_2 auch negativ sein können, d. h. ob

$$b\frac{a}{R} > c \quad \text{und} \quad (l-b)\frac{a}{R} > l - c$$

sind. Man sieht, daß nicht beide Ungleichheiten gleichzeitig erfüllt sein können, denn die Summation gibt die falsche Ungleichung

$$l\frac{a}{R} > l,$$

während wir $a < R$ annehmen wollen, wie es in der Praxis stets der Fall ist.

Ein Lager kann also oben offen sein. Es kann auch sein, daß beide oben offen sein dürfen. Dann muß

$$b\frac{a}{R} < c \quad \text{und} \quad (l-b)\frac{a}{R} < l - c$$

sein, was bei hinreichend großem R möglich ist.

Aufgaben: 76. Eine halbkreisförmige homogene Platte sei um eine horizontale Achse AB drehbar. In A und B seien kurze zylinderförmige Lager. Das Gewicht der Platte sei G, ihren Schwerpunktsabstand von der Achse entnehme man aus Nr. 58. Durch eine Kraft k, welche am Rande der Platte senkrecht zu ihr angreife, werde die Platte in einem Winkel ϑ gegen den Horizont gehalten. Wie groß muß k sein und wie groß sind die Lagerreaktionen in A und B? Die Stelle, wo k angreift, sei durch den Winkel α gegen die Symmetrielinie der Platte gegeben. Der Radius der Platte sei a.

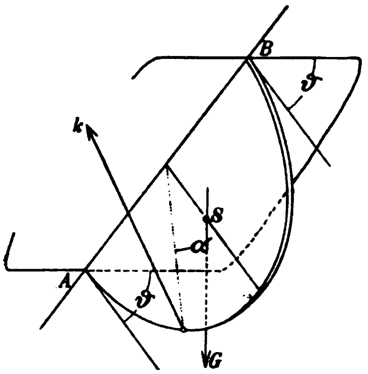


Fig. 103.

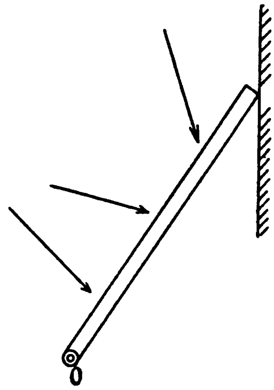


Fig. 104.

77. Ein um einen horizontalen Zapfen O drehbarer Balken stütze sich mit dem anderen Ende gegen eine feste Wand. Er sei einigen Kräften $\bar{k}_1, \bar{k}_2 \ldots \bar{k}_n$ unterworfen, welche in einer Ebene senkrecht zu O liegen. Man bestimme den resultierenden Lagerdruck in O und den Normaldruck der festen Wand. Man kann die Aufgabe graphisch lösen oder nach der Momentenmethode, indem man O zur Momentenachse macht und die Hebelarme aus der Figur entnimmt (vgl. Nr. 122).

143. Zapfenreibung. Herrscht an einer Berührungsstelle zwischen Zapfen und Lager ein Normaldruck dN, so kann eine Reibung $d\bar{R}$ auftreten; wenn keine Bewegung stattfindet, so ist

$$|d\bar{R}| \leqq dN \cdot f,$$

tritt aber Bewegung ein, so ist $d\bar{R}$ tangential zum zugehörigen Parallelkreis der Rotationsfläche des Lagers und zwar der Bewegung entgegen gerichtet, und es ist

$$dR = dNf.$$

Das gleiche wird in dem Grenzfall gelten, wo noch gerade Gleichgewicht möglich ist.

Mit diesem wollen wir uns beschäftigen, also mit der Zapfenreibung — so nennt man auch wohl die Lagerreibung — als einer eingeprägten Kraft.

Wenn man nun nichts Näheres über die Verteilung des Normaldrucks weiß, kann das Moment der Zapfenreibung beliebig große Werte haben. Sei r der Radius des Parallelkreises, so ist das Reibungsmoment

$$M_R = \int r\,dR = f \int r\,dN.$$

Für diese Summe kann man aber aus dem resultierenden Lagerdruck $\bar{N} = \mathsf{S}\, d\bar{N}$ nur soviel schließen, daß $\mathsf{S}\, |d\bar{N}| \geqq |\bar{N}|$ — weil die Länge eines Polygonzuges größer ist als die Länge seiner Schlußlinie — und also

$$M_R \geqq f r_m N,$$

wo r_m einen mittleren Zapfenradius bedeutet.

Es ist auch bekannt, daß, wenn ein Lager sehr spannt, d. h. sehr eng ist und also der Zapfen von allen Seiten hohen Druck erfährt — weshalb $\bar{N}$ noch immer einen beliebig kleinen Wert haben kann —, das Moment der Reibung beliebig hoch wird, was sich darin äußert, daß der Hebel nur mit der größten Anstrengung gedreht werden kann.

Wir wollen uns im folgenden nur mit sogenannten leicht laufenden Lagern beschäftigen, d. h. Lagern, bei denen der Zapfen einen gewissen Spielraum hat und also nur in einem kleinen Stück des Umfangs Druck erfährt.

Die einfachste Hypothese und zugleich diejenige, die der Vorstellung des starren Körpers am meisten entspricht, ist die der einpunktigen Berührung in jedem Parallelkreis oder der Berührung längs eines Meridians der beiden Rotationsflächen. Hier kann man von einem Normaldrucke N und einer Reibung R sprechen.

Besonders einfach werden die Verhältnisse beim zylinderförmigen Lager. Hier ist es gleichgültig, wo N und R angreifen, der Hebelarm von R wird immer der Radius r des Zapfens sein. Also

$$M_R = rR = rfN.$$

Fassen wir R und N zu einer Resultierenden D zusammen, so wird D den Abstand

$$\varrho = r \sin \varphi$$

von der Wellenmitte haben, d. h. D wird einen Kreis von diesem Radius berühren, den sogenannten Reibungskreis.

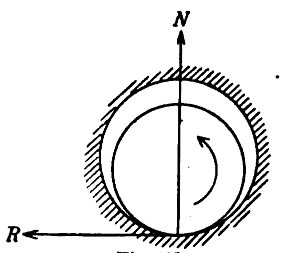


Fig. 105.

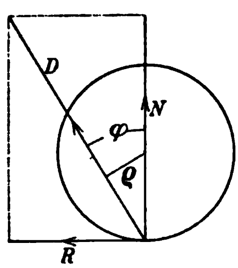


Fig. 106.

Man kann also den gesamten Lagerdruck (Reaktion und Reibung) auffassen als eine Kraft von unbekannter Größe und Richtung D, die aber nicht durch die Lagermitte hindurchgeht, sondern den Reibungs-

kreis berührt. Man kann aber auch sagen, daß zu einem resultierenden Lagerdruck von unbekannter Größe und Richtung D durch die Lagerachse ein der Bewegung entgegengesetztes Kräftepaar ϱD hinzukommt.

Das gilt für Gleitreibung. Man sieht leicht, daß bei Haftreibung das Moment des Kräftepaares kleiner als ϱD ist, oder daß D den Reibungskreis schneidet.

Übrigens ist diese Auffassung immer zulässig, nur daß gerade

$$\varrho = r \sin \varphi$$

ist, hängt an unseren Hypothesen. Wenn man sich also offenhält, ϱ in jedem Falle aus einer besonderen Theorie oder durch Experimente rein empirisch zu bestimmen, so ist der Ansatz $M_R = \varrho D$ immer erlaubt, auch z. B. bei Schmierreibung, wo sonst diese Betrachtungen gar nicht gelten (siehe die Literatur in Nr. 60).

144. Beispiele und Aufgaben.

Beispiel 1: Wie groß kann bei einem Hebel eine exzentrisch wirkende Kraft k sein, damit noch gerade Gleichgewicht herrscht? Der Hebel sei schwer, die Achse horizontal, der Schwerpunkt liege auf der Achse.

Man zeichne den Reibungskreis. Die drei Kräfte G, k und D müssen sich das Gleichgewicht halten, also durch einen Punkt gehen. Also ziehe man durch den Schnittpunkt S von k und G diejenige Tangente an den Reibungskreis, welche zwischen G und k liegt. Denn nur ein D in dieser Richtung kann G und k das Gleichgewicht halten. Um k und D zu finden, hat man nur im Krafteck G nach den Richtungen dieser Kräfte zu zerlegen.

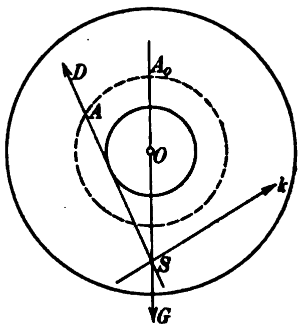


Fig. 107a.

Liegt S innerhalb des Reibungskreises, so daß keine reelle Tangente existiert, so herrscht bei beliebig großem k Gleichgewicht, denn R schneidet dann stets den Reibungskreis.

Wenn wir uns denken, daß der Hebel auf dem zylindrischen Zapfen aufsitzt, so ist A der Berührungspunkt, während es A_0 sein würde, wenn keine Reibung, also auch kein k da wäre. Der Berührungspunkt ist also im Sinne der Drehbewegung verschoben. Es verdient hervorgehoben zu werden, daß bei der Schmierreibung die Stelle der stärksten Abnutzung gerade nach der entgegengesetzten Seite verschoben ist, wie Theorie und Erfahrung ergeben.

Aufgabe 78: Man soll mit einem Winkelhebel an der Stelle A einen Druck N auf eine Fläche ausüben. Wie groß muß eine in B angreifende Kraft P sein, deren Richtung gegeben ist? (Fig. 108.)

Zapfenreibung in O werde mit berücksichtigt und zwar gerade der Grenzfall gegen eine Drehbewegung im Sinne von P.

Beispiel 2: Betrachten wir die Winde von Nr. 142 jetzt aber mit Zapfenreibung. Wir können dann V_1, H_1 resp. V_2, H_2 als Komponenten von $\overline{D}_1$ resp. $\overline{D}_2$ auffassen. Da nur ein Kräftepaar in einer Ebene senkrecht zur Achse hinzukommt, so bleiben die Gleichungen (1), (2), (4), (5) ungeändert, statt (3) dagegen bekommen wir, wenn wir den Grenzfall des Drehens im Sinne von P betrachten,

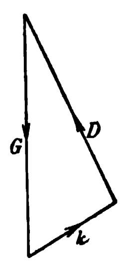


Fig. 107b.

$$aL - RP + \varrho_1 D_1 + \varrho_2 D_2 = 0, \tag{3'}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= \sqrt{H_1^2 + V_1^2}, \\ D_2 &= \sqrt{H_2^2 + V_2^2}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Man könnte jetzt aus den Gleichungen (1), (2), (4), (5) H_1, H_2, V_1, V_2 durch P ausdrücken, das Resultat in (6) und (3') einsetzen und bekäme so eine Gleichung vierten Grades in P. Wenn nun die ϱ klein sind gegen die anderen Längen, so kann man besser das folgende Näherungsverfahren einschlagen:

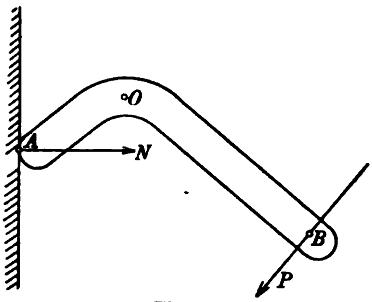


Fig. 108.

Man berechnet ein P' sowie H', V' so als ob keine Reibung da wäre, also ϱ_1, ϱ_2 Null wären.

Danach bestimmt man ein besseres P'' aus (3'), indem man für D_1 und D_2 die Werte D_1' und D_2' einsetzt, die sich nach (6) aus H', V' berechnen. Zu P'' bestimmt man dann aus (1), (2), (4), (5) die Werte H'', V'' und D_1'', D_2'' nach (6). Daraus wiederum ein besseres P''' nach (3') usw.

Unterscheidet sich P''' nicht mehr merklich von P'', so kann man den Prozeß praktisch als beendet ansehen, sonst ist er so lange fortzusetzen, bis eine merkliche Änderung des P nicht mehr eintritt.

Beweis für die Konvergenz des Verfahrens bei hinreichend kleinen ϱ:[1] Löst man (1), (2), (4), (5) auf, so bekommt man

$$\left.\begin{aligned} H_2 &= h_2 P, \\ H_1 &= h_1 P, \\ V_1 &= a_1 + b_1 P, \\ V_2 &= a_2 + b_2 P, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

wo h_1, h_2, a_1, a_2, b_1, b_2 bekannte Größen sind.

(3') gibt

$$P = \frac{a}{R} L + \frac{\varrho_1}{R} D_1 + \frac{\varrho_2}{R} D_2. \tag{3'}$$

Betrachten wir die Differenz zweier aufeinander folgender Annäherungen $P^{(\nu+1)}$ und $P^{(\nu)}$, so gibt (3')

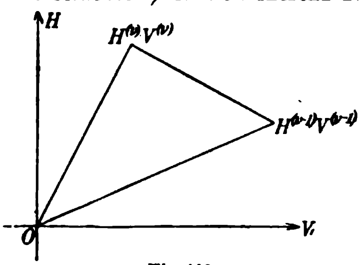


Fig. 109.

$$P^{(\nu+1)} - P^{(\nu)} = -\frac{\varrho_1}{R}\left(D_1^{(\nu)} - D_1^{(\nu-1)}\right) - \frac{\varrho_2}{R}\left(D_2^{(\nu)} - D_2^{(\nu-1)}\right). \tag{8}$$

Nun ist aber nach (6)

$$D_1^{(\nu)} - D_1^{(\nu-1)} = \sqrt{H_1^{(\nu)2} + V_1^{(\nu)2}} - \sqrt{H_1^{(\nu-1)2} + V_1^{(\nu-1)2}}$$

oder nach dem Dreieckssatz, demzufolge die Differenz zweier Seiten kleiner ist

1) Der Anfänger mag den Beweis auslassen.

als die dritte (man nehme $H_1^{(\nu)}$, $V_1^{(\nu)}$ und $H_1^{(\nu-1)}$, $V_1^{(\nu-1)}$ als orthogonale Koordinaten der Endpunkte je einer Strecke)

$$|D_1^{(\nu)} - D_1^{(\nu-1)}| \leq \sqrt{(H_1^{(\nu)} - H_1^{(\nu-1)})^2 + (V_1^{(\nu)} - V_1^{(\nu-1)})^2}.$$

Nun folgt aber aus den Gleichungen (7)

$$V_1^{(\nu)} - V_1^{(\nu-1)} = b_1(P^{(\nu)} - P^{(\nu-1)}),$$

$$H_1^{(\nu)} - H_1^{(\nu-1)} = h_1(P^{(\nu)} - P^{(\nu-1)}).$$

usw. Somit

$$|D_1^{(\nu)} - D_1^{(\nu-1)}| \leq |P^{(\nu)} - P^{(\nu-1)}| \cdot \sqrt{b_1^2 + h_1^2}$$

analog natürlich

$$|D_2^{(\nu)} - D_2^{(\nu-1)}| \leq |P^{(\nu)} - P^{(\nu-1)}| \cdot \sqrt{b_2^2 + h_2^2}.$$

Setzen wir das in (8) ein, so erhalten wir

$$|P^{(\nu+1)} - P^{(\nu)}| \leq |P^{(\nu)} - P^{(\nu-1)}| \left(\frac{\varrho_1}{R}\sqrt{b_1^2 + h_1^2} + \frac{\varrho_2}{R}\sqrt{b_2^2 + h_2^2}\right)$$

oder

$$|P^{(\nu+1)} - P^{(\nu)}| \leq |P^{(\nu)} - P^{(\nu-1)}| \cdot \sigma, \tag{9}$$

wenn zur Abkürzung

$$\sigma = \frac{\varrho_1}{R}\sqrt{b_1^2 + h_1^2} + \frac{\varrho_2}{R}\sqrt{b_2^2 + h_2^2}$$

gesetzt wird.

Multiplizieren wir die Ungleichheiten (9) von $\nu = 2$ bis zu irgendeinem ν miteinander, so bekommen wir

$$|P^{(\nu+1)} - P^{(\nu)}| < |P'' - P'| \, \sigma^{\nu-1}.$$

Wenn also $\sigma < 1$ ist, und das wird bei hinreichend kleinem ϱ der Fall sein, da ja b_1, h_1, b_2, h_2 feste Größen sind, so wird

$$\lim_{\nu=\infty} P^{(\nu+1)} - P^{(\nu)} = 0,$$

d. h. die Reihe der P konvergiert gegen einen bestimmten Wert P, und dieser ist endlich. Denn es ist

$$P = \lim_{\nu=\infty} P^{(\nu)} = P' + (P'' - P') + (P''' - P'') + \cdots,$$

also

$$|P| \leq |P'| + |P'' - P'|(1 + \sigma + \sigma^2 + \cdots) \leq |P'| + |P'' - P'| \frac{1}{1-\sigma}.$$

Und das ist endlich für

$$\sigma < 1.$$

Ebenso konvergieren wegen der vorstehenden Ungleichheiten die Reihen der H und der V.

Aber auch die Gleichungen (1), (2), (4), (5) und (3) werden erfüllt sein; denn die vier ersten bestehen ja für alle zusammengehörigen $H_1^{(\nu)}$, $V_1^{(\nu)}$, $P_1^{(\nu)}$, also auch in der Grenze $\nu = \infty$; die dritte aber besteht zwischen $P^{(\nu+1)}$ und $H^{(\nu)}$, $V^{(\nu)}$; da aber in der Grenze $\nu = \infty$, $P^{(\nu+1)}$ und $P^{(\nu)}$ nicht mehr zu unterscheiden sind, so besteht sie auch für die Grenzwerte selbst.

Beispiel 3: Der Pronysche Zaum dient dazu, ein meßbares Drehmoment auf eine rotierende Welle im entgegengesetzten Sinne der Drehung auszuüben. Er ist ein Hebel, der an dem einen Ende mit hinreichendem Druck auf die Welle aufgepreßt ist, am anderen Ende aber durch eine Kraft k, gemessen mittels eines Dynamometers, gehindert wird, der Drehung der Welle zu folgen. Wendet man den Momentensatz auf den Hebel in bezug auf die Wellenmitte an,

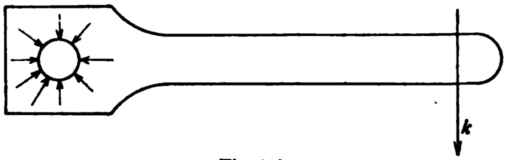


Fig. 110.

so bekommt man sofort, daß das von dem Zaum auf die Welle ausgeübte Moment gleich ka ist, wenn a den Abstand der Kraft k von der Wellenmitte bedeutet.

Aufgaben: 79. Man führe die Rechnung aus Beispiel 2 durch für die folgenden Zahlenwerte: $L = 20$ kg, $a = 20$ cm, $R = 60$ cm, $l = 1$ m, $c = 0{,}4$ m, $b = 1{,}2$ m, $\varrho_1 = \varrho_2 = 1$ cm; dann setze man einmal $\alpha = 0$ und einmal $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Wie groß ist $\sigma_{\max}$, wenn α alle Werte durchläuft?

80. Wieviel Pferdekräfte verbraucht die Reibungsarbeit in einem zylinderförmigen Lager von 300 mm Durchmesser, wenn die Belastung 15 Tonnen beträgt, $\sin\varphi = 0{,}015$ ist und die Tourenzahl 100 pro Minute beträgt?

145. Fortsetzung von Nr. 143. Kritik. Betrachten wir ein konisches Lager. Berührung finde längs einer Erzeugenden des Kegels statt. Dann ist das Moment der Reibung

$$M_R = f \cdot \int r\,dN = f \cdot N \cdot r_m,$$

wo r_m einen Mittelwert bedeutet. Was aber für einen Mittelwert, das hängt ganz von der Verteilung des Druckes ab. Es ist in der Technik vielfach Brauch, r_m gleich dem arithmetischen Mittel aus dem größten und kleinsten r zu setzen. Man kann diese Annahme auch durch gewisse Betrachtungen plausibel machen, doch kann sie keineswegs als sicher gestellte Tatsache gelten. Das Experiment gibt stark schwankende Resultate. Man findet eine Darstellung in Weisbachs Ingenieurmechanik.

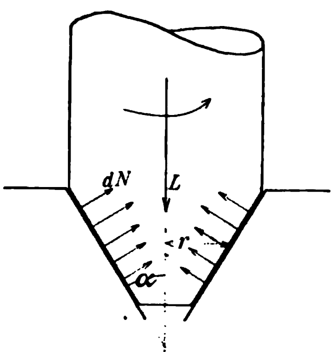


Fig. 111.

Analoges gilt für eine Welle, die in einem kegelförmigen Lager läuft, aber in Richtung der Achse belastet ist (sog. Spurlager, Fig. 111).

Ist die Belastung genau zentriert, so kann man annehmen, daß die Druckverteilung symmetrisch um die Achse erfolgt. Ist 2α der Kegelwinkel, L die Last, dN der gesamte Druck (also die Summe der Absolutwerte) auf einem ringförmigen Streifen vom Radius r, so ist zunächst

$$\int dN \sin\alpha = L,$$

also

$$N = \int dN = \frac{1}{\sin\alpha} L,$$

das Reibungsmoment aber ist

$$M_R = f \int dN r = f r_m N = f r_m \frac{1}{\sin\alpha} L.$$

Über r_m kann man auch hier nur sagen, daß es ein mittlerer Wert ist.

Das bleibt natürlich in Geltung für $\alpha = \frac{\pi}{2}$, d. h. für den Fall, daß sich die Welle mit einer ebenen Ringfläche am Ende aufstützt. Hier ist

$$M_R = f \cdot r_m L$$

(siehe Fig. 112).

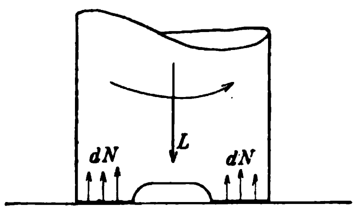


Fig. 112.

In den besprochenen Fällen ist gegen die Hypothese der Berührung längs eines Meridians der Rotationsfläche einzuwenden, daß das Lager sich abnützen und sich so der Welle anpassen und daß infolgedessen eine innigere Berührung zwischen beiden stattfinden muß. Erstreckt sich die Berührung, also auch der Druck auf einen Zentriwinkel α und ist der spezifische Druck pro Längeneinheit N, so daß

$$dN = \mathsf{N} r d\alpha$$

ist, so folgt

$$|\overline{N}| = \int_{\alpha=-\alpha_1}^{\alpha_2} \mathsf{N} r \cos\alpha\, d\alpha, \tag{1}$$

wo

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$

und

$$\int \mathsf{N} r \sin\alpha\, d\alpha = 0, \tag{2}$$

weil $\overline{N}$ die Resultierende sein soll. α ist von $\overline{N}$ aus nach einer Seite positiv gezählt. Dagegen ist das Reibungsmoment

$$M_R = f \cdot \int_{\alpha=-\alpha_1}^{\alpha_2} \mathsf{N} r^2 d\alpha. \tag{3}$$

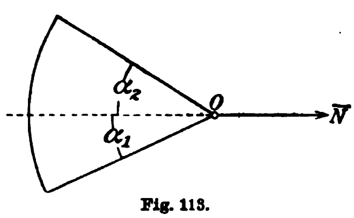


Fig. 113.

Aus (1) folgt

$$|\overline{N}| = r \cos\alpha_m \int \mathsf{N} d\alpha,$$

wo α_m ein Mittelwert ist (es wird angenommen, daß $\cos\alpha > 0$, d. h. α_1 und α_2 kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sind), also

$$M_R = f r^2 \int N d\alpha = \frac{1}{\cos\alpha_m} f r |\overline{N}|.$$

Das Reibungsmoment wird also um den nicht näher bekannten Faktor $\frac{1}{\cos\alpha_m} > 1$ größer sein als im Falle der Berührung längs eines Meridians.

Diesen Faktor $\frac{1}{\cos\alpha_m}$ hat man ebenfalls auf Grund gewisser Hypothesen zu bestimmen versucht (siehe Weisbachs Ingenieurmechanik), doch wohl noch ohne zu einem abschließenden Resultat zu kommen. Er wird vom Material und seiner Abnutzung abhängen.

146. Die Bohrreibung. Nahe verwandt mit dem dritten Falle der vorigen Nummer ist die Erscheinung der Bohrreibung. Berühren sich zwei starre Körper in einem Punkte, so hat man es dort mit einem Normaldruck und einer Reibung zu tun, und diese hätten, wenn die Voraussetzungen wirklich zuträfen, kein Moment in bezug auf die gemeinsame Normale. Tatsächlich aber werden sich beide Körper, die ja nicht wirklich starr sind, etwas abplatten und sich also längs einer etwa kreisförmigen Fläche berühren. Infolgedessen wird ein Reibungsmoment um die gemeinsame Normale auftreten wie im Falle (3) der vorigen Nummer für $\alpha = \frac{\pi}{2}$, die sogenannte Bohrreibung:

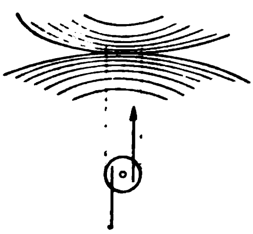


Fig. 114.

$$M_R = fNr_m,$$

wo N den Normaldruck, r_m einen mittleren Radius der Berührungsfläche, den sogenannten Radius der Bohrreibung, bedeutet. Abgesehen von einem Vorstoße von Hertz (Werke), ist es noch nicht gelungen, über r_m Gesetze aufzustellen, die mit der Erfahrung stimmen; man begnügt sich, $\varrho = f \cdot r_m$, den Koeffizienten der Bohrreibung, in jedem Falle experimentell zu bestimmen.

Übrigens ist es nicht ausgeschlossen, daß bei mangelnder Symmetrie r_m während der Rotation schwankt, oder daß sogar der Druckmittelpunkt nicht mit dem idealen Berührungspunkt zusammenfällt, sondern seine Lage wechselt. In diesem Falle werden sehr komplizierte Kraft- und Bewegungserscheinungen auftreten können, worin die Ursache für den unruhigen, polternden Lauf mancher derartigen Drehbewegung zu erblicken sein wird.

§ 31. Die Schraube.

147. Die flachgängige Schraube. Eine Schraube dient entweder dazu, bei Aufwendung einer geringen arbeitenden Kraft und langsamer Bewegung große Drucke auszuüben (Schraubenpresse) oder aber unter starkem Druck Körper in Ruhe aneinander festzuhalten. Wir betrachten zunächst eine sogenannte flachgängige Schraube, d. h. eine Schraube, deren für die Berührung zwischen Schraube und Mutter in Betracht kommende Schraubenfläche durch eine die Schraubenachse orthogonal schneidende Gerade erzeugt wird. Die Schraube sei rechts gewunden, α der Steigungswinkel des Gewindes.

Normaldruck und Reibung werden sich auf die ganze für die Berührung in Betracht kommende Schraubenfläche verteilen: wenn diese aber schmal ist, können wir für einen jeden Radius dN und dR an einer mittleren Stelle r von der Achse angreifen lassen.

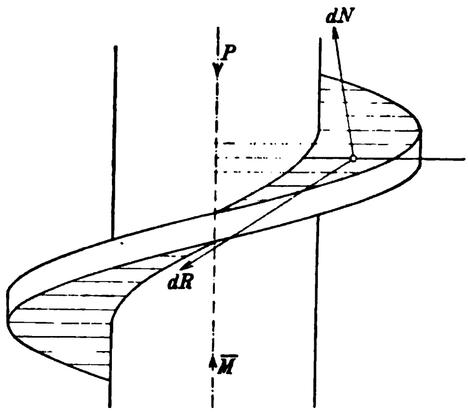


Fig. 115.

Der Druck, welchen der gepreßte Gegenstand auf die Schraube ausübe, sei P, er wirke zentrisch in der Schraubenachse.

Treibend auf die Schraube wirke ein Kräftepaar $\overline{M}$, dessen Achse in die Schraubenachse hineinfalle.

Wir wollen den Fall betrachten, daß die Schraube angezogen, daß also im Sinne von $\overline{M}$ gedreht wird; dann hat $d\overline{R}$ die in der Figur angegebene Richtung. Bei umgekehrter Bewegung kehrt $d\overline{R}$ seine Richtung um, wir werden also nur f seine Zeichen wechseln lassen müssen, um aus den Formeln des ersten Falles die des zweiten zu erhalten.

Summe der Kräfte gleich Null gibt in Richtung der Schraubenachse

$$P - \mathrm{S}(dN\cos\alpha - dR\sin\alpha) = 0$$

oder da

$$dR = f\,dN = \operatorname{tg}\varphi\, dN,$$

$$P = \frac{\cos(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi} N, \tag{1}$$

wenn $N = \mathrm{S}\, dN$ gesetzt wird.

Die Momentengleichung in bezug auf die Achse ergibt

$$M - \mathrm{S}(dNr\sin\alpha + dRr\cos\alpha) = 0$$

oder

$$M = r\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi} N. \tag{2}$$

Die anderen vier Gleichgewichtsbedingungen würden nur einiges über die Verteilung des Druckes aussagen: sie sind z. B. bei gleichmäßiger Verteilung erfüllt.

Aus (1) und (2) folgt

$$M = rP\,\mathrm{tg}(\alpha + \varphi). \tag{I}$$

Dieses Moment ist also nötig, um den Druck P bei langsamem Pressen auszuüben.

M ist um so kleiner, je kleiner α und φ sind.

Zum Losschrauben dagegen ist ein Moment nötig:

$$M = Pr\,\mathrm{tg}(\alpha - \varphi).$$

Wenn also $\varphi > \alpha$ ist, so wird $M < 0$, d. h. es ist zum Losschrauben ein Moment nötig, das im Sinne des Losschraubens wirkt. Ist aber $\varphi < \alpha$, so ist ein Moment im umgekehrten Sinne nötig, das also verhindert, daß die Schraube beschleunigt herausfliegt. Im ersten Falle wird also die Schraube von selbst halten (wenn also $\varphi > \alpha$ ist); denn in der Ruhe wird

$$M = Pr\,\mathrm{tg}(\alpha - \varphi')$$

gelten, wo

$$-\varphi \leqq \varphi' \leqq \varphi$$

ist; wenn also $\alpha < \varphi$ ist, so ist $\varphi' = \alpha$ möglich und also auch $M = 0$.

Damit also eine flachgängige Schraube selbstsperrend ist, ist notwendig und hinreichend, daß $\varphi > \alpha$ ist.

Ist also die Reibung ungünstig für die Schraubenpresse, insofern sie das erforderliche M vergrößert, so ist sie notwendig und günstig für die zum Halten dienende Schraube.

148. Die scharfgängige Schraube. Bei ihr wird die Schraubenfläche erzeugt durch eine Grade, welche die Achse unter dem spitzen Winkel $\frac{\pi}{2} - \delta$ schneidet. Der Steigungswinkel sei wieder α. Auch sonst mögen die Bezeichnungen der vorigen Nummer bleiben.

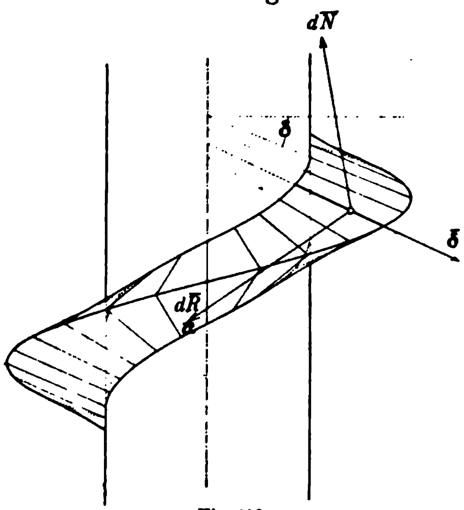


Fig. 116.

Welches sind jetzt die Winkel, welche dN und dR einmal mit der Schraubenachse und dann mit der Tangente des zugehörenden Parallelkreises einschließen? Legen wir einen Einheitsvektor $\bar{\delta}$ in die Richtung der verschraubten Geraden, einen Einheitsvektor $\bar{\alpha}$ in die Tangentenrichtung der Schraubenlinie (zugleich Richtung von $d\bar{R}$), so hat $\bar{N}$ die Richtung von $\overline{\alpha\delta}$.

Es haben aber nach einem Koordinatensystem, dessen erste Achse tangential an den Parallelkreis, dessen zweite Achse radial nach außen, dessen dritte Achse mit der Schraubenachse zusammenfällt, $\bar{\alpha}$ die Komponenten $\cos\alpha$, 0, $-\sin\alpha$, $\bar{\delta}$ die Komponenten 0, $\cos\vartheta$, $-\sin\vartheta$, mithin hat $\overline{\alpha\delta}$ die Komponenten $\sin\alpha\cos\delta$, $\cos\alpha\sin\delta$, $\cos\alpha\cos\delta$.

Jetzt aber kann man die Gleichgewichtsbedingungen sofort hinschreiben:

$$-P + \mathrm{S}(dN\cos\alpha\cos\delta - dR\sin\alpha) = 0$$

und

$$M - \mathrm{S}(dNr\sin\alpha\cos\delta + dRr\cos\alpha) = 0.$$

Setzen wir noch

$$f' \equiv \operatorname{tg}\varphi' = \frac{1}{\cos\delta} f,$$

so daß also

$$\varphi' > \varphi$$

ist, so wird

$$P = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi'}\cos(\alpha + \varphi')N,$$

$$M = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi'} r\sin(\alpha + \varphi')N,$$

also

$$M = rP\operatorname{tg}(\alpha + \varphi').$$

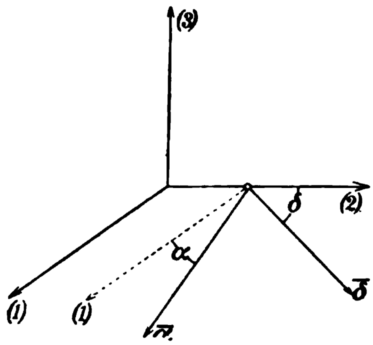


Fig. 117.

Die scharfgängige Schraube wirkt also wie eine flachgängige Schraube von größerem Reibungskoeffizienten:

Will man also bei langsamer Bewegung einen starken Druck ausüben, so wird man eine flachgängige Schraube nehmen, soll aber die Schraube dazu dienen, in der Ruhe von selbst zu halten, so ist eine scharfgängige Schraube vorzuziehen.

Aufgabe 81: Man stelle die Gleichungen für eine Schraube auf, wenn man noch an der Vorderfläche, wo der Druck P ausgeübt wird, die dort auftretende Reibung mitberücksichtigt (siehe Nr. 145).

149. Der Wirkungsgrad einer Maschine. Bei allen solchen einfachen Maschinen wie Hebeln, Winden, Schrauben, aber auch bei größern, wie Dampfmaschinen, hat man es gewöhnlich mit eingeprägten Kräften zu tun, welche die Maschine antreiben, z. B. dem Kräftepaar M bei der Schraube, der Kraft P bei der Winde (siehe Nr 145 und 142), und die positive Arbeit leisten, dann weiter mit eingeprägten Kräften, welche man beabsichtigt, die aber Arbeit aus der Maschine entnehmen, wie z. B. der Druck P der Schraube, die Last L bei der Winde, und die man Nutzkräfte nennt, endlich außer den Reaktionskräften noch eingeprägte Kräfte (Reibungen usw.), welche Arbeit verzehren, ohne daß dies im Zwecke der Maschine läge. Sei A_e die Arbeit der erstgenannten Gruppe, die sogenante effektive Arbeit, $-A_n$

die Arbeit der Nutzkräfte ($A_n > 0$), $-A_v$ die Arbeit der dritten Gruppe von eingeprägten Kräften, so werden wir im dritten Abschnitt allgemein beweisen, daß

$$A_e = A_n + A_v,$$

also

$$A_n < A_e,$$

die Nutzarbeit kleiner als die effektive Arbeit ist. Der echte Bruch $\eta = \frac{A_n}{A_e}$ heißt der **Wirkungsgrad der Maschine**.

Wir wollen den Wirkungsgrad für Winde und Schraube berechnen.

Dreht sich die **Winde** um den Winkel $d\vartheta$, so leistet P die Arbeit

$$PRd\vartheta,$$

denn $Rd\vartheta$ ist der Weg von P, L dagegen leistet die Arbeit

$$-Lad\vartheta.$$

Also ist

$$\eta = \frac{La}{PR}.$$

Wenn keine Zapfenreibung da wäre, ergäbe sich $\eta = 1$; da aber in Wahrheit stets Zapfenreibung vorhanden ist, und nach Gleichung (3') in Nr. 144

$$PR = La + \varrho_1 D_1 + \varrho_2 D_2,$$

so ist

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{\varrho_1 D_1 + \varrho_2 D_2}{La}} < 1.$$

Hat man die P, H, V berechnet, so kennt man nach (6) (Nr. 144) auch die D und kann also η wirklich berechnen.

Dreht sich die **Schraube** um den Winkel $d\vartheta$, so verschiebt sie sich dabei um die Strecke

$$rd\vartheta \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Der Druck P leistet also die Arbeit

$$-Prd\vartheta \operatorname{tg}\alpha.$$

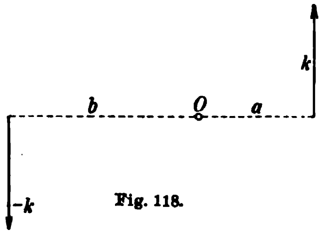


Fig. 118.

Wir wollen nun zeigen, daß das Kräftepaar die Arbeit

$$Md\vartheta$$

leistet.

Bestehe M aus den Kräften k und $-k$ in den Abständen a und b von der Achse, so ist die Gesamtarbeit

$$akd\vartheta + bkd\vartheta = (a+b)kd\vartheta = Md\vartheta,$$

w. z. b. w.

Also ist $Md\vartheta$ die effektive Arbeit. Und somit der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{Pr \operatorname{tg} \alpha}{M} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} < 1.$$

Für den reibungsfreien Fall ($\varphi = 0$) wäre er wieder gleich 1.

Aufgabe 82: Bei einer scharfgängigen Schraube sei $\vartheta = 60^\circ$, der Durchmesser der Schraube 2 cm, $f = 0{,}3$; auf 1 cm Länge mögen acht Windungen fallen. Wie groß ist der Wirkungsgrad der Schraube?

150. Literatur zur technischen Statik und zur technischen Mechanik überhaupt. Die in § 30 und § 31 behandelten Aufgaben gehören in ein Gebiet, das man am besten als technische Statik bezeichnen könnte. Wir haben nur eine kleine Zahl von Aufgaben behandelt, da dieses Gebiet in anderen Lehrbüchern gewöhnlich ausführlich behandelt wird. Die zugehörenden Probleme bilden den Hauptgegenstand aller älteren Statiken, von Varignons Projet angefangen bis auf Poinsots treffliche Statik (1803). Was die technischen Anwendungen der Mechanik überhaupt angeht, so sind die großen Förderer der allgemeinen Mechanik im 18. Jahrhundert (Euler, die Bernouilli) auch stets in den Anwendungen die Wegweiser. Um 1800 bildet sich dann an den von Napoleon gegründeten Ecoles polytechniques in Frankreich eine Schule heran, die besonders die Anwendungen pflegt. Ihr Haupt ist Poncelet, andere Namen sind: Coulomb, Morin, Hachette, Coriolis. Die Erscheinungen der Reibung und des Stoßes werden besonders untersucht, als Begriff tritt der Arbeitsbegriff hervor, dessen Name damals zuerst auftaucht. In Deutschland kann Redtenbacher für die Mitte des 19. Jahrhunderts als Hauptvertreter dieser Richtung genannt werden („Prinzipien der Mechanik", „Resultate für den Maschinenbau" (enthält vor allem eine Menge wertvollen empirischen Materials); „Gesetze des Lokomotivbaues", ein Werk, dessen mechanischer Teil noch heute Beachtung verdient). Von älteren Werken des 19. Jahrhunderts seien noch genannt: Grashof: Theoretische Maschinenlehre; A. Ritter, Technische Mechanik.

Von neueren Werken kann ganz besonders die 1908 bei Teubner deutsch erschienene „Angewandte Mechanik" des Engländers J. Perry dem jungen Techniker warm empfohlen werden. Selbstverständlich ist als modernstes und umfassendstes Werk dieser Art: Föppl, Technische Mechanik zu nennen.

Kapitel VII.

Statik der Systeme.

§ 32. Systeme aus einer endlichen Anzahl starrer Körper.

151. Die allgemeine (synthetische) Methode. Wir betrachten ein System, das aus einer endlichen Anzahl sich gegenseitig berührender starrer Körper besteht und das außerdem durch starre Stützflächen getragen wird, die ruhen. Man kann sich etwa vorstellen, daß diese Stützflächen mit der Erde fest verbunden seien, die wir für fast alle praktischen Probleme als ruhend ansehen dürfen. Den Einfluß ihrer Drehung werden wir später (§ 51) untersuchen.

Die Gleichgewichtsbedingungen des Systems sind klar: Das System wird im Gleichgewicht sein, wenn jeder seiner Körper es ist, d. h. wenn für jeden Körper die Summe der Kräfte und die Summe der Kraftmomente verschwindet, wobei die Kräfte zu nehmen sind, die für ihn äußere Kräfte sind, d. h. die räumlich verteilten Kräfte und die an seiner Oberfläche angreifenden Drucke.

Ferner sehen wir für diese Drucke zwischen je zwei Körpern die lex tertia, d. h. die Gleichheit von Druck und Gegendruck als richtig an; wenn wir auch erst später (Nr. 204) diesen Satz beweisen werden.

Man kann ihn übrigens schon jetzt, soweit er für die Statik wirklich von Belang ist, durch das sogenannte Erstarrungsprinzip ersetzen, das da lautet:

Damit ein System aus starren Körpern im Gleichgewicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß jeder Teil des Systems es ist, wenn man ihn als starr auffaßt und nur die für diesen Teil äußeren Kräfte in Betracht zieht. D. h. wenn man für den herausgegriffenen Teil die Summe der äußeren Kräfte und die Summe ihrer Momente gleich Null setzt.

Zunächst folgt dieser Satz aus den vorhin angegebenen Prinzipien:

Es seien die Körper mit $I, II, \ldots, [n]$ numeriert, die auf den $[\nu]$ten Körper wirkenden Kräfte, die äußere Kräfte des ganzen Systems sind, mögen die Kraftsumme $\overline{K}_{[\nu]}$, die Momentensumme $\overline{M}_{[\nu]}$ haben, die Kräfte, welche der $[\nu]$te Körper vom $[\lambda]$ten erfährt, mögen die Kraftsumme $\overline{r}_{\nu,\lambda}$, die Momentensumme $\overline{R}_{\nu,\lambda}$ haben. Dann ist nach dem Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung

$$\overline{r}_{\nu,\lambda} = -\overline{r}_{\lambda,\nu}, \tag{a}$$

weil die einzelnen Kräfte entgegengesetzt gleich sind, also auch ihre Summen, aber auch

$$\overline{R}_{\nu,\lambda} = -\overline{R}_{\lambda,\nu}, \tag{b}$$

weil die entgegengesetzt gleichen Kräfte dieselben Angriffspunkte, also auch entgegengesetzt gleiche Momente haben.

Nun lauten die Gleichgewichtsbedingungen für den νten Körper

$$\overline{K}_\nu + \sum_\lambda \bar{r}_{\nu,\lambda} = 0 \tag{A}$$

und

$$\overline{M}_\nu + \sum_\nu \overline{R}_{\nu,\lambda} = 0. \tag{B}$$

Addieren wir von diesen r Gleichungen (A) diejenigen, die sich auf ein herausgegriffenes Teilsystem beziehen, etwa auf den νten, $\nu + 1, \ldots$ bis $(\nu + \mu)$ten, so heben sich wegen (a) alle Zwischenwirkungen $\bar{r}_{\nu,\nu+1}$, usw. auf und es bleibt eine Gleichung

$$\overline{K}_\nu + \cdots + \overline{K}_{\nu+\mu} + \sum_{\lambda=1,\nu;\,\nu+\mu+1\ldots} \sum_{\sigma=\nu\ldots\nu+\mu} \bar{r}_{\sigma,\lambda} = 0,$$

in der nur mehr die für das Teilsystem **äußeren Kräfte** vorkommen.

Das analoge gilt für die Gleichungen (B). Damit ist das Erstarrungsprinzip als notwendig erwiesen. Es ist aber auch hinreichend: denn für den einzelnen starren Körper, den νten, gibt es die Gleichungen (A) und (B), für zwei Körper aber, etwa den νten und λten zusammen gibt es

$$\overline{K}_\nu + \overline{K}_\lambda + {}'' \sum_\sigma \bar{r}_{\nu,\sigma} + {}'' \sum_\sigma \bar{r}_{\lambda,\sigma} = 0 \tag{C}$$

wobei die zwei Striche vor $\sum$ andeuten sollen, daß σ über alle Indizes läuft mit Ausnahme von ν und λ.

Zieht man nun (C) von der Summe der Gleichungen (A) für ν und λ ab, so bleibt

$$\bar{r}_{\nu,\lambda} + \bar{r}_{\lambda,\nu} = 0 \tag{a}$$

übrig. Ebenso beweist man

$$\overline{R}_{\nu,\lambda} + \overline{R}_{\lambda,\nu} = 0. \tag{b}$$

Das ist zwar noch nicht die ganze lex tertia, aber doch so viel von ihr, als für starre Körper in Frage kommt, für die ja Kräftesysteme gleichwertig sind, welche gleiche Kraftsumme und gleiche Momentensumme haben.

Wir werden übrigens später (Nr. 204) sehen, wie aus dem allgemeinen Erstarrungsprinzip (für beliebige Systeme) die ganze lex tertia folgt. Und noch etwas mehr.

152. Der Gelenkträger. Man denke sich zwei Körper, die man als starr ansehen darf, etwa zwei Teile einer eisernen Brücke, die durch eine horizontale Achse miteinander drehbar verbunden und durch je eine parallele Achse auf die Erde gestützt seien. Das Ganze wird unbeweglich sein. Man soll die Stützdrucke in den drei Drehachsen A, B, C berechnen, wenn die anderen äußeren Kräfte eines jeden Teils eine gegebene Resultierende $\bar{k}_1$ bzw. $\bar{k}_2$ in einer Ebene senkrecht zu den Achsen haben. Bei vertikaler Belastung wird das ja z. B. der Fall sein. Symmetrie wird keineswegs vorausgesetzt.

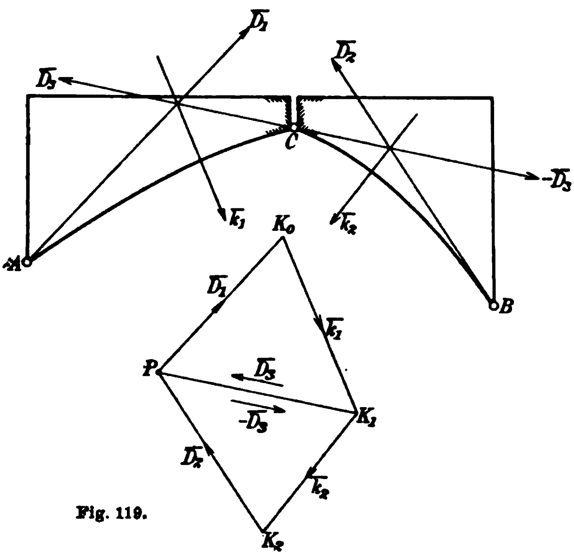


Fig. 119.

Seien die Drucke in A, B, C mit $\bar{D}_1$, $\bar{D}_2$, $\bar{D}_3$ bezeichnet, so daß $\bar{D}_3$ vom zweiten auf den ersten Teil wirkt, also $-\bar{D}_3$ vom ersten auf den zweiten, so müssen

1. $\bar{D}_1, \bar{k}_1, \bar{D}_3$ durch einen Punkt gehen und ihre Vektoren ein geschlossenes Dreieck bilden,

2. $\bar{D}_2, \bar{k}_2, -\bar{D}_3$ dasselbe tun.

Die Lösung des Problems führt demnach auf folgende Aufgabe: Nachdem aus $\bar{k}_1$ und $\bar{k}_2$ ein Krafteck ($K_0 K_1 K_2$) gezeichnet ist, soll man einen Punkt P finden — es wird dann $\overline{PK_0} = \bar{D}_1$, $\overline{K_1 P} = \bar{D}_3$, $\overline{K_2 P} = \bar{D}_2$ werden —, daß man Parallele zu PK_0 durch A, zu PK_1 durch C, zu PK_2 durch B legen kann, so daß diese Parallelen sich auf der Angriffsgeraden $\bar{k}_1$ bzw. $\bar{k}_2$ schneiden.

Das ist aber die alte Culmannsche Aufgabe: man soll zu den Kräften $\bar{k}_1, \bar{k}_2$ ein Seileck so konstruieren, daß es durch die gegebenen Punkte A, B, C hindurchgeht. (Man braucht ja nur P als Pol des Kraftecks aufzufassen und die Identität beider Aufgaben leuchtet ein.) Letztere Aufgabe ist aber bereits in Nr. 120 gelöst worden, das neue Problem kann also auch als erledigt gelten.

Wir wollen das Problem noch rechnerisch behandeln. Man kann AB horizontal zeichnen. Sei $AC = l_1$, $CB = l_2$ $\sphericalangle CAB = \vartheta_1$, $\sphericalangle CBA = \vartheta_2$, seien ferner H_1, H_2, H_3 die Horizontalkomponenten, V_1, V_2, V_3 die Vertikalkomponenten von $\bar{D}_1, \bar{D}_2, \bar{D}_3$, α_1, α_2 die Winkel, welche $\bar{k}_1$ bzw. $\bar{k}_2$ mit der Vertikalen einschließen, während a_1, a_2 ihre Angriffspunkte auf AC bzw. BC angeben, so ergeben zuerst die Momentengleichungen für das ganze System mit A bzw. B als Bezugspunkt

$$\begin{aligned}-k_1\cos\alpha_1\, a_1\cos\vartheta_1 - k_1\sin\alpha_1\, a_1\sin\vartheta_1 - k_2\cos\alpha_2\,(l_1\cos\vartheta_1 + (l_2 - a_2)\cos\vartheta_2)\\ - k_2\sin\alpha_2\cdot a_2\sin\vartheta_2 + V_2\,(l_1\cos\vartheta_1 + l_2\cos\vartheta_2) = 0,\end{aligned} \qquad (1)$$

und

$$k_1 \cos\alpha_1 (l_2 \cos\vartheta_2 + (l_1 - a_1)\cos\vartheta_1) - k_1 \sin\alpha_1\, a_1 \sin\vartheta_1 + k_2 \cos\alpha_2 \cdot a_2 \cos\vartheta_2 \\ - k_2 \sin\alpha_2\, a_2 \sin\vartheta_2 - V_1 (l_1 \cos\vartheta_1 + l_2 \cos\vartheta_2) = 0, \tag{2}$$

woraus man sofort V_1 und V_2 berechnen kann

Setzt man noch für das ganze die Summe der horizontalen Kräfte gleich Null, so bekommt man

$$H_1 + H_2 + k_1 \sin\alpha_1 + k_2 \sin\alpha_2 = 0. \tag{3}$$

H_1 findet man, nachdem schon V_1 bekannt ist, indem man für den linken Teil die Momentengleichung in bezug auf (C) ansetzt:

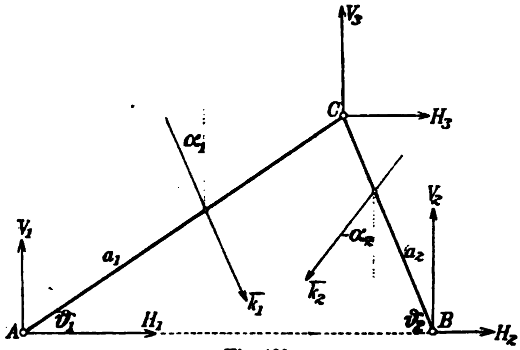


Fig. 120.

$$H_1 l_1 \sin\vartheta_1 - V_1 l_1 \cos\vartheta_1 + k_1 \cos\alpha_1 (l_1 - a_1)\cos\vartheta_1 + k_1 \sin\alpha_1 (l - a_1)\sin\vartheta_1 = 0. \tag{4}$$

H_2 berechnet sich dann aus (3).

Endlich folgen H_3 und V_3, wenn man für einen Teil, etwa den linken, die Summe der horizontalen und vertikalen Kräfte gleich Null setzt:

$$H_1 + H_3 + k_1 \sin\alpha_1 = 0, \tag{5}$$

$$V_1 + V_3 - k_1 \cos\alpha_1 = 0. \tag{6}$$

Die Aufgabe ist damit gelöst.

Die anderen Gleichgewichtsbedingungen geben nichts neues mehr. Denn da wir ein ebenes Problem mit zwei starren Körpern haben, so gibt es sechs unabhängige Bedingungsgleichungen.

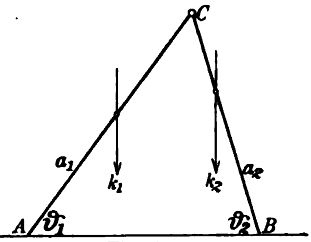


Fig. 121.

Aufgabe 83: Eine sogenannte Bockleiter, bestehend aus zwei um die horizontale Achse C reibungsfrei drehbaren starren Körpern, stütze sich in den Punkten A und B auf eine horizontale Ebene mit dem Reibungskoeffizienten f. Die Belastung der beiden Teile sei vertikal, wie in der Figur angegeben. Wann wird Gleichgewicht herrschen und wie groß werden die Druckkräfte in A, B, C sein? Man wird zwei Ungleichheitsbedingungen für den allein freien Winkel ϑ_1 erhalten; man hat natürlich die schärfere zu befriedigen. Welche ist das?

153. Die Brückenwage hat nicht nur den Zweck, die Wägung großer Massen mit kleinen Gewichten zu ermöglichen, sondern auch zu bewirken, daß die Wägung unabhängig wird von der Stelle, an der man die Last aufsetzt.

Die Wage besteht aus zwei Hebeln AOC und EO', welche durch die vertikale Stange CE verbunden sind. O, O' sind feste horizontale Drehachsen. Die eigentliche Lastbrücke DF hängt einmal vermittels der vertikalen Stange DB direkt an dem ersten Hebel und stützt sich anderseits in F auf den zweiten Hebel.

Die Wage sei an sich im Gleichgewicht.

Wir zerlegen nun L in zwei Komponenten $\frac{x}{l} L$ und $\frac{l-x}{l} L$, die erstere wird in F auf den Hebel EO' übertragen und veranlaßt in EC eine Spannung

$\frac{x}{l} L \frac{h}{e}$; die zweite wird direkt durch die Stange DB auf den ersten Hebel übertragen.

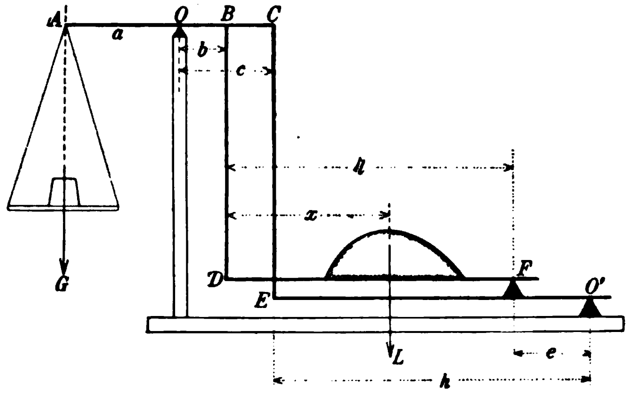


Fig. 122.

Damit der erste Hebel im Gleichgewicht sei, muß nach dem Hebelgesetz sein

$$G a = \frac{x}{l} L \frac{h}{e} c + \frac{l-x}{l} L b = \frac{x}{l} L \left(\frac{h}{e} c - b\right) + L \cdot b.$$

Damit nun G von x unabhängig werde, muß der Faktor von x in der vorstehenden Gleichung verschwinden: d. h.

$$\frac{h}{e} c - b = 0$$

sein oder

$$h : e = b : c$$

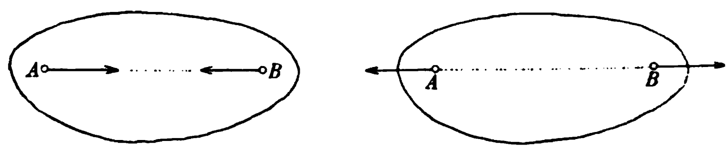
sein. Danach ist die Wage zu konstruieren. Es wird dann

$$G a = L \cdot b.$$

Für eine Dezimalwage muß also $b : a = 1 : 10$ sein.

Wir haben vorhin gesagt: „daß eine Kraft durch eine Stange, nämlich DB übertragen werde". Man muß mit solchen Ausdrücken vorsichtig sein. Warum ist er hier erlaubt?

Betrachten wir den starren Körper DB, so dürfen wir ihn als gewichtslos ansehen, da wir vorausgesetzt haben, daß die Gewichte



Druck. Fig. 123. Zug.

der Wage selbst ausgeglichen seien. Dann steht DB nur noch unter der Wirkung des Lagerdrucks in B und der des Lagerdrucks in D. Steht aber ein starrer Körper unter der Einwirkung von nur zwei

Kräften, so müssen diese im Gleichgewichtsfalle entgegengesetzt gleich sein und in die Verbindungslinie der Angriffspunkte hineinfallen. Also können wir sagen, daß der vertikale Lagerdruck in D ungeändert auf B übertragen werde.

Allgemein können wir den für das folgende wichtigen Satz aussprechen:

Ist ein starrer Körper keinen anderen äußeren Kräften unterworfen als den Drucken in zwei zu einander parallelen zylindrischen und reibungsfreien Achsen A und B, so müssen diese Drucke in eine Verbindungslinie AB hineinfallen, welche auf den Achsen senkrecht steht.

Sind die beiden Kräfte aufeinander zu gerichtet, so werden wir von Druck in engerem Sinne sprechen, sonst von Zug.

154. Das Stabpolygon. Betrachten wir das alte Varignonsche Problem: ein Polygon aus n Stäben, die durch zylindrische, reibungsfreie parallele Gelenke miteinander verbunden sind. An den Gelenken — etwa an zylindrischen Zapfen, welche die Stäbe verbinden — mögen gegebene Kräfte $\bar{k}_1 \ldots \bar{k}_{n-1}$ angreifen, sonst aber sei das Polygon kräftefrei. Man soll die Gleichgewichtslage bestimmen und die Lagerreaktionen, wenn die Enden des Polygons sich um feste gegebene Achsen S_0 und S_n drehen können.

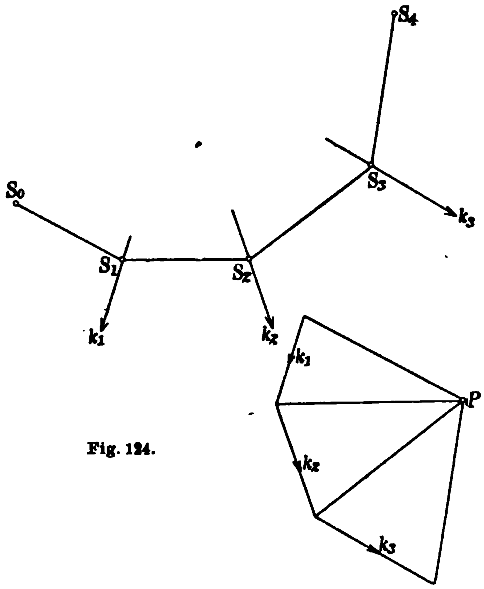


Fig. 124.

Wenn man bedenkt, daß auf den νten Gelenkzapfen die drei Kräfte $\bar{k}_\nu$ und die Spannungen der beiden angrenzenden Stäbe wirken, welche nach dem Satz am Schlusse der vorhergehenden Nummer in die Stabrichtungen hineinfallen, und daß also diese drei Kräfte ein geschlossenes Dreieck bilden müssen, daß ferner diese Dreiecke sich nebeneinander legen müssen, weil jede Stabspannung zweimal vorkommt, so erkennt man die Analogie dieses Problems mit der Seilkonstruktion, worauf wir schon früher einmal (Nr. 118) hinwiesen.

Die Aufgabe ist somit auf die folgende zurückgeführt: Man zeichne das Krafteck aus den Kräften $\bar{k}_1 \ldots \bar{k}_n$. Dazu wird ein Pol P

so gesucht, daß, wenn man anfängt, die Stäbe von S_0 aus den Polstrahlen parallel zu legen, man gerade in S_n auskommt.

Diese Aufgabe führt nun auf ein kompliziertes algebraisches Problem, auch die elementare graphische Lösung ist im allgemeinen nicht möglich.

A. Jatho hat ein Näherungsverfahren angegeben, daß darin besteht, daß man zunächst durch Probieren die ungefähre Lage von P sucht und dann mit Hilfe von Rechnung und Zeichnung korrigiert. (Siehe den Aufsatz: „Untersuchungen zur Statik des Stabpolygons", Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 56.)

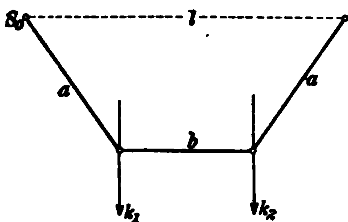


Fig. 125.

Aufgabe 84: In einigen Fällen kann man natürlich das Problem mit ganz elementaren, rechnerischen Mitteln lösen. Es sei z. B. $a = 3$, der erste Stab gleich dem dritten, $k_1 = k_2$ und senkrecht zu $S_0 S_3$.

In diesem Falle voller Symmetrie bestimme man die Stabspannungen rechnerisch und graphisch.

155. Statik des Schubkurbelgetriebes. Ein Schubkurbelgetriebe, wie es bei Dampfmaschinen vorkommt, besteht der Hauptsache nach aus drei festen Teilen: 1. dem rein rotierenden Teil: (Welle, Kurbel, Schwungrad) O sei die Drehachse, OC der Kurbelarm; 2. dem hin- und hergehenden Kolben (FH) nebst Kolbenstange KA und Kreuzkopf K. 3. Der Lenkstange, welche im Kurbelzapfen C mit der Kurbel, im Kreuzkopfzapfen K mit dem Kolben drehbar verbunden sei. Die Kolbenstange KA sei so geführt, daß sie in ihrer Verlängerung durch die Wellenmitte O hindurch gehe.

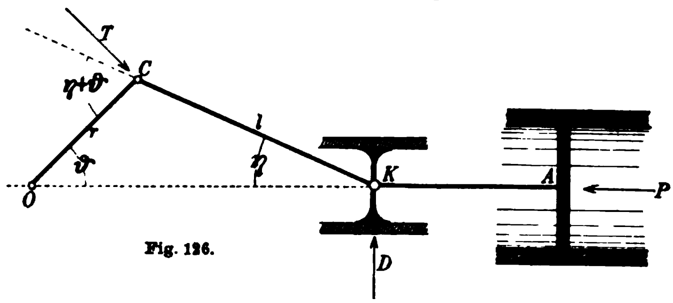


Fig. 126.

Es sei r die Länge des Kurbelarms, l die Länge der Lenkstange; $\sphericalangle\, KOC$ der (variable) Kurbelwinkel; $\sphericalangle\, CKO$ ein Hilfswinkel η.

Der Sinussatz gibt sofort

$$\sin\eta = \sin\vartheta \cdot \frac{r}{l} \cdot$$

Es wirke nun senkrecht zum Kolben konzentrisch, d. h. in der Linie AKO eine Kraft P. Welche Kraft T senkrecht zum Kurbelarm hält ihr das Gleichgewicht? Sonst sollen keine Kräfte, außer den notwendigen Druckkräften wirken.

Im Kreuzkopf K greifen drei Kräfte an: P horizontal — nennen wir OKA horizontal — der Druck der Führung vertikal, die Schubstangenspannung S in deren Richtung (siehe die Bemerkung in Nr. 153). Also ist

$$S \cos\eta = P,$$

$$S \sin\eta = D,$$

d. h.

$$S = \frac{1}{\cos\eta} P, \quad D = P \operatorname{tg}\eta.$$

Auf die rein rotierenden Teile als Hebel wirken jetzt S in Richtung der Schubstange und T senkrecht zu OC. S hat den Hebelarm $r \sin(\vartheta + \eta)$. Also ist

$$Sr \sin(\vartheta + \eta) = Tr$$

oder

$$T = S \sin(\vartheta + \eta) = \frac{\sin(\vartheta + \eta)}{\cos\eta} P.$$

Daraus folgt natürlich, daß am Schubkurbelgetriebe, mögen sonst noch irgendwelche Kräfte vorhanden sein oder nicht, eine Kraft P am Kolben einer Kraft T senkrecht zum Kurbelarm (oder tangential zum sogenannten Kurbelkreis, der Kreisbahn des Punktes C) gleichwertig ist, welche die umgekehrte Richtung wie in der Figur hat und gleich

$$T = P \frac{\sin(\vartheta + \eta)}{\cos\eta}$$

ist. Ist P der resultierende Dampfdruck, so heißt das äquivalente T der **Tangentialdampfdruck**.

Man kann sich T aus P zu jeder Stellung ϑ leicht graphisch konstruieren:

Man trage vom Schnittpunkte S des Kurbelarms OC mit der Senkrechten zu OK in K auf SC eine Strecke SA gleich P ab und ziehe durch A die Parallele AB zur Lenkstange. SB gibt dann T. Denn die Ähnlichkeit der Dreiecke SAB und SCK gibt sofort

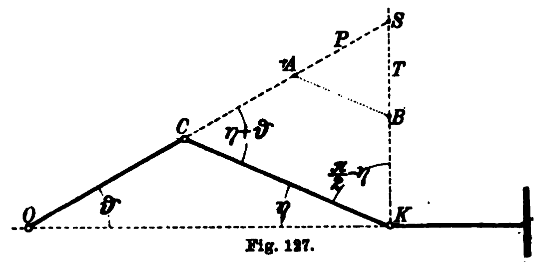


Fig. 127.

$$P : SB = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right) : \sin(\eta + \vartheta),$$

d. h.

$$SB = P \frac{\sin(\eta + \vartheta)}{\cos\eta} = T.$$

Aufgabe 85. Man berechne bei der Kniepresse den durch die Kraft P ausgeübten Druck D. O ein fester Gelenkpunkt, $OA = a$; B, C Gelenkpunkte, $OB = b$, $BC = l$. Der Kolben CH sei vertikal geführt. Alle Gelenke und alle Führungen seien reibungsfrei. P drücke senkrecht zu OA (Fig. 128.)

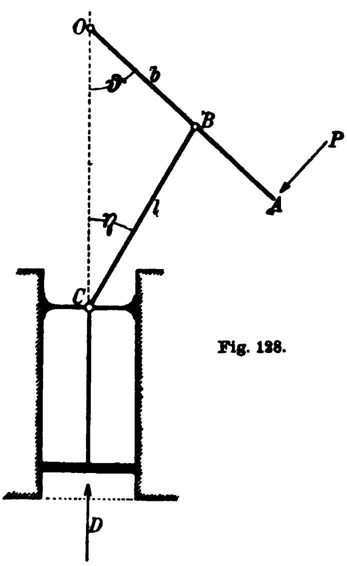


Fig. 128.

156. Die innere Beanspruchung eines starren Körpers. Wir haben früher in § 9 und 10 die Anschauung ausgesprochen, daß überall in der materiellen Natur, d. h. an jedem Flächenelement dF die sich dort berührenden Volumelemente Drucke $d\bar{k} = \bar{\sigma} dF$ aufeinander ausüben. Führen wir also durch einen starren Körper in Gedanken einen Schnitt, der den Körper in zwei Teile I und II teilt, so empfängt I an jeder Stelle dF der Schnittfläche von II einen Druck $d\bar{k} = \bar{\sigma} dF$.

Wir nannten schon früher (siehe Nr. 39) die Normalkomponente einen Druck im engeren Sinne, wenn sie auf I zugerichtet war, sonst einen Zug, die Tangentialkomponente hingegen einen Schub oder eine Scherkraft.

Es liegt nun die Auffassung nahe, uns den Körper wirklich aus zwei Teilen I und II bestehend zu denken — jeder von ihnen ist natürlich wieder starr — und den Satz auszusprechen, daß der Zusammenhang beider Teile eben durch die Spannungen $\bar{\sigma} dF$ an der Trennungsfläche aufrecht erhalten wird. Das ist selbstverständlich; denn was wir Körper nennen, ist immer ein bis zu einem gewissen Grade willkürlicher Ausschnitt aus der Natur.

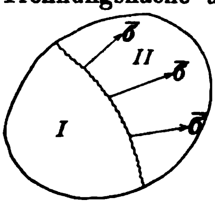


Fig. 129.

Soll Gleichgewicht herrschen, so muß natürlich für jeden Teil die Gleichgewichtsbedingung des starren Körpers erfüllt sein, wobei die Schnittreaktionen (Spannungen) $\bar{\sigma} dF$ an der Trennungsfläche für jeden Teil zu den äußeren Kräften hinzuzuzählen sind.

So kommen wir zu folgendem Grundsatz (dem sogenannten Schnittprinzip).

Im Gleichgewichtsfalle muß für jeden Teil eines starren Körpers die Summe der Kräfte und die Summe der Kraftmomente verschwinden, wobei aber alle für den Teil äußern Kräfte in Betracht zu ziehen sind, also auch die Spannungen an der Fläche, welche den Teil von den anderen Teilen trennt.

Nach diesem Grundsatz haben wir die Möglichkeit, etwas über die inneren Spannungen eines starren Körpers zu erfahren. Freilich können wir für eine Schnittfläche immer höchstens die Summe der Spannungen und die Summe ihrer Momente erfahren. Denn mehr Gleichungen als die sechs Gleichgewichtsbedingungen des starren Körpers haben wir ja nicht zur Verfügung.

Die sechs Gleichungen für den zweiten Teil geben nichts neues, denn wie in Nr. 151 ausgeführt, geben sie zu den sechs Gleichungen des ersten Teils hinzugefügt die sechs Bedingungsgleichungen für den ganzen Körper, in denen die inneren Spannungen gar nicht mehr vorkommen. Von den 18 Gleichungen des ganzen Körpers und seiner beiden Teile sind immer nur 12 unabhängig und nur sechs davon bilden unabhängige Aussagen über die inneren Spannungen.

157. Zug, Druck, Schub, Torsions- und Biegungsmoment. Haben wir nun einen Körper mit einer ausgezeichneten Achse, z. B. einen Balken, Stab usw., und legen wir eine ebene Schnittfläche senkrecht zu der Achse, so können wir in bezug auf den Schnittpunkt O der Ebene mit der Achse die an dieser ebenen Schnittfläche auftretenden Spannungen für jeden Teil reduzieren. Nach den allgemeinen Sätzen über die Kräftereduktion (siehe Nr. 124) wird eine Einzelkraft und ein Kräftepaar herauskommen. Die Komponente der Einzelkraft senkrecht zum Schnitt nennen wir nun den resultierenden Zug oder Druck, je nachdem sie von dem betrachteten Teile weggerichtet ist oder nicht. Die Komponente parallel zur Schnittfläche heiße der resultierende Schub oder die Scherkraft. Die Komponente des Moments senkrecht zur Fläche, also ein Kräftepaar in der Ebene soll Torsionsmoment heißen, die Komponente des Moments in der Ebene dagegen Biegungsmoment.

Nach unserem Schnittprinzip wird nun der resultierende Zug gleich der negativen Summe aller anderen auf den Balkenteil senkrecht zum Schnitt wirkenden Kräfte sein, denn die Summe aller äußeren Kräfte soll Null sein; ebenso der Schub gleich der negativen Summe aller anderen parallel zur Schnittfläche wirkenden Kräfte; das Torsionsmoment gleich dem negativen Moment der andern Kräfte in bezug auf die ausgezeichnete Achse und das Biegungsmoment entgegengesetzt gleich derjenigen Komponente des Momentes der andern Kräfte, welche in die Schnittebene hineinfällt.

Betrachten wir als Beispiel einen horizontal gelagerten, vertikal belasteten Balken. An einer Stelle s vom linken Auflager entfernt, machen wir einen vertikalen Schnitt. Ein resultierender Zug (oder Druck) wird nicht da sein. Wohl dagegen ein (aufwärts positiv gerechneter) Schub (auf den links vom Schnitt liegenden Teil), welcher gleich sein wird der Summe aller links von O liegenden Kräfte mit Einschluß der Auflagerreaktionen, diese Kräfte abwärts positiv gerechnet:

$$V = \int_0^z \varkappa\, dx - R_1,$$

wenn $\varkappa$ die spezifische Belastung ist (vgl. Nr. 137).

Ist die Belastung symmetrisch zu einer Vertikalebene durch die ausgezeichnete Achse, so wird ein Torsionsmoment nicht da sein, denn die links vom Schnitt liegenden Kräfte haben dann kein Moment in bezug auf die Achse.

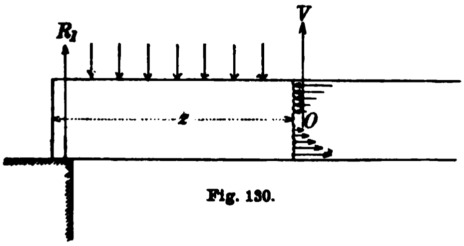


Fig. 130.

Ein Biegungsmoment um die vertikale Achse wird auch nicht da sein, weil die Kräfte dieser Achse parallel sind. Dagegen wohl ein Biegungsmoment B um die horizontale, nach vorn gerichtete Achse; dasselbe wird entgegengesetzt gleich sein dem Moment aller links von O wirkenden Kräfte mit Einschluß der Auflagerreaktionen, also:

$$B = R_1 z - \int_0^z \varkappa (z - x)\, dx.$$

Bei einem horizontal gelagerten Balken mit vertikaler, zur vertikalen Längsmittelebene symmetrischer Belastung wird also Zug (Druck) und Torsionsmoment der inneren Beanspruchung Null. Der Schub ist bis auf das Zeichen gleich der Summe der auf einer Seite des Schnittes liegenden Kräfte (einschließlich der Auflagerreaktionen), das Biegungsmoment gleich dem Moment derselben Kräfte in bezug auf irgendeine horizontale Achse in der Schnittfläche.

Wenn auch im ganzen kein Zug oder Druck da ist, so sind doch alle Längsfasern des Balkens im gedachten Schnitt gezogen oder gedrückt, das Biegungsmoment ist ja nichts anderes als das Moment dieser Einzelspannungen. Und da ihre Summe Null ist und B immer positiv ist, wie wir noch sehen werden, so wird die senkrechte Spannungsverteilung für den linken Balkenteil so aussehen, wie in Fig. 130 dargestellt: die obern Fasern des Balkens werden gedrückt, die unteren gezogen sein. Daraus leuchtet die Berechtigung des Namens Biegungsmoment wohl ohne weiteres ein.

Es bleibe dem Leser überlassen, sich ebenso die Berechtigung des Namens Torsionsmoment klar zu machen, es tritt dann auf, wenn die äußeren Kräfte den ganzen Balken um die Achse zu verdrehen suchen.

Haben wir einen Stab, der nur an den Enden A, B Kräften unterworfen ist, der aber sonst kräftefrei ist, so liegen die Kräfte, wie in Nr. 153 bemerkt wurde, in der Achse AB. Nimmt man diese zur ausgezeichneten Achse, so sind für unsern Stab Schub, Torsionsmoment und Biegungsmoment Null, die ganze Beanspruchung reduziert sich auf einen Druck oder einen Zug, der längs des ganzen Stabes AB konstant ist.

§ 33. Der vertikal belastete, horizontale Träger.

158. Formulierung der Aufgabe. Wir betrachten jetzt eingehender einen horizontal gelagerten Träger, dessen Belastung und Stützung inklusive Eigenlast vertikal sei und symmetrisch zur vertikalen Längsmittelebene, so daß wir ein ebenes Problem vor uns haben. Von den verschiedenen Stützungsarten fassen wir zwei ins Auge: der Träger kann an den Enden einfach aufgelagert oder aber an einem Ende eingespannt (etwa eingemauert) sein.

Die Aufgabe wird darin bestehen, einmal die Stützreaktionen zu berechnen, soweit dies mit der Mechanik des starren Körpers möglich ist, dann aber, unter derselben Einschränkung, die inneren Spannungen des Trägers zu bestimmen, d. h. Schubkraft und Biegungsmoment. Denn Zug bzw. Druck und Torsionsmoment sind ja nach den Voraussetzungen Null. (Siehe Nr. 157 im vorhergehenden Paragraphen.)

Fassen wir noch etwas den ersten Fall ins Auge. Der Balken ist auf beiden Seiten aufgelagert. Die Stützflächen sind endliche Flächen und die Anzahl der Stützdrucke also unendlich. Von ihnen kann man nur die Summe und das Gesamtmoment berechnen, oder was auf dasselbe hinaus kommt, man kann die Lagerdrucke R_1, R_2, die Summen der Drucke beiderseits, berechnen, wenn man eine Annahme über ihre Angriffslinien macht. Von denen weiß man aber in Wahrheit nicht mehr, als daß sie innerhalb der Stützflächen liegen (vgl. Nr. 136). Sind nun diese klein gegen die übrigen Dimensionen, so kommt es auf die genaue Lage der Stützdrucke nicht an: wir können sie an das Ende des Balkens verlegen. Und so wollen wir verfahren.

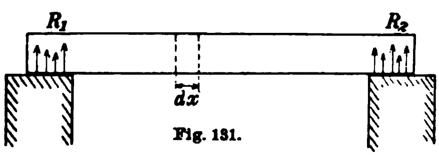


Fig. 131.

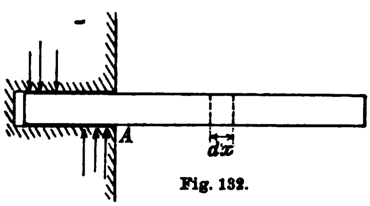


Fig. 132.

Beim eingemauerten Balken wird die Verteilung der Stützdrucke etwa die in der Fig. 132 angedeutete sein. Auch von ihnen können wir nur die Summe R und das Gesamtmoment B_0 mit Hilfe der Mechanik des starren Körpers berechnen: Dieses B_0 wollen wir auf die Stelle A beziehen, wo der Balken in die Mauer eintritt: es ist B_0 das (negative) Moment der Stützreaktionen in bezug auf die horizontale Querachse durch A.

Die Lösung unserer Aufgaben, namentlich die Berechnung von Schubkraft und Biegungsmoment, ist natürlich für die Festigkeit des Balkens von höchster Bedeutung. Man wird sagen können, daß die Festigkeit um so mehr gefährdet ist, je größer diese Kräfte bzw. Momente sind, ist die Schubkraft zu groß, so wird Gefahr der Abscherung, ist das Biegungsmoment zu groß, so wird Gefahr des Zerbrechens da sein. Natürlich kommt es auch auf die genauere Verteilung der inneren Spannungen an, aber darüber kann nur die Elastizitätstheorie, nicht mehr die Stereomechanik Aufschluß geben.

159. Lösung für den Fall einer endlichen Anzahl von Kräften. Es mögen die Kräfte $k_1 \ldots k_n$ in den Abständen $a_1 \ldots a_n$ vom linken Auflager vertikal nach unten an dem Balken wirken.

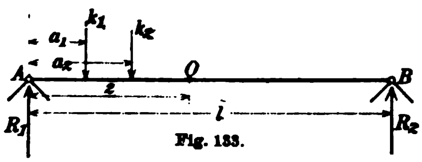


Fig. 133.

Dann ist die Resultierende natürlich $\sum k = k_1 + \cdots + k_n$; während für den an beiden Enden gelagerten Balken die Momentengleichung in bezug auf A sofort ergibt

$$R_2 = \frac{1}{l}(a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n).$$

Ebenso

$$R_1 = \frac{1}{l}\{(l - a_1)k_1 + (l - a_2)k_2 + \cdots + (l - a_n)k_n\}.$$

Liegt z zwischen der νten und $(\nu + 1)$ten Kraft, so ist

$$V = -R_1 + k_1 + \cdots + k_\nu,$$
$$-B = -R_1 z + k_1(z - a_1) + \cdots + k_\nu(z - a_\nu).$$

Analog bekommt man für den auf einer Seite eingemauerten Balken

$$R = k_1 + \cdots + k_n,$$
$$-B_0 = a_1 k_1 + \cdots + a_n k_n,$$
$$V = k_{\nu+1} + \cdots + k_n,$$
$$B = -(a_{\nu+1} - z)k_{\nu+1} - \cdots - (a_n - z)k_n.$$

Die graphische Lösung mittels Seileck gestaltet sich für die Bestimmung der Auflagerdrucke höchst einfach. Man hat nur die Ergebnisse von Nr. 118 und 122 anzuwenden.

Für den auf beiden Seiten gestützten Balken betrachte man die Durchführung in Fig. 134. Der, der Schlußlinie $S_0 S_{n+1}$ des Seilecks parallele Polstrahl PF teilt die resultierende Kraft $K_0 K_n$ in die beiden Auflagerreaktionen $R_1 = K_0F$ und $R_2 = FK_n$. Es ist $K_0F = R_1$, weil zu R_1 die Seilstrahlen S_0S_1 und S_0S_{n+1} gehören.

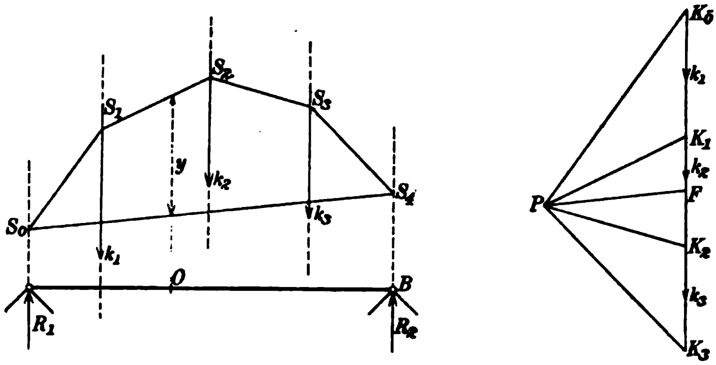


Fig. 134.

Bei dem an einem Ende (A) eingespannten Balken ist natürlich $R = K_nK_0$ (siehe Fig. 135). Man hat jetzt den Fall, daß das Krafteck sich schließt (inkl. R), daß aber ein Kräftepaar resultiert. Dies ist natürlich das gesuchte B_0.

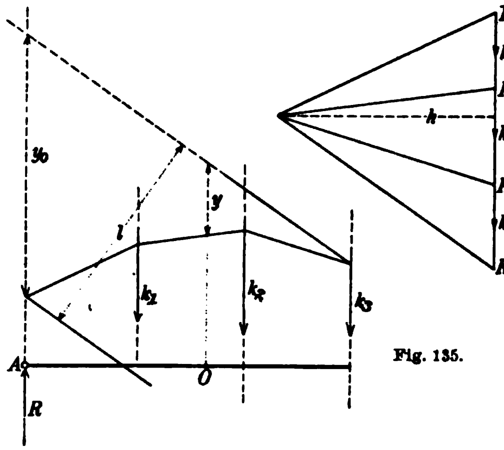


Fig. 135.

Wie früher (Nr. 118) ausgeführt wurde, ist B_0 gleich dem Produkt aus dem Abstande l der beiden freien Seilstrahlen und der Länge $r_n = r_0$ des entsprechenden Polstrahls.

Um nun auch die Bestimmung der inneren Spannungen in einfacher Weise graphisch lösen zu können, wollen wir einen wichtigen Hilfssatz ableiten:

160. Graphische Bestimmung des Momentes einer Kraft. $\bar{k}$ sei eine Kraft, g ihre Angriffsgerade, S_0S_1 und S_1S_2 die ihr zugehörigen Seilstrahlen, PK_0 und PK_1 die entsprechenden Polstrahlen.

Das Moment von k inbezug auf einen Punkt O ist natürlich dem absoluten Werte nach das Produkt aus k und aus der Länge des Abstandes des Punktes O von g. Aber es gibt noch eine andere Bestimmung, die für manche Zwecke brauchbar ist.

Ziehen wir durch O die Parallele g' zu g und betrachten den

Abschnitt $y = AB$, den die Seilstrahlen auf ihr bilden. Sei ferner h der Abstand des Pols P von der Kraft k im Krafteck, die sogenannte Poldistanz oder Polhöhe.

Wir behaupten, daß das Moment

$$M = y \cdot h$$

ist. Man kann den Satz sofort mit Hilfe der beiden in Betracht kommenden ähnlichen Dreiecke (PK_1K_0 und S_1AB) beweisen.

Wir zeigen ihn so:

Wir denken uns in g' die beiden Kräfte K_1H und HK_0 angreifen (H Fußpunkt des Lotes h), dann bilden die Kräfte zusammen mit k ein Kräftepaar vom Moment M.

Dieses konstruieren wir uns nun nach der Methode von Nr. 118, indem wir als ersten und letzten Seilstrahl die zu h parallelen BS' und AS'' betrachten (d. h. als ersten und letzten Polstrahl das doppelt zu zählende h). $S'BS_1AS''$ ist das zugehörige Seileck.

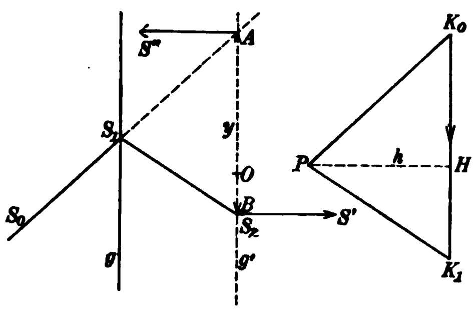


Fig. 136.

Und also ist das Moment nach der allgemeinen Regel, die wir noch oben in Nr. 159 angewendet haben,

$$M = yh.$$

Denn h entspricht jetzt r_0 bzw. r_n, y ist der Abstand der freien Seilstrahlen.

Der Vorteil dieser Bestimmungsart zeigt sich, wenn alle Kräfte einander parallel sind. Denn dann sind alle h dieselben und alle M den y proportional.

Bei lauter einander parallelen Kräften ist das Moment in bezug auf einen festen Punkt O der Strecke proportional, welche die beiden zur Kraft gehörenden Seilstrahlen auf einer zur Kraftrichtung Parallelen durch O abschneiden.

161. Anwendung auf die Bestimmung des Biegungsmomentes. Betrachten wir alle links von einer Stelle O gelegenen Kräfte im Falle des beiderseits gestützten Balkens — es seien dies $R_1, k_1 \dots k_\nu$ — so gehören zu ihnen (im Sinne von Nr. 120) die Polstrahlen PF (siehe Fig. 134) und PK_ν; also der $(\nu + 1)$te Seilstrahl, d. i. der, der zwischen k_ν und $k_{\nu+1}$ gespannt ist, und die Schlußlinie des Seilecks.

Mithin ist für den beiderseits gestützten Balken das Biegungsmoment gleich hy, wo h die Poldistanz, y die sogenannte Momenten-

höhe, d. h. der vertikale Abstand der gebrochenen Linie $S_0 S_1 \ldots S_{n+1}$ über der Schlußlinie $S_0 S_{n+1}$ an der Stelle O ist.

Für den an einem Ende eingeklemmten Balken mögen rechts von O die Kräfte $k_{\nu+1} \ldots k_n$ liegen. Zu ihnen gehören die Polstrahlen PK_ν und PK_n, also der Seilstrahl zwischen der νten und $(\nu + 1)$ten Kraft und der freie Seilstrahl $S_n S''$.

Das Biegungsmoment ist also in diesem Falle gleich yh, wo h die Poldistanz, y den vertikalen Abstand der gebrochenen Linie $S_0 S_1 \ldots S_n$ von dem letzten freien Seilstrahl an der Stelle O ist.

Da für $s = 0$ das Biegungsmoment B in B_0 übergeht, so ist

$$B_0 = hy_0,$$

wo y_0 der vertikale Abstand des Punktes S_0 von dem letzten freien Seilstrahl $S_n S''$ ist (siehe Fig. 135).

Für das Folgende wird es gut sein, noch das Vorzeichen von B zu beachten. Wählen wir P_1 als Pol auf der linken Seite vom Krafteck, so ist der Streckenzug $S_0 S_1 \ldots S_n$ nach unten konkav. Anderseits ist für kleine s, wo allein R_1 links von O liegt, das Biegungsmoment B sicher positiv. Wenn wir also y nach oben von der Schlußlinie aus positiv zählen und daran festhalten, P links von $K_0 K_n$ zu nehmen, so müssen wir

$$B = hy$$

setzen.

Das gilt auch für den links eingemauerten Balken, wenn wir das auf den rechten Teil wirkende Biegungsmoment betrachten.

Aufgaben: 85. Man bestimme rechnerisch und graphisch die Auflagerreaktionen R_1 und R_2 für einen Balken von der Länge $l = 10$ m, der in den Abständen von 1, 3, 6 und 8 m vom linken Ende die Lasten 5, 7, 2, 9 kg trägt. Man suche ebenso das Biegungsmoment und den Schub für die um 4 m von dem linken Ende entfernte Stelle.

86. Man bestimme ebenso die Reaktionen R und das Moment B_0 für einen an einem Ende eingemauerten Balken, der in den Abständen von 2, 3 und 5 m die Lasten 10, 5 und 10 kg trägt. Desgleichen das Biegungsmoment und den Schub für die Stelle $s = 1$ m.

87. Unsere bisherigen Betrachtungen lassen sich natürlich auf den Fall übertragen, daß der Balken über AB hinausragt und außerhalb AB belastet ist. Man nehme z. B. die Belastung der Aufgabe 85 und füge in 1 m Abstand links von A noch eine Last von 10 kg hinzu. Was ist dann in der Formel

$$B = hy$$

für y links vom Punkte A zu wählen, wenn man daran festhält, daß B das Moment aller links von O liegenden Kräfte sei?

Man beachte, daß jetzt y und somit auch B das Zeichen wechseln wird. Wo ist bei dieser Aufgabe das Biegungsmoment gleich Null?

162. Die rechnerische Lösung der Probleme im Falle kontinuierlicher Belastung ist äußerst einfach und zum Teil schon in Nr. 157 erledigt. Aus den Summen von Nr. 159 werden Integrale. So ist die Resultierende

$$K = \mathfrak{S} dk = \int_0^l \varkappa\, dx, \tag{1}$$

wenn $l = AB$ ist.

Ihr Abstand x_0 von A ist nach dem Momentensatz gegeben durch

$$K x_0 = \int_0^l x \varkappa\, dx. \tag{2}$$

Ebenso ergibt der Momentensatz mit A als Bezugspunkt

$$R_2 l - \int_0^l x \varkappa\, dx = 0,$$

d. h.

$$R_2 = \frac{1}{l} \int_0^l x \varkappa\, dx, \tag{3}$$

ebenso der Momentensatz mit B als Bezugspunkt

$$R_1 = \frac{1}{l} \int_0^l (l - x) \varkappa\, dx. \tag{4}$$

Habe O die Entfernung z von A, so ist in O die negative Summe aller links liegenden Kräfte (der Schub)

$$V = -R_1 + \int_0^z \varkappa\, dx, \tag{5}$$

dagegen das negative Moment aller links liegenden Kräfte (das Biegungsmoment)

$$B = -R_1 z + \int_0^z (z - x) \varkappa\, dx. \tag{6}$$

Denn die Kraft $dk = \varkappa dx$ hat den Hebelarm $(z - x)$ in bezug auf O. Nach (4) ist B Null am Anfang ($z = 0$) und am Ende ($z = l$).

Differentiiert man (6) nach z, so erhält man

$$\frac{dB}{dz} = R_1 - (z - x)\varkappa\big|_{x=z} - \int_0^z \varkappa\, dx$$

$$= R_1 - \int_0^z \varkappa\, dx,$$

also nach (5)

$$\frac{dB}{dz} = -V. \tag{I}$$

Es hat also das Biegungsmoment B dort ein Maximum, wo der Schub Null ist.

Für das Problem des eingespannten Balkens ergibt sich analog

$$R = K = \int_0^l \varkappa\, dx, \tag{7}$$

$$B_0 = \int_0^l x \varkappa\, dx. \tag{8}$$

Dagegen ergeben sich jetzt als Summe der rechts liegenden Kräfte

$$V = \int_z^l \varkappa\, dx, \tag{9}$$

und als Moment der rechtsliegenden Kräfte

$$B = -\int_z^l (x - z) \varkappa\, dx. \tag{10}$$

Natürlich ist für $z = 0$, $B = B_0$ und $R = V$. Wieder ist

$$\frac{dB}{dz} = -V. \tag{I}$$

Differentiieren wir die Gleichungen (I) noch einmal nach x, so erhalten wir in beiden Fällen gemäß (5) oder (9)

$$\frac{d^2 B}{dz^2} = -\varkappa(z). \tag{II}$$

Man erhält also aus der Belastungskurve die Schubkraft durch einmalige, das Biegungsmoment durch zweimalige Integration (und Wechsel des Zeichens). Die Integrationskonstanten sind dadurch bestimmt, daß für den beiderseits gestützten Balken am Anfang und am Ende (für $z = 0$ und für $z = l$) das Biegungsmoment gleich Null wird, für den einseitig eingeklemmten Balken aber am Ende das Biegungsmoment und der Schub gleich Null ist.

163. Die Seilkurve als Momentenlinie. Tragen wir B vertikal an jeder Stelle O als Strecke y (nach oben, wenn $y > 0$) von einer beliebigen Geraden aus auf, indem wir setzen

$$B = yh,$$

wo h eine beliebig gewählte konstante Kraft bedeutet, so bekommen wir eine stetige Kurve, welche Momentenlinie heißen möge.

Ihre Differentialgleichung lautet vermöge (II) der vorigen Nummer

$$h\frac{d^2y}{dz^2} = -\varkappa(z).$$

Tragen wir den ersten Differentialquotienten der Momentenlinie $\frac{dy}{dz}$ mit $-h$ multipliziert als eine Kurve auf, so gibt deren Ordinate nach (I) der vorigen Nummer den **Schub**

$$-\frac{dB}{dz} = -h\frac{dy}{dz}.$$

Nach den Ausführungen von Nr. 137 ist es nun ganz klar, daß die Momentenlinie nichts anderes ist als die **Seilkurve**, welche aus dem Seilpolygon der Nr. 161 durch Grenzübergang entsteht, wenn man von diskreter Belastung zu kontinuierlicher übergeht. Man muß nur h gleich der Poldistanz wählen, und y, die Momentenhöhe, von der Schlußlinie aus auftragen, während z nach wie vor horizontal gezählt wird.

Übrigens kann man ja durch geeignete Lage des Pols erreichen, daß die Schlußlinie horizontal wird, so daß y und z gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten werden.

Wir verweisen auf die Fig. 85 (S. 213), welche den Zusammenhang von Momentenlinie und Krafteck illustriert.

Man beachte noch, daß $FX = V$ ist, wo PF der Schlußlinie S_0S_∞ parallel ist. Denn es ist

$$K_0X = \int_0^z \varkappa\, dx,$$

$$K_0F = R_1.$$

Man sieht aus der Figur nochmals direkt, daß für $V = 0$, nämlich für $X = F$ die Momentenhöhe y ein Maximum ist, also auch B.

Von den hier ausgeführten Gedanken wird man Gebrauch machen, um die Momentenlinie angenähert graphisch zu konstruieren: man wird in den hinreichend klein gewählten Teilintervallen Δx die Last durch $\varkappa\Delta x$ mit einem mittlern $\varkappa$ an einer mittleren Stelle des Intervalls Δx ersetzen und nun das Seilpolygon konstruieren. Wenn die Teilung fein genug ist, wird die Abweichung des Seilpolygons von der Seilkurve unmerklich sein.

Man darf aber — praktisch — auch wiederum die Teilung nicht zu fein wählen, weil sich bei der großen Anzahl von zu zeichnenden Linien die Zeichenfehler zu sehr häufen.

Nur Erfahrung und Übung kann hier den richtigen Mittelweg kennen lehren.

164. Beispiel gleichförmiger Belastung. Ist wenigstens in einem Intervall die Belastung gleichförmig, d. h. $\varkappa$ konstant, so folgt aus

$$h \frac{d^2 y}{d z^2} = - \varkappa ,$$

$$y = - \frac{1}{2} \frac{\varkappa}{h} z^2 + a z + b ,$$

wo a, b Integrationskonstanten sind.

Die Seilkurve ist also überall da, wo die spezifische Belastung konstant ist, das Stück einer Parabel; ist $\varkappa = 0$, d. h. keine Belastung vorhanden, so ist die Seilkurve geradlinig.

165. Stetigkeitsverhältnisse der Momentenlinie. Nach Definition und auch als Grenzfall eines Seilecks ist die Seilkurve selbst auf jeden Fall stetig.

Ihr erster Differentialquotient, d. h. (bis auf den Faktor $-h$) die Schubkraftkurve ist ebenfalls stetig, wenn die Belastung wirklich kontinuierlich ist. Denn der Ausdruck (5) Nr. 162

$$V = - R_1 + \int_0^z \varkappa d x$$

ändert sich stetig mit z.

Die zweite Ableitung dagegen, $\varkappa$, kann sehr wohl unstetig sein.

Wenn also z. B. die Belastung streckenweise konstant ist, aber von Strecke zu Strecke verschieden, so besteht die Seilkurve aus lauter verschiedenen Parabelbögen, vielleicht auch aus gradlinigen Stücken (wo $\varkappa = 0$), die sich aber stetig und mit stetiger Tangente aneinander schließen.

Nun ist es aber häufig praktisch, zuzulassen, daß eine Einzellast auftrete, d. h. eine endliche Kraft k an einer punktförmigen Stelle (z. B. der Druck von Lokomotivrädern an den Berührungsstellen der Räder mit den Schienen). Das ist natürlich ein Idealfall: in Wahrheit wird es eine Belastung sein, bei der in einem sehr kleinen Intervall Δx um die fragliche Stelle herum $\varkappa$ sehr hohe Werte annimmt, so daß $\int_{\Delta x} \varkappa d x = k$ einen merklichen Wert erreicht.

Wenn wir den Grenzprozeß

$$\lim_{\Delta x = 0} \int \varkappa d x = k$$

machen, indem wir Δx gegen Null, $\varkappa$ gegen ∞ gehen, aber das Integral endlich bleiben lassen, so wird die Seilkurve stetig bleiben, ihr erster Differentialquotient aber, d. h. $-h \frac{dy}{dx} = V$ wird um eben dieses Integral k springen, da sich das Integral $\int_0^z \varkappa d x$ um diesen Betrag ändern wird.

Beim Auftreten einer Einzellast k wird also die Seilkurve stetig bleiben, ihr Differentialquotient aber an der Belastungsstelle plötzlich um $\frac{1}{h}$ k abnehmen.

Die Seilkurve wird eine nach oben gerichtete Ecke bekommen.

Man kann jetzt auch leicht die Frage beantworten: Wie ändert sich die Seilkurve, wenn man in einem Intervall Δx die stetig verteilte Last durch die ihr äquivalente Einzellast ersetzt?

Außerhalb bleibt das Biegungsmoment, also auch die Seilkurve ungeändert, im Intervall aber ist jetzt $\varkappa = 0$, die neue Seilkurve muß also aus Geraden bestehen, die sich stetig an die übrige Seilkurve anschließen. D. h. in dem Intervall Δx ist die alte Seilkurve durch die Tangenten im Anfang und im Endpunkte des Intervalls zu ersetzen. Beide Tangenten müssen sich natürlich auf der Angriffslinie der Einzellast treffen, das folgt direkt nach Nr. 118 aus der Regel über die graphische Zusammensetzung der Kräfte.

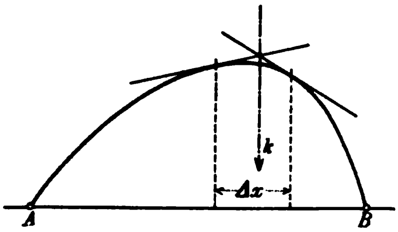


Fig. 137.

166. Das Maximum der Biegungsbeanspruchung. Die vorhergehenden Betrachtungen sind besonders dann von Wichtigkeit, wenn man fragt: an welcher Stelle z tritt das Maximum des Biegungsmomentes ein?

Ist die Belastung stetig, so wird das Maximum da eintreten, wo $\frac{dB}{dz}$, d. h. die Schubkraft V Null ist. Wenn aber eine Einzellast da ist, also $\frac{dB}{dz}$ unstetig ist, so kann das Maximum auch an dieser Unstetigkeitsstelle liegen.

Wir wollen die Aufgabe, die Stelle des größten Biegungsmomentes bei gegebener Belastung zu suchen, in einem speziellen Falle ganz durchführen:

Es sei eine stetige und konstante Belastung da und außerdem sei in der Entfernung a vom linken Auflager eine Einzellast L vorhanden.

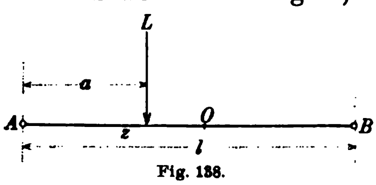


Fig. 138.

Die Seilkurve besteht dann aus zwei Parabelstücken, die an der Stelle $z = a$ zusammenstoßen, wo der Differentialquotient plötzlich um $\frac{1}{h}$ L abnimmt.

Daraus folgt, daß drei Fälle möglich sind:

1. Der Scheitel der linken Parabel liegt innerhalb ihres Geltungs-

bereiches, dann kann der Scheitel der rechten Parabel dies nicht tun, da die Ecke nach oben gerichtet ist.

Die Abszisse x_m des Scheitels ist dann die Stelle des Maximums des Biegungsmomentes B.

$$0 \leqq x_m \leqq a,$$
$$\left(\frac{dB}{dz}\right)_{z=x_m} = 0.$$

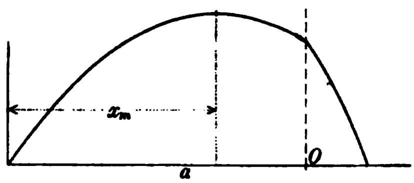


Fig. 139.

2. Der Scheitel der rechten Parabel liegt innerhalb ihres Geltungsbereiches. Seine Abszisse x_m ist dann Stelle des Maximums:

$$a \leqq x_m \leqq l,$$
$$\left(\frac{dB}{dz}\right)_{z=x_m} = 0.$$

3. Keiner der beiden Parabelscheitel liegt innerhalb des Geltungsbereiches. Dann liegt das Maximum notwendigerweise im Unstetigkeitspunkt:

$$x_m = a,$$
$$\left(\frac{dB}{dz}\right)_{z=x_m} \text{ ist unbestimmt.}$$

Wir wollen nun sehen, welcher der drei Fälle eintritt.

Mit Hilfe des Momentensatzes bekommt man sofort wie in Nr. 159

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{2}\varkappa l + \frac{l-a}{l} L, \\ R_2 &= \frac{1}{2}\varkappa l + \frac{a}{l} L. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Ferner ist für $z < a$, wo also L rechts von O liegt,

$$B = R_1 z - \frac{1}{2}\varkappa z^2, \tag{2}$$

denn es liegt die Last $\varkappa z$ links von O und ihre Resultierende hat den Abstand $\frac{1}{2}z$ von O.

Für $z > a$ dagegen gilt

$$B = R_1 z - \frac{1}{2}\varkappa z^2 - L(z-a). \tag{2'}$$

Differentiieren wir (2), um zu sehen, ob Fall (1) eintritt:

$$0 = \frac{dB}{dz} = R_1 - \varkappa z,$$

also nach (1)

$$z = x_m = \frac{R_1}{\varkappa} = \frac{1}{2} l + \frac{l-a}{l\varkappa} L.$$

Nun muß aber, damit wirklich Fall (1) eintritt

$$0 \leqq x_m \leqq a$$

sein, d. h.

$$\frac{1}{2} l + \frac{l-a}{l\varkappa} L \leqq a$$

oder

$$a \geqq \frac{1}{2} l \frac{l\varkappa + 2L}{l\varkappa + L} = \frac{1}{2} l \left(1 + \frac{L}{l\varkappa + L}\right).$$

Setzen wir den echten Bruch

$$\frac{L}{L + l\varkappa} = \alpha$$

und

$$\frac{1}{2}(1+\alpha) l = x_2,$$

so muß also

$$a \geqq x_2 \tag{A}$$

sein, damit Fall (1) eintritt.

Verfahren wir analog, um zu sehen, ob Fall (2) eintritt, differentiieren wir also (2'), so bekommen wir

$$0 = -R_1 + \varkappa s + L,$$

$$s = x_m = \frac{R_1 - L}{\varkappa} = \frac{1}{2} l - \frac{aL}{l\varkappa}.$$

Die Bedingung $a \leqq x_m \leqq l$ gibt nach analoger Rechnung wie vorhin

$$a \leqq x_1, \tag{B}$$

wo

$$x_1 = \frac{1}{2}(1-\alpha) l$$

ist. Ist weder Fall (1) noch Fall (2) möglich, ist also

$$x_1 < a < x_2, \tag{C}$$

so tritt Fall (3) ein — denn das ist jetzt die einzige Möglichkeit —, und es ist also die Stelle des maximalen Biegungsmomentes durch

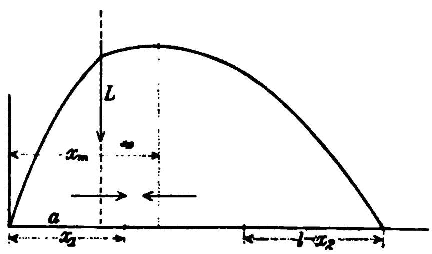


Fig. 140a.

$$x_m = a$$

gegeben.

Jetzt läßt sich das Resultat vollständig diskutieren. Nennen wir die Stelle des maximalen Biegungsmomentes den gefährdeten Querschnitt, so liegt derselbe für $a = 0$, wo sicher (B) erfüllt ist, in der Mitte, es ist $x_m = \frac{1}{2} l$.

Wenn jetzt a wächst, so bleibt (B) zunächst noch erfüllt, es nimmt aber x_m mit wachsendem a dauernd ab, bis sich a und x_m im Punkte x_1 treffen.

Überschreitet a, d. h. die Einzellast die Stelle x_1, so ist jetzt Bedingung (C) erfüllt, der gefährdete Querschnitt wandert mit der Last zusammen ($a = x_m$) von x_1 nach x_2.

Von hier ab tritt (A) in Geltung, es vollzieht sich das symmetrische Spiegelbild zum ersten Fall; Last und gefährdeter Querschnitt trennen sich, wandert die erstere zum Ende des Balkens ($a = l$), so kehrt der gefährdete Querschnitt zur Mitte zurück (siehe Fig. 140).

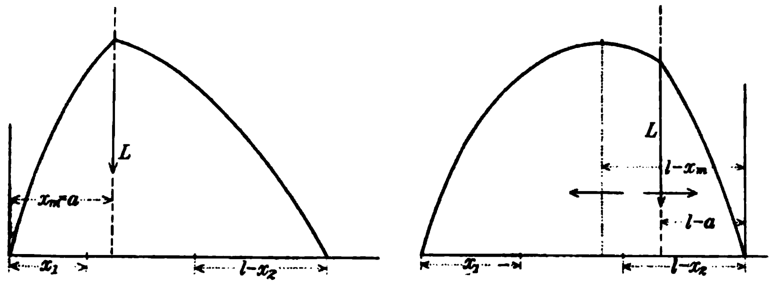


Fig. 140b. Fig. 140c.

Man kann auch die Frage erörtern: *Welches ist das maximale Biegungsmoment für eine feste Stelle bei wandernder Last?*

Jetzt ist z fest gegeben, a variabel.

Man sieht nun, daß in beiden Fällen $z \lessgtr a$, B eine lineare Funktion von a ist; denn R_1 ist es. Das Maximum nach a kann also nur in der Unstetigkeitsstelle auftreten, d. h. wenn die Last über die Stelle hingeht.

Das Resultat bleibt erhalten, wenn mehrere bewegliche Lasten da sind und die stetige Belastung nicht konstant ist.

An einer bestimmten Stelle tritt bei sonst stetiger Belastung das Maximum der Biegungsbeanspruchung jedenfalls dann ein, wenn eine der beweglichen Einzellasten über die Stelle hingeht.

Bei mehreren Lasten wird es sich noch fragen, bei welcher darüber hingehenden Last das absolute Maximum eintritt. Auf diese Frage soll aber hier nicht mehr eingegangen werden: man findet für den wichtigsten Fall konstanter Abstände zwischen den Einzellasten eine sehr einfache Lösung in dem kleinen Aufsatze von R. v. Mises: „Die Ermittlung der Maximalbiegungsmomente an statisch bestimmten Laufkranträgern" in Dinglers polytechnischem Journal, Bd. 321; kompliziertere Aufgaben, die im Brückenbau auftreten, werden in den Lehrbüchern der Graphostatik sehr ausführlich behandelt. Siehe z. B. Müller-Breslau: Die graphische Statik der Baukonstruktionen.

Aufgabe 88: Man bestimme Schubkraftlinie und Momentenlinie für die durch die Formel

$$\varkappa = cx$$

gegebene kontinuierliche Belastung. Wo liegt das Maximum der Biegungsbeanspruchung und wie groß ist es? Wie groß sind die Auflagerreaktionen?

§ 34. Einleitung in die Theorie der statisch bestimmten, ebenen Fachwerke.

167. Allgemeine Bemerkungen. Unter einem Fachwerk verstehen wir ein System gewichtsloser Stäbe, die durch reibungsfreie Gelenke miteinander verbunden sind. An den Gelenkzapfen können äußere Kräfte angreifen. Als solche Idealsysteme pflegt man in erster Annäherung wirkliche Träger: Brückenträger, Kranträger, Dachstühle usw. aufzufassen, indem man erstens das Gewicht eines jeden Stabes sowie jede andere an ihm wirkende eingeprägte Kraft nach § 25 durch zwei Kräfte ersetzt, die in den Gelenken, den sogenannten Knoten, angreifen. Dadurch wird in dem Kräftespiel für alle anderen Stäbe — außer dem betrachteten — nichts geändert, denn nach unseren allgemeinen Prinzipien (siehe Nr. 151) wirkt ein Kräftesystem nach außen auf andere starre Körper nur durch seine Summe und die Summe der Momente. Für das Kräftespiel im Balken selbst, d. h. seine innere Beanspruchung, wird freilich ein Fehler entstehen, der aber nur von der Größenordnung des Balkengewichts im Vergleich zu der Gesamtheit aller anderen Gewichte und Kräfte sein wird. Die zweite Idealisierung besteht darin, daß man sich die Balken an den Enden durch reibungsfreie Gelenke verbunden denkt (beim ebenen Problem durch Zylinder-, beim räumlichen durch Kugelgelenke), obwohl sie in Wahrheit steif vernietet oder ineinander gefügt sein werden. Den Einfluß dieser Idealisierung sucht man hinterher durch eine besondere Theorie, die Theorie der Nebenspannungen, zu korrigieren.

Nach der fundamentalen Bemerkung in Nr. 153 wird dann jedes Gelenk auf jeden in ihm endenden Stabe nur einen Zug oder Druck ausüben, der in die Richtung des Balkens fällt, und also nach dem Gesetze der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung einen umgekehrten Zug oder Druck vom Stabe empfangen.

Das Gleichgewicht eines jeden Stabes ist danach schon garantiert: es handelt sich nur noch um das Gleichgewicht der Gelenkzapfen. Da aber alle auf den Zapfen wirkenden Kräfte auf seiner Achse senkrecht stehen und durch sie hindurchgehen — von den Stabspannungen ist das klar, von der Kraft wollen wir es annehmen — so genügt es, noch die Summe der an einem Knoten angreifenden Kräfte gleich Null zu setzen.

Wir wollen nun die folgenden Betrachtungen auf ein ebenes Fachwerk beschränken, d. h. annehmen, daß die ganze Stabfigur in einer Ebene liege und daß auch die äußeren Kräfte in dieser Ebene wirken.

Da ferner das Fachwerk stets als Träger gedacht ist, also fest sein soll, so werden wir verlangen, daß es bei Annahme starrer Stäbe im ganzen nur noch die Beweglichkeit eines starren Körpers habe, daß es, wie man sich ausdrückt, **kinematisch bestimmt** oder stabil sei.

Nun hat jeder Punkt in der Ebene zwei Bewegungsmöglichkeiten, d. h. seine Lage ist durch zwei Koordinaten bestimmt. Das macht bei n Knotenpunkten $2n$ Koordinaten. Jeder Stab gibt bei fester Länge eine Gleichung zwischen diesen Koordinaten. Gibt es also s Stäbe, so bleiben im allgemeinen, wenn nämlich die s Gleichungen unabhängig voneinander sind, $2n - s$ Koordinaten frei. Soll aber das ganze starr sein, so dürfen nur mehr drei Koordinaten frei bleiben; denn die Lage eines starren ebenen Gebildes ist bestimmt, wenn man einen Punkt desselben festlegt (zwei Koordinaten) und etwa noch den Winkel angibt, den ein Strahl der Figur mit einer festen Richtung einschließt (eine dritte Koordinate). Also genügte es gerade, soviel Stäbe s zu wählen, daß

$$2n - s = 3, \quad \text{d. h.}$$
$$s = 2n - 3$$

ist. Da man aber offenbar die kinematische Bestimmtheit nicht dadurch aufhebt, daß man überflüssige Stäbe hinzufügt, so folgt:

Ein ebenes Fachwerk ist kinematisch bestimmt (stabil), wenn die Zahl s der Stäbe

$$s \geqq 2n - 3$$

ist und wenn unter den Gleichungen, welche die unveränderliche Länge der entsprechenden Strecken (Stäbe) ausdrücken, gerade $2n - 3$ unabhängige sind.

Da es nicht mehr als $2n - 3$ geben kann (denn mehr als starr kann ein System nicht sein), so wird das Erfülltsein der Unabhängigkeit von gerade $2n - 3$ Gleichungen auf eine Ungleichheit hinauslaufen.

Das Problem besteht nun darin, bei gegebenen äußeren Kräften die s Stabspannungen zu bestimmen. Man hat dazu, den n Knoten entsprechend, $2n$ Gleichungen, nämlich für jeden Knoten die zwei Gleichungen, welche aussagen, daß die Summe der Kräfte für jeden Knoten verschwindet.

Aber aus diesen $2n$ Gleichungen folgen gerade drei und nicht mehr für die äußeren Kräfte selbst. Denn nach dem Erstarrungsprinzip ist das Gleichgewicht des Ganzen garantiert, wenn das Gleichgewicht aller Teile gesichert ist. Das Gleichgewicht des Ganzen bedeutet aber gerade drei Gleichungen für die äußeren Kräfte. Es bleiben also für die s inneren Spannungen gerade $2n - 3$ Gleichungen übrig.

Sind nun die $2n - 3$ Gleichungen unabhängig voneinander und ist gerade $s = 2n - 3$, so wird man die Stabspannungen alle berechnen können.

Man nennt das System dann statisch bestimmt. Ist aber $s > 2n - 3$, so ist eine Berechnung der Stabspannungen ohne Zuhilfenahme der Elastizitätstheorie, d. h. mit Aufrechterhaltung der Hypothese des starren Körpers nicht möglich: man nennt das Fachwerk alsdann statisch unbestimmt.

Wir wollen uns nun im folgenden nur mit dem statisch bestimmten Fachwerk beschäftigen, das zugleich kinematisch bestimmt ist. Es muß dann genau

$$s = 2n - 3$$

sein. Man kann zeigen, daß die Ungleichheitsbedingungen, welche in beiden Fällen hinzukommen, identisch sind, *daß also bei $s = 2n - 3$ ein kinematisch bestimmtes zugleich ein statisch bestimmtes Fachwerk ist, wenn man die kinematische Bestimmtheit für unendlich kleine Verschiebungen fordert,* d. h. wenn keine unendlich kleinen Verschiebungen der Knoten möglich sind, welche nur Stablängenänderungen zweiter Ordnung erfordern. Tut man das nicht, so können die Spannungen eines kinematisch bestimmten Fachwerks in Ausnahmefällen unendlich oder unbestimmt werden.

Ein ganz einfaches Beispiel soll dies zeigen: Man betrachte das in der Figur 141 gezeichnete Fachwerk aus $s = 7$ Stäben und $n = 5$ Knoten, so daß $2n - s = 3$ ist. Dieses Fachwerk ist kinematisch bestimmt. Denn ADC bilden ein starres Dreieck; B ist durch BA und BC mit ihm starr verbunden. E aber ebenfalls, denn die Kreise um B mit BE als Radius und um D mit DE als Radius haben nur den einen gemeinsamen Punkt E.

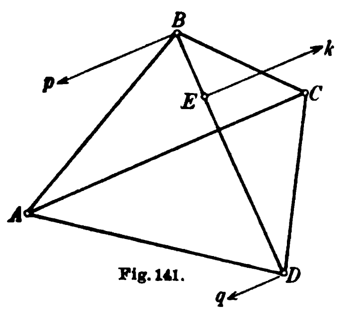


Fig. 141.

Wenn jetzt aber in E, B, D drei parallele zu BED senkrechte Kräfte angeben, die sich am Ganzen das Gleichgewicht halten, so werden die Stabspannungen in EB und ED unendlich sein müssen, denn endliche Kräfte in EB und ED können k nicht aufheben.

Im Unendlichkleinen ist aber auch E relativ zur anderen Figur beweglich: denn verschiebt man E senkrecht zu BD um ein Stück ds, so werden sich BE und DE nur um Größen der Ordnung ds^2 ändern, also bei Beibehaltung von Größen nur erster Ordnung ungeändert bleiben. D. h. im Unendlichkleinen ist die Verschiebung ds senkrecht zu BD gestattet, bei sonst ruhender Figur, im Unendlichkleinen ist die Figur nicht starr.

In Wirklichkeit wird in einem solchem Falle die Hypothese des starren Körpers unzulässig: E wird nachgeben, die Stäbe BE und DE

werden sich etwas ausdehnen unter der Einwirkung einer sehr großen, aber immerhin endlichen Spannung. Denn sowie der Winkel BED auch nur ein wenig von einem Rechten abweicht, wird k, nach EB und ED zerlegt, endliche Komponenten haben.

168. Dreiecksfachwerke. Unter den statisch bestimmten Fachwerken zeichnen sich durch ihre leichte Behandlungsweise wieder die sogenannten einfachen Fachwerke aus, wie Föppl sie nennt,

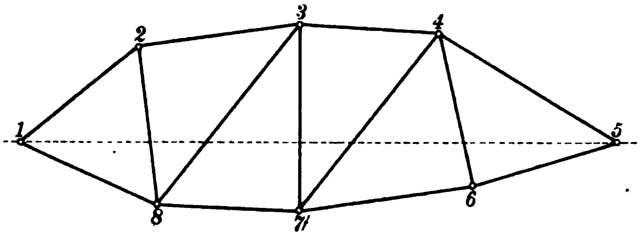


Fig. 142.

d. h. solche Fachwerke, die dadurch entstehen, daß man an ein Dreieck als Grundfigur einen vierten Knoten durch zwei Stäbe anschließt und so weiter immer einen neuen Knoten an schon zwei vorhandene Knoten durch zwei Stäbe angliedert. Ein solches Fachwerk kann man von rückwärts durch sukzessive Wegnahme von zwei Stäben abbauen, d. h. auf ein Dreieck zurückführen.

Zu diesen Fachwerken gehören als wiederum besonders einfach die sogenannten Dreiecksfachwerke, bei denen der Anschluß eines neuen Knotens immer an die beiden vorangehenden Knoten geschieht, so daß das Ganze aus aneinander anschließenden Dreiecken besteht. Die typische Figur ist 142.

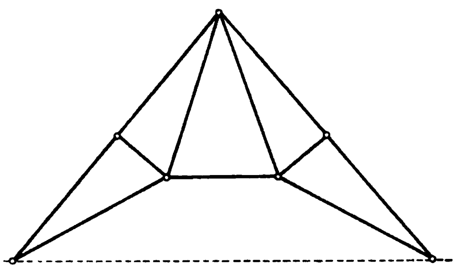


Fig. 143.

Diese Dreiecksfachwerke werden stets von einem geschlossenen Polygon gebildet, das dann durch einen Streckenzug, welcher keinen Knoten mehr als einmal passiert, in Dreiecke zerlegt wird. Siehe z. B. die

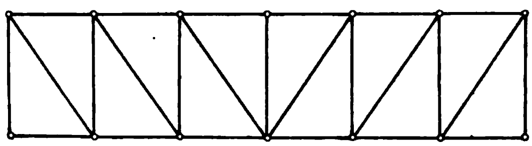


Fig. 144.

Figur 142: 1, 2, 3, . . ., 8 ist der geschlossene Polygonzug, 2, 8, 3, 7, 4, 6 der einfache Streckenzug. Dieses Dreiecksfachwerk kann von 1 oder von 5 aus abgebaut werden.

Man nennt wohl auch die beiden Polygonhälften 1, 2, 3, 4, 5 den Obergurt, 1, 8, 7, 6, 5 den Untergurt, die anderen Stäbe die Diagonalen.

Auch der einfache Polonceauträger oder Wiegmannbinder (Fig. 143) gehört hierher; dagegen nicht mehr der Mohniéträger (Parallelträger) (Fig. 144), der aber wohl noch ein einfaches Fachwerk darstellt.

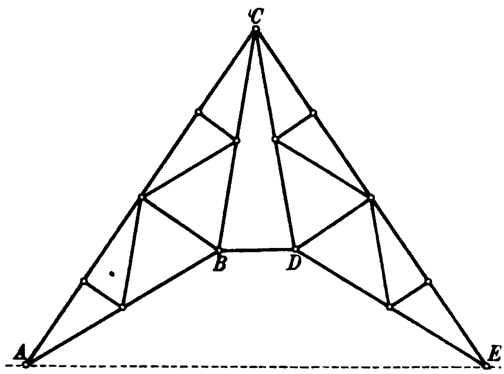


Fig. 145.

Der zusammengesetzte Polonceauträger (Fig. 145) ist kein einfaches Fachwerk mehr, kann aber als aus zwei einfachen Fachwerken ABC und DEC bestehend betrachtet werden, welche durch den Knoten C und den Stab BD miteinander verknüpft sind.

169. Die Rittersche Schnittmethode. Ein Fachwerk dient, wie schon gesagt, als Träger. Es muß also noch irgendwie aufgestützt sein. Es genügt dazu, daß ein Knotenpunkt durch ein Zapfenlager fest mit der Erde verbunden ist, ein zweiter sich auf eine Fläche aufstützt. Man kann dann zunächst aus den sonstigen äußeren Kräften (den Lasten, Winddruck usw.) diese Stützreaktionen nach irgendeiner Methode bestimmen: es handelt sich ja um keine andere Aufgabe als die, am starren Körper ein ebenes Kräftesystem in zwei Kräfte zu zerlegen; von einer Kraft ist der Angriffspunkt (das feste Lager), von der anderen die Angriffsgerade (normal zur Lagerfläche) gegeben. Diese Aufgabe ist nach verschiedenen Methoden gelöst worden (siehe Nr. 122).

Wir sehen also im folgenden alle äußeren Kräfte als bekannt an und die Gleichgewichtsbedingungen des ganzen Fachwerks als erfüllt.

Eine in sehr vielen Fällen bequem anwendbare Methode, die Stabspannungen zu finden, hat A. Ritter gegeben:

Angenommen, man kann einen Schnitt durch das Fachwerk legen, welcher gerade drei Stäbe trifft, die nicht durch einen Punkt gehen. Nach dem Schnittprinzip ist jetzt der abgeschnittene Teil im Gleichgewicht, wenn man die Schnittreaktionen, d. h. die drei Spannungen S_1, S_2, S_3 mit in Rechnung zieht. Stellt man also die drei Gleichgewichtsbedingungen auf, so wird man drei Gleichungen mit drei Unbekannten erhalten, die man auflösen kann.

Man wird nun am besten so verfahren:

Will ich S_1 im Stabe (1) berechnen und schneiden sich S_2 und

S_3 in O_1, so werde ich O_1 zum Momentenpunkt wählen. Hat S_1 den Abstand h_1 von O_1, die äußere Kraft k den Abstand a, so muß sein

$$\pm S_1 h_1 + \Sigma \pm ak = 0,$$

also

$$S_1 = \mp \frac{1}{h_1} \Sigma \pm ak.$$

h_1 und die Abstände a entnimmt man aus der Figur. Die Vorzeichen bestimmen sich aus dem Sinn der Momente. Natürlich sind nur die k zu nehmen, welche an dem abgeschnittenen Teil angreifen.

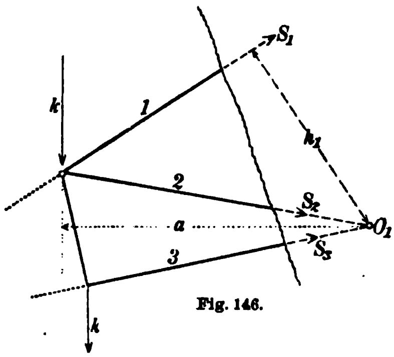


Fig. 146.

Sollten S_2 und S_3 parallel sein, so setzt man die Summe der Kräfte senkrecht zu der gemeinsamen Richtung von S_2 und S_3 gleich Null. Bildet S_1 den Winkel α mit dieser Richtung, während die Kräfte k die Komponenten k_y senkrecht zu der Richtung von S_2 und S_3 haben, so ist

$$S_1 \sin\alpha + \Sigma k_y = 0,$$

woraus sich sofort

$$S_1 = -\frac{1}{\sin\alpha} \Sigma k_y$$

ergibt.

Nach diesem Ritterschen Schnittverfahren können die Beispiele der Figuren 142, 143, 144, 145 alle behandelt werden, wie überhaupt alle Dreiecksfachwerke. Bei dem Mohniéträger muß nur für den mittleren senkrechten Stab ein besonderes Verfahren eingeschlagen werden. Bei dem zusammengesetzten Polonceauträger kann man nach dem Ritterschen Verfahren leicht die Spannung im Stabe BD finden.

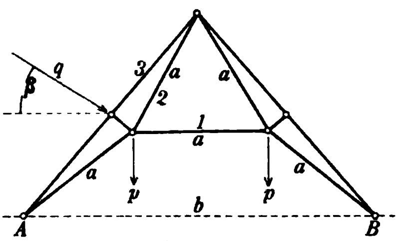


Fig. 147.

Aufgabe 89: Für den einfachen Polonceauträger berechne man die Spannungen in den Stäben 1, 2, 3 im Falle der gezeichneten Belastung. Es sei $p = 100$ kg, $q = 50$ kg, $a = 3$ m, b (die ganze Spannweite) 8 m, der Winkel β der Kraft q gegen den Horizont 10°. A sei ein fester Punkt, B horizontal aufgestützt. (Fig. 147.)

170. Die Methode des Kräfteplans besteht darin, daß man für jeden Knoten die Gleichgewichtsbedingung einfach dadurch zum Ausdruck bringt, daß man aus den an dem Knoten angreifenden äußeren und inneren Kräften ein geschlossenes Polygon zeichnet.

Bei dem einfachen Fachwerk führt nun diese Methode immer zum Ziel.

Man fängt bei dem letzten Knotenpunkte (n) an, der durch zwei Stäbe mit den anderen verbunden ist. Man zeichnet die äußere Kraft $\bar{k}_n$ und ergänzt sie zu einem Dreieck, indem man durch die Endpunkte von $\bar{k}_n$ Parallele zu den beiden Stäben zieht. Denn die Stabspannungen haben ja die Richtung der Stäbe. Man hat so schon diese beiden Stabspannungen gefunden und zwar mit einem Sinn — so wie sie auf den Knoten (n) wirken —, wenn man nur bedenkt, daß das Kräftedreieck, im Sinne der Kräfte umlaufen, geschlossen sein muß.

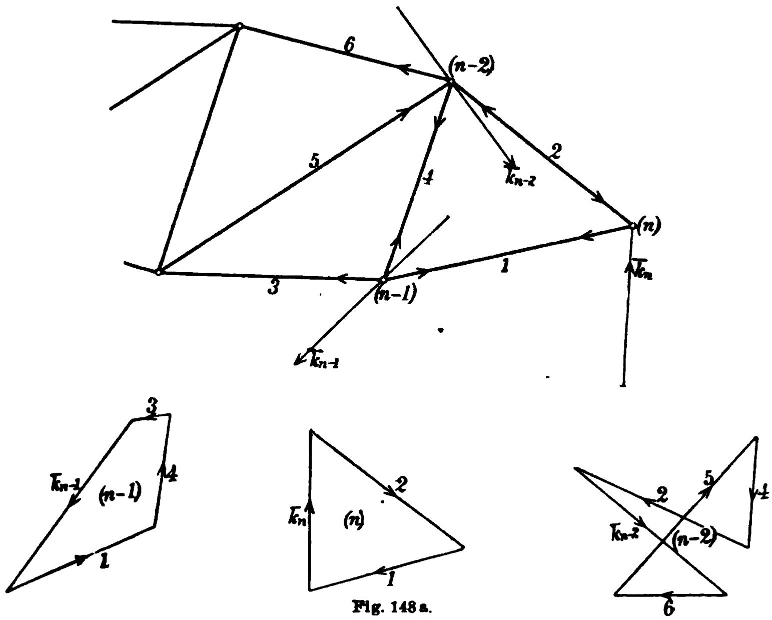


Fig. 148a.

Nun geht man zum nächsten Knotenpunkt $(n-1)$ über; er wird durch zwei neue Stäbe (3 und 4) an das Fachwerk angeschlossen sein. Außerdem kann einer von den Stäben 1, 2, deren Spannungen man schon kennt, dort münden. (In unserer Figur 148 ist es so, nämlich Stab 1 endet in $(n-1)$). Man zeichnet sich nun $\bar{k}_{n-1}$ und die Spannung von (1) zu einem Kräftezug zusammen (aber (1) mit umgekehrtem Pfeil, da die Wirkung auf den Knoten $(n-1)$ die entgegengesetzte ist wie die auf den Knoten (n)) und ergänzt nun diesen Zug zu einem Viereck, indem man zu den Stäben (3) und (4) Parallele zieht. Damit sind die Spannungen in diesen Stäben inklusive Sinn gefunden.

So fährt man fort. Das Verfahren führt zum Ziel. Man nennt die Gesamtheit der Kraftecke den Kräfteplan. In manchen Fällen wird man zweckmäßigerweise die Rittersche Methode mit der Methode des Kräfteplans verbinden: Beim zusammengesetzten Polonceauträger z. B. (siehe Fig. 145) wird man zuerst nach der Ritterschen Methode die Spannung im Stabe BD berechnen. Dann betrachtet man allein den Teil DEC, der ein einfaches Fachwerk ist und für den jetzt die Spannung in BD als äußere Kraft angesehen werden muß, und behandelt ihn nach der Methode des Kräfteplans.

171. Der Cremonasche Kräfteplan. In dem vorhergehenden Beispiel hätten wir das doppelte Ziehen der Kraft (1), die dem Stabe (1) entspricht, ersparen können. Denn man kann ersichtlich die beiden Kraftecke für (n) und (n — 1) zusammenschieben, so daß die beiden Spannungen (1) sich decken. Und zwar erkennt man, daß dann die äußeren Kräfte $\bar{k}_n$ und $\bar{k}_{n-1}$ an einer Ecke mit fortlaufendem Pfeilsinn zusammenstoßen.

Betrachten wir auch noch das Krafteck, das zum dritten Knoten (n — 2) gehört. Man kann es jedenfalls so parallel an das Krafteck für (n) heranschieben, daß die beiden Kräfte des Stabes (2) sich decken. Da man die Reihenfolge der Kräfte frei hat, so kann man es weiter erreichen, daß $\bar{k}_{n-2}$ mit $\bar{k}_n$ in einer Ecke zusammenstößt, nämlich in der Ecke, wo (2) dies tut. Man braucht nur in dem Krafteck für (n — 2) die Kraft $\bar{k}_{n-2}$ an die entsprechende Ecke von (2) zu setzen.

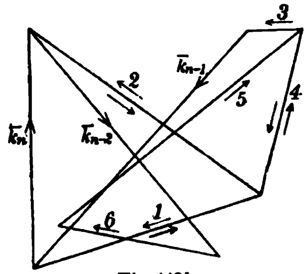


Fig. 148 b.

Nun kommt noch die Stabspannung (4) doppelt vor, nämlich in (n — 1) und (n — 2). Man kann aber durch geeignete Ordnung von (3) und (4) im Krafteck (n — 1) erreichen, daß auch die beiden Spannungen (4) sich beim Zusammenrücken decken. Das ist möglich, wenn (4) in dem Eck (n — 1) und dem Eck (n — 2) so eingeordnet wird, daß es an zwei schon gezeichnete Kräfte angrenzt, die beim Zusammenschieben in einer Ecke zusammenstoßen, und zwar in einer Ecke, die für (n — 1) noch frei ist. Man sieht, daß das nur die Ecke sein kann, wo (1) und (2) zusammenstoßen.

Man hat also so zu zeichnen, daß (1), (2), (4) durch einen Punkt hindurchgehen, d. h. die Spannungen derjenigen Stäbe, die ein Dreieck bilden.

Das ist die allgemeine Regel, wenn man einen Kräfteplan zeichnen will, in dem keine Stabspannung doppelt vorkommt, daß man dafür Sorge trägt: daß im Plan die Spannungen derjenigen Stäbe durch einen Punkt gehen, welche im Fachwerk ein geschlossenes Dreieck bilden.

Es ist nach dieser Regel kein Zweifel mehr, wie man nach $\bar{k}_{n-2}$, (2) und (4) jetzt (5) und (6) zu zeichnen hat. Es bilden die Stäbe (3), (4), (5) ein Dreieck, also hat man (5) parallel durch die Ecke zu ziehen, in der (3) und (4) zusammenstoßen. (6) versteht sich dann von selber.

Man nennt nun einen Kräfteplan, bei dem keine Kraft, weder eine äußere noch eine innere, doppelt gezeichnet zu werden braucht, einen Cremonaschen Kräfteplan. Es gibt keineswegs für jedes Fachwerk einen Cremonaschen Kräfteplan.

Wir wollen nur allgemein zeigen, daß es einen solchen Cremonaplan für Dreiecksfachwerke gibt und die Regeln kennen lernen, ihn zu zeichnen.

172. Fortsetzung. Wir wollen den folgenden Satz beweisen: Zu einem Dreiecksfachwerk kann man einen Kräfteplan so zeichnen,

1. daß jeder inneren und äußeren Kraft des Fachwerks eine Parallele im Kräfteplan entspricht,

2. daß Kräfte, welche im Fachwerk durch einen Knotenpunkt gehen, im Kräfteplan ein geschlossenes Polygon bilden,

3. daß die Spannungen der Stäbe, welche im Fachwerk ein Dreieck bilden, im Kräfteplan durch einen Punkt gehen,

4. daß die äußeren Kräfte des Fachwerks im Kräfteplan für sich ein Polygon bilden und zwar in der Reihenfolge, wie sie in der Gurtung aufeinander folgen,

5. daß die beiden äußeren Kräfte von je zwei durch einen Gurtungsstab verbundenen Knoten mit der Spannung dieses Gurtungsstabes im Kräfteplan durch einen Punkt hindurchgehen.

Durch die Betrachtungen der vorangehenden Nummer kann der Satz für die drei letzten Knoten als erwiesen gelten. Was speziell Behauptung 4. angeht, so sehen wir, daß tatsächlich k_{n-2}, k_n, k_{n-1} aufeinander folgen, und was 5. angeht, so gingen wirklich k_n, 2 und k_{n-2}, sowie k_n, 1 und k_{n-1} durch einen Punkt hindurch.

Wir beweisen den Satz durch den Schluß von $(\nu+1)$ auf (ν); d. h. wir nehmen an, daß er für die Knoten $(n)\ldots(\nu+1)$ und alle Stäbe und Dreiecke, welche auf den $(\nu)^{\text{ten}}$ Knoten folgen, richtig sei. Und beweisen ihn jetzt für den ν^{ten} Knoten.

Dieser Knoten sei durch den Stab λ' mit dem $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Knoten, durch den Stab λ mit dem $(\nu+2)^{\text{ten}}$ Knoten verbunden. λ wird ein Gurtungsstab, λ' ein Diagonalstab sein. Denn beim Abbauen des Dreiecksfachwerks folgen die Knoten dem Diagonalzug, springen also von dem einen Gurt zu dem andern.

Durch die Stäbe $\varkappa'$ und $\varkappa$ sei der ν^{te} Knoten mit den Knoten $(\nu-1)$ und $(\nu-2)$ verbunden: $\varkappa'$ wird ein Diagonalstab, $\varkappa$ ein Gurtungsstab sein.

Zu zeigen ist, daß man parallel zu k_ν, λ, λ', $\varkappa$, $\varkappa'$ ein Polygon zeichnen kann, so daß 1. k_ν, λ, $k_{\nu+2}$ durch eine Ecke gehen, 2. λ', $\varkappa'$ und σ durch eine Ecke gehen, wo σ den Stab bedeutet, der den

$(\nu+1)^{\text{ten}}$ Knoten mit dem $(\nu-1)^{\text{ten}}$ verbindet, daß 3. k_ν und $\varkappa$ durch eine Ecke gehen und 4. desgleichen $\varkappa$ und $\varkappa'$; 5. endlich müssen $\bar{k}_\nu$ und $\bar{k}_{\nu+2}$ mit fortlaufendem Pfeilsinn aneinander stoßen. Vorhanden

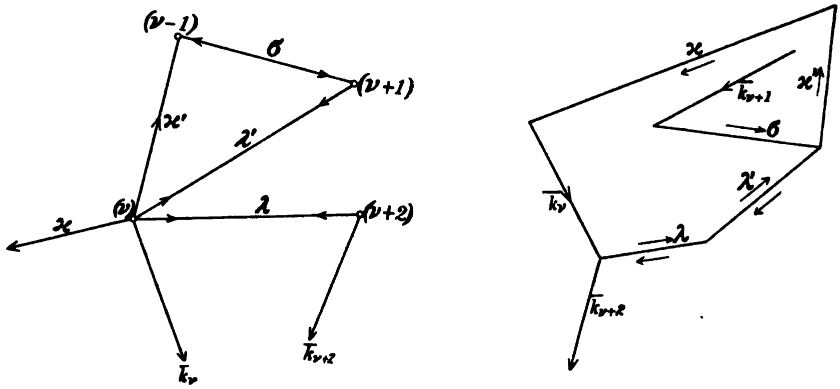


Fig. 149.

sind schon λ, λ' und σ, und zwar gehen, da der Satz für alle auf (ν) folgenden Knoten richtig sein sollte,

λ, λ' durch eine Ecke,
λ, $k_{\nu+2}$ durch eine Ecke,
σ, $k_{\nu+1}$ durch eine Ecke,
σ, λ' durch eine Ecke.

Man kann nun sofort 1. und 5. dadurch erfüllen, daß man $\bar{k}_\nu$ in die Ecke $\bar{k}_{\nu+2}$ mit λ münden läßt, so daß $\bar{k}_\nu$ und $\bar{k}_{\nu+2}$ fortlaufenden Pfeilsinn haben. Um 2. zu erfüllen, hat man durch die Ecke von σ mit λ' eine Parallele zu $\varkappa'$ zu ziehen. Bedingung 3 befriedigt man dadurch, daß man durch das freie Ende von $\bar{k}_\nu$ eine Parallele zu $\varkappa$ zieht und diese mit der zu $\varkappa'$ schneidet, wodurch auch 4. erreicht ist

Tatsächlich bilden jetzt auch, wenn man $\varkappa$ und $\varkappa'$ einen geeigneten Sinn gibt, $\bar{k}_\nu$, λ, λ', $\varkappa'$, $\varkappa$ ein geschlossenes Polygon mit durchgehendem Pfeilsinn.

Der Beweis des Satzes ist damit erbracht.

Der Leser wird den Beweis am besten verstehen, wenn er selbst den Cremonaplan für ein beliebiges Dreiecksfachwerk durchkonstruiert. Da alle Dreiecksfachwerke vom selben Typus sind, ist der empirische Beweis an einem Beispiel für alle zwingend.

173. Reziproke Figuren. Zeichnet man in ein Dreiecksfachwerk noch das Seilpolygon ein, wobei die äußeren Kräfte in der Reihenfolge zu nehmen sind, wie man auf sie beim Umfahren des Gurtes stößt, und nimmt man zu den Dreiecken des Fachwerks das Seilpolygon und noch die Vierecke hinzu, welche aus zwei benachbarten äußeren Kräften, dem zugehörigen Seilstrahl und dem zugehörigen Gurtstab gebildet werden, ergänzt man schließlich den

Kräfteplan durch den Pol und die Polstrahlen, so läßt sich der Satz der vorhergehenden Nummer so aussprechen:

Zu jedem Dreiecksfachwerk gibt es einen Kräfteplan, so daß

1. den Linien der Fachwerksfigur parallele Linien des Kräfteplans ein-eindeutig entsprechen,

2. den Polygonen der einen Figur Eckpunkte der andern.

Man nennt nun Figuren, welche diese beiden Eigenschaften haben, reziproke Figuren. Ihre erste Theorie und Anwendung auf das Fachwerk stammt von Maxwell.

Maxwell zeigte auch, daß alle Fachwerke, welche sich als orthogonale Projektionen eines Eulerschen Polyeders auffassen lassen, einen reziproken Kräfteplan haben. Der Beweis dieses Satzes, den Cremona unter Benutzung des Nullsystems (siehe § 27) gab, ist äußerst einfach:

Man wähle nach Belieben ein Nullsystem, dessen Achse auf der Ebene des Fachwerks senkrecht stehe. Dem Polyeder, dessen Projektion unser Fachwerk ist, wird wieder eindeutig ein Polyeder zugeordnet, indem man jeder Ebene des ersteren ihren Nullpunkt, jedem Eckpunkt des ersteren seine Nullebene zuordnet. Betrachtet man aber den Schnitt g zweier Ebenen und die Verbindungsgerade g' ihrer Nullpunkte, so sind diese beiden Geraden nach den Sätzen des § 27 einander konjugiert.

Es wird also durch das Nullsystem dem einen Polyeder ein anderes so zugeordnet, daß entsprechende Kanten einander konjugiert sind und dabei den Ecken des einen die Flächen des anderen entsprechen. Projiziert man nun aber ein Nullsystem parallel zu seiner Achse (der Zentralachse) orthogonal auf eine Ebene, so gehen konjugierte Gerade in parallele über, wie unmittelbar daraus folgt, daß konjugierte Gerade mit der Zentralachse eine gemeinsame Normale haben.

Tatsächlich gehen also die beiden durch das Nullsystem einander zugeordneten Polyeder in reziproke Figuren über: nach Voraussetzung ist die eine unser Fachwerk mitsamt den äußeren Kräften und einem Seileck; die andere muß dann von selbst der Kräfteplan sein, da die beiden hinreichenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Linien des Kräftesystems sind den Linien des Fachwerks parallel.

2. Linien, welche im Fachwerk durch einen Punkt gehen, bilden im Kräfteplan ein geschlossenes Polygon (notwendige und hinreichende Gleichgewichtsbedingung).

Allerdings ist damit zunächst nur gezeigt, daß es bei noch offen gelassenen äußeren Kräften einen reziproken Kräfteplan gibt.

Der Satz bleibt aber auch richtig, wenn die äußeren Kräfte fest gegeben sind.

Um das einzusehen, denke man sich zunächst irgendeinen Kräfteplan gezeichnet, so wie ihn irgendeine Auffassung der Fachwerksfigur als Projektion eines Polyeders ergibt.

Nun zeichne man für jeden Knoten das Kräftepolygon den wirklichen äußeren Kräften entsprechend: dabei ordne man die Kräfte genau so wie in dem ersten Plan. Dann werden lauter Polygone entstehen, deren Seiten denen der ersten Polygone parallel und gleichgeordnet sind.

Daraus also folgt, daß sich die neuen Polygone genau so zusammenschieben lassen müssen wie die alten, d. h. daß ein Maxwellscher Kräfteplan entsteht.

Nicht alle Fachwerke sind Maxwellsche Fachwerke, d. h. solche, zu denen ein reziproker Kräfteplan existiert: wohl hat F. Schur den Satz bewiesen, daß es nach Einführung gewisser idealer Stäbe und idealer Knoten immer möglich ist, einen reziproken Kräfteplan zu zeichnen. Darauf können wir hier nicht näher eingehen. Ebenso müssen wir die Methoden von Mohr und Müller-Breslau unbesprochen lassen, desgleichen die Theorie der räumlichen Fachwerke, die der statisch unbestimmten Fachwerke, sowie die Theorie der Nebenspannungen. Dagegen behandeln wir noch

174. Die Methode der Stabvertauschung nach Henneberg. Angenommen, man könne ein statisch bestimmtes Fachwerk dadurch auf ein anderes zurückführen, für welches man irgendwie die Spannungen bestimmen kann, daß man einen Stab (a) durch einen anderen (b) ersetzt. Dann kommt man durch folgende Schritte zum Ziel:

1. Man nehme die Vertauschung vor und bestimme die Spannungen aus den gegebenen äußeren Kräften: o in (a), B' in (b), S' in den anderen Stäben. (Zug etwa positiv, Druck negativ gerechnet.)

2. Man lasse alle äußeren Kräfte k fort, dafür aber willkürlich in der Linie von (a) auf beide Knoten den Zug 1 als äußere Kraft wirken und bestimme abermals die Spannungen: 1 in (a); B'' in (b); S'' in den anderen Stäben.

3. Da die Gleichgewichtsbedingungen lauter lineare Gleichungen in den Spannungen sind, so bilden bei willkürlichem λ die $S' + \lambda S''$ ein Spannungssystem, das ebenfalls zu den äußeren Kräften $\bar{k}$ gehört, wobei in (a) die Spannung λ, in (b) die Spannung $B' + \lambda B''$ herrscht.

4. Man bestimme endlich λ so, daß in dem Zusatzstab (b) keine Spannung herrscht, also $B' + \lambda B'' = 0$, d. h. $\lambda = -\frac{B'}{B''}$ ist. Dieses λ ist dann die wahre Spannung in (a), sowie die $S' + \lambda S''$ die wahren Spannungen in den anderen Stäben sind.

174a. Literatur. Einen Überblick findet man in dem Artikel von Henneberg: „Die graphische Statik der starren Körper.“ Enzykl. Bd. IV, Art. 5.

Die hauptsächlichsten Publikationen seien genannt:

J. C. Maxwell: Abhandlungen (1869 bis 1876) in den „Scientific Papers“ (Cambridge 1890).

Cremona: „Le figure reciproche nella statica grafica.“ 1872. Mit Zusätzen unter dem Titel „Les figures réciproques de statique graphique“. 1885.

Föppl: „Theorie des Fachwerks“ und „Das Fachwerk im Raume“. 1892.

O. Mohr: Verschiedene Publikationen (1874 bis 1887), zusammengestellt in den „Gesammelten Abhandlungen“.

A. Ritter: „Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenkonstruktionen.“ 1863.

Müller-Breslau: „Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen“. 1886. „Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks“ im Zentralblatt der Bauverwaltung 12 (1892).

F. Schur: „Über ebene einfache Fachwerke.“ Math. Annalen 48 (1897). „Über die reziproken Figuren der graphischen Statik.“ Ztschr. f. Math. u. Physik, Bd. 40 (1895).

Wieghardt: Diss., Göttingen 1903 („Schlaffe Diagonalen“). Auszug im Zentralbl. d. Bauverw. 1903. Weitere Arbeiten (über hochgradig statisch unbest. Fachwerke) in den Mitt. d. Ver. z. Ref. d. Gewerbfl. 1906 und Z. f. Math. u. Phys., Bd. 53 (1906).

Die Theorie der Nebenspannungen wurde von Engesser (Z. f. Baukunde 1879, Z. d. V. d. Ing. 1888), von Manderla (Allg. Bauzeitung 1880 und 1886), sowie von Mohr (Ziv.-Ing. 1892, 1893) begründet.

Von Lehrbüchern seien genannt:

A. Föppl: „Vorlesungen über technische Mechanik“, Bd. II.

Henneberg: „Statik der starren Systeme.“

Müller-Breslau: „Die graphische Statik der Baukonstruktionen.“

Schlink: „Statik der Raumfachwerke.“

§ 35. Elemente der Gewölbetheorie.

175. Gleichgewicht eines Keilsystems. Stellen wir uns vor, daß wir eine Reihe prismatischer starrer Körper haben, die so geordnet sind, daß der n^{te} den $(n-1)^{\text{ten}}$ und $(n+1)^{\text{ten}}$ in je einer ebenen Fläche berührt. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß die Fugen (Berührungsflächen) alle auf einer Ebene senkrecht stehen und daß sich die für das ganze System äußeren Kräfte auf Kräfte in derselben Ebene reduzieren lassen, so daß wir ein ebenes Problem vor uns haben.

Das Ganze sei an beiden Enden durch feste Unterlagen gestützt: zwischen den starren Körpern untereinander und zwischen ihnen und den Unterlagen seien nur Normaldruck und Reibung wirksam.

Dann haben wir ein Keilsystem vor uns, das als Modell eines Tonnengewölbes aus Hausteinen gelten kann. Von Mörtel ist abgesehen, man könnte ihn aber sehr leicht berücksichtigen durch Annahme eines größern Reibungskoeffizienten. Denn auf Zug läßt man Mörtel in der Praxis wohl nie beanspruchen.

Die Körper seien mit $1 \ldots n$ bezeichnet, die Fugen mit 0 bis n, die Resultierende der auf den ν^{ten} Körper wirkenden äußeren Kräfte mit Ausnahme der zwischen den Körpern wirksamen Druck- und Reibungskräfte sei $\bar{k}_\nu$. (Eingerechnet also Eigengewicht, Belastung, Winddruck usw.)

Setzen wir nun an jeder Fuge (ν) Normaldruck und Reibung, welche vom $(\nu-1)^{\text{ten}}$ auf den $(\nu)^{\text{ten}}$ Körper ausgeübt werden, zu einer Resultierenden $\bar{D}_\nu$ zusammen, so steht der ν^{te} Körper unter Einwirkung dreier Kräfte: $\bar{D}_\nu$, $\bar{k}_\nu$ und $-\bar{D}_{\nu+1}$. Es müssen also diese drei Kräfte durch einen Punkt S_ν gehen.

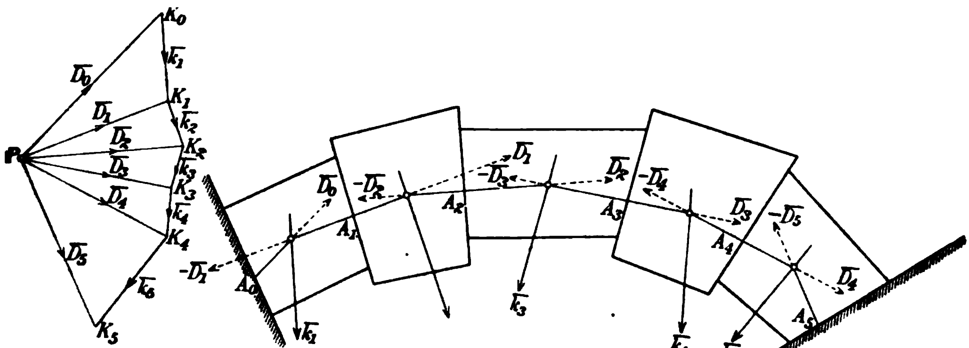


Fig. 150.

Des weiteren aber müssen sie nach Richtung und Größe aneinander gereiht ein geschlossenes Dreieck geben. Man erkennt daraus sofort: Fängt man an, diese beiden Bedingungen vom ersten Körper an bis zum letzten der Reihe nach zu erfüllen, so erhält man einen gebrochenen Polygonzug $S_1 S_2 \ldots S_n$ mit den Ecken auf den Angriffsgeraden der Kräfte, während im Krafteck $K_0 \ldots K_n$ alle Kräfte $\bar{D}$ von einem Punkte P ausgehen. Dabei sind die $\bar{D}$, d. h. die Strecken PK den Strecken des Polygons $S_1 \ldots S_n$ parallel.

Die Beziehung beider Figuren zueinander ist also genau die eines Seilecks zu einem Poleck.

Außer den bisherigen Bedingungen sind aber noch zwei Reihen von Ungleichheiten zu erfüllen: 1. Die Normaldrucke zwischen den einzelnen Körpern müssen Drucke im eigentlichen Sinne sein. Daraus folgt: a) $\bar{D}_\nu$ muß an der ν^{ten} Fuge vom $(\nu-1)^{\text{ten}}$ auf den ν^{ten} Körper zugerichtet sein. b) Der Angriffspunkt A_ν von $\bar{D}_\nu$ in der ν^{ten} Fuge muß innerhalb der Fuge, d. h. innerhalb der wirklichen Berührungsfläche der beiden Körper liegen (siehe den Satz über parallele Kräfte, Nr. 135). 2. Es dürfen die Druckkräfte $\bar{D}$ von den Normalen der Fugen höchstens um den Reibungswinkel φ abweichen.

Diese Bedingungen sind nun auch hinreichend, sofern die Hypothese der starren Körper zulässig ist.

Wir können also zusammenfassen:

Damit das in Rede stehende Keilsystem (Gewölbe) im Gleichgewicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß sich 1. im Polygon $K_0 \dots K_n$ der äußeren Kräfte $\bar{k}_1 \dots \bar{k}_n$ ein Pol P so finden lasse, daß jeder Polstrahl PK_ν mit der Normalen der ν^{ten} Fuge einen Winkel kleiner als den Reibungswinkel einschließt und vom $(\nu - 1)^{\text{ten}}$ auf den ν^{ten} Körper zugerichtet sei. und daß sich 2. zu wenigstens einem den Bedingungen 1. genügenden Pol P ein Seilpolygon so finden lasse, daß dasselbe die Berührungsebenen zwischen den Körpern noch innerhalb der Fugen trifft.

Um die Erfüllbarkeit dieser Bedingungen zu konstatieren, wird man damit beginnen, durch jeden Punkt K_ν des Kraftecks nach der erlaubten Seite hin die Hälfte des Reibungskegels zu zeichnen: Diese Kegel müssen dann ein gemeinsames Gebiet haben und in diesem kann zunächst P noch willkürlich gewählt werden. Es muß sich dann aber zu einem dieser P ein Seilpolygon ziehen lassen, das den Bedingungen 2. genügt.

Man wird zu dem Zweck extreme Fälle probieren, z. B. nachsehen. ob ein sehr steiles Seilpolygon (P möglichst nahe an $K_0 \dots K_n$) im obersten Punkte der 0^{ten} Fuge angefangen, jede Fugenebene oberhalb des tiefsten Punktes schneidet, oder ob ein eventuell vorhandenes flachstes Seilpolygon (P möglichst weit weg von $K_0 \dots K_n$), angefangen vom tiefsten Punkte der $(0)^{\text{ten}}$ Fuge jede Fuge unterhalb ihres höchsten Punktes trifft. In ähnlicher Weise wird man noch in manchen Fällen die Möglichkeit des Gleichgewichtes direkt einsehen können oder sonst irgendwie probieren, ob man ein Seilpolygon ziehen kann, das der Bedingung 2. genügt. Man sieht, daß das Problem im allgemeinen dreifach statisch unbestimmt ist: man hat innerhalb eines gewissen Bereiches die Lage von P frei und den Anfangspunkt A_0 des Seilecks.

Man muß aber nicht glauben, daß nun irgendein Seilpolygon, das den genannten Bedingungen genügt, das wirkliche Druckpolygon sei, d. h. daß die PK_ν die wirklichen Drucke $\bar{D}$ und die Punkte A_ν ihre wirklichen Angriffspunkte (die sogenannten Druckmittelpunkte) darstellen. Die Hypothese des starren Körpers gibt nur eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit von Polygonen, unter denen das richtige auszusuchen eine Aufgabe der Elastizitätstheorie ist. Diese Aufgabe geht aber über den Rahmen dieses Buches hinaus. (Man findet darüber einiges in Föppl, II.)

176. Druckkurve und Stützlinie. Wir wollen die Idealisierung betrachten, daß wir uns das Gewölbe aus einer unendlichen Anzahl unendlich schmaler starrer Körper (unendlich dünner Platten) mit der Belastung $d\bar{k}$ vorstellen. Dieser Grenzübergang wird dann praktisch sein, wenn das Gewölbe tatsächlich aus sehr vielen kleinen Steinen (Ziegeln) besteht.

Bei diesem Grenzübergang gibt das Druckpolygon zum Entstehen zweier Kurven Anlaß: 1. die unendliche Mannigfaltigkeit der Druckmittelpunkte A wird eine stetige Kurve ergeben, die sogenannte Stützlinie des Gewölbes (line of resistance nach Moseley, dem Begründer der Theorie): ihr Schnittpunkt mit einer Fuge gibt den Angriffspunkt des resultierenden Druckes $\bar{D}$ in der Fuge. 2. Die unendliche Mannigfaltigkeit der Punkte S, also der Eckpunkte des Druckpolygons auf den Angriffsgraden der Kräfte $\bar{k}$ wird ebenfalls eine stetige Kurve ergeben, die sogenannte Drucklinie (line of pressure): sie wird von den Drucken $\bar{D}$ berührt werden, und zwar in dem Punkte S, in dem diejenige Kraft $d\bar{k}$ die Drucklinie schneidet, welche zu demselben unendlich schmalen Körper zugehört wie der Druck $\bar{D}$.

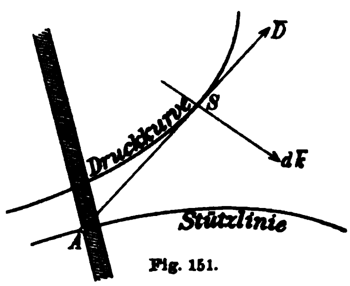


Fig. 151.

Im Gleichgewichtsfalle muß die Stützlinie die Fugen, das sind die Flächen zwischen den unendlich schmalen Teilkörpern, innerhalb schneiden.

Es ist der Irrtum weit verbreitet, als fielen Druckkurve und Stützlinie immer zusammen. Das kann vorkommen, wird aber die Ausnahme sein.

Die Bedingung dafür, daß Druckkurve und Stützlinie zusammenfallen, läßt sich leicht angeben: es muß in der Grenze die Angriffslinie der Kraft $d\bar{k}$ durch den Schnittpunkt A der Stützlinie mit der Fuge hindurchgehen.

Dann wird S in A hineinfallen müssen. Denn wäre das nicht der Fall: ginge in der Grenze $d\bar{k}$ durch A hindurch, läge aber S irgendwo anders auf $d\bar{k}$, so wäre $d\bar{k}$ zugleich die Richtung des Druckes $\bar{D}$. Das geht aber nicht: denn es müssen ja die $\bar{D}$ im Krafteck durch einen Punkt gehen, es müßte also P auf $K_0 \ldots K_n$ liegen und die Kurve zugleich geradlinig sein, d. h. alle $d\bar{k}$ einander parallel. Fallen dann auch ihre Angriffsgeraden zusammen, so ist diese gemeinsame Gerade zugleich Druckkurve und Stützlinie, wie ja sofort klar ist; fallen aber die Angriffsgeraden auseinander, so kann $d\bar{k}$ nicht durch A hindurch gehen.

Denn zeichnen wir die Kräfte $d\bar{k}$ und $\bar{D}$ etwa vertikal und ziehen x horizontal von $\bar{D}_0$ an gerechnet; sei z die horizontale Abszisse des

Punktes A, also auch der horizontale Abstand der Kraft $\bar{D}$ von $\bar{D}_0$, so muß nach dem Momentensatz für das Teilsystem auf der einen Seite von A bezogen auf den Punkt A

$$D_0 z + \int_0^z (z - x)\,d k = 0$$

sein, wobei die dk positiv sind.

Differentiieren wir nach z, so erhalten wir

$$D_0 + \int_0^z d k = 0,$$

was unmöglich ist, da D_0 konstant ist, $\int_0^z dk$ mit z wächst.

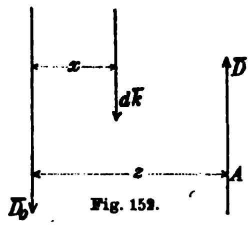


Fig. 152.

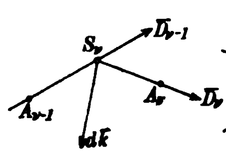


Fig. 153 a.

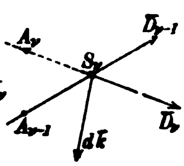


Fig. 153 b.

Man kann die Bedingung, daß Druckkurve uud Stützlinie zusammenfallen, auch so formulieren: es muß vor dem Grenzübergang das Dreieck $A_{\nu-1}S_\nu A_\nu$ bei S einen stumpfen Winkel haben.

Das sieht man so ein: Da sich in der Grenze $\bar{D}_\nu$ gegen $\bar{D}_{\nu-1}$ nur um den kleinen Vektor $d\bar{k}$ ändert, so bilden $\bar{D}_\nu$ und $\bar{D}_{\nu-1}$ sicher einen spitzen Winkel miteinander, aber $d\bar{k}$ fällt in den stumpfen Winkel hinein, weil es die Differenz von $\bar{D}_\nu$ und $\bar{D}_{\nu-1}$ ist.

Ist also das Dreieck $A_{\nu-1}$, A_ν, S bei S stumpf, so muß $d\bar{k}$ die Seite $A_{\nu-1}A_\nu$ schneiden und folglich in der Grenze $A_{\nu-1}$, S_ν und A_ν, d. h. S und A zusammenrücken (Fig. 153a). Ist aber das Dreieck $A_{\nu-1}S_\nu A_\nu$ spitz, so schneidet $d\bar{k}$ die Strecke $A_\nu A_{\nu-1}$ nicht und es werden in der Grenze wohl A und $A_{\nu-1}$ zu einem Punkte A zusammenrücken, S aber nicht. Im Gegenteil, da der Winkel $A_{\nu-1}SA_\nu$ unendlich klein wird wie $d\bar{k}$, dieses aber mindestens so stark unendlich klein werden wird wie die Breite $A_\nu A_{\nu-1}$ des starren Körpers, so wird $S_\nu A_\nu$ endlich bleiben müssen, da sonst $\sphericalangle\, A_{\nu-1}SA_\nu$ und somit auch $d\bar{k}$ weniger stark unendlich klein werden könnten wie $A_\nu A_{\nu-1}$, d. h. die Breite des starren Körpers, dessen spezifische Belastung dann unendlich würde, was wir im allgemeinen jedenfalls ausschließen müssen.

Es gibt einen Fall, in dem man von vornherein sicher das Zusammenfallen von Druckkurve und Stützlinie behaupten kann: wenn nämlich die Kräfte $d\bar{k}$ mit ihren Angriffslinien ganz in die unendlich schmalen Teilkörper hineinfallen. Wir wollen ein solches Beispiel behandeln:

177. Beispiel des Parabelbogens. Es seien die Fugen vertikal und auch die Belastungen vertikal. Die spezifische Belastung pro Einheit der Horizontalen sei konstant:

$$dk = \varkappa dx,$$

wenn dx die Breite eines Teilkörpers bedeutet, $\varkappa$ konstant. Die Dicke des Gewölbes, vertikal gemessen, sei konstant gleich a. Die äußere Form des Gewölbes sei eine Parabel, h sei die Scheitelhöhe.

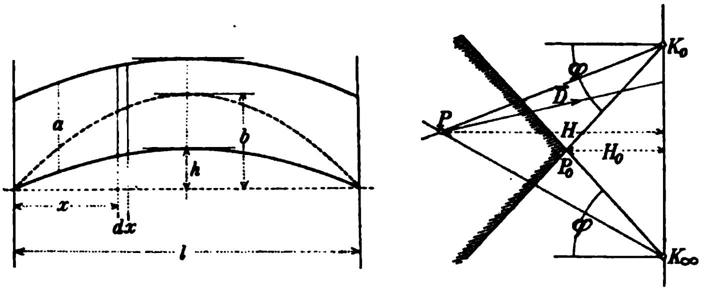


Fig. 154.

Das erlaubte Gebiet für die Punkte P wird man erhalten, wenn man durch die Endpunkte K_0 und K_∞ des Kraftecks (es ist $K_0 K_\infty = \int_0^l \varkappa dx$!) die Reibungskegel nach links zeichnet — wir fangen die Schichten von links an zu zählen — und ihr gemeinsames Gebiet sucht. Es wird dies das schraffierte Gebiet sein, P_0 mit der Poldistanz H_0 wird die nächste Lage des Pols P an $K_0 K_\infty$ angeben, H_0 die kleinste Poldistanz H sein, die möglich ist.

Setzen wir

$$\int_0^l \varkappa dx = L,$$

so daß L die gesamte Belastung bedeutet, so ist nach der Fig. 154

$$f = \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} \frac{L}{H_0},$$

also

$$H \geqq \frac{1}{2} \frac{L}{f}. \tag{A}$$

Nun bedeutet H die Horizontalkomponente aller D, den sogenannten Horizontaldruck im Gewölbe. Damit Gleichgewicht möglich ist, muß also zunächst einmal dieser Horizontaldruck hinreichend groß sein, wie es die Ungleichung (A) verlangt.

Die Druckkurve wird nun eine Parabel sein, denn wir wissen ja (Nr. 164), daß bei konstanter spezifischer Belastung die Seilkurve eine Parabel ergibt.

Ihre Differentialgleichung ist

$$H\frac{d^2z}{dx^2} = -\varkappa,$$

also

$$z = \frac{1}{2H}\varkappa(-x^2 + lx).$$

Die Scheitelhöhe der Parabel über der Schnittlinie ist also

$$b = (z)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{1}{8}\frac{\varkappa l^2}{H}.$$

Nun darf die steilste Parabel $\left(H = H_0 = \frac{1}{2}\frac{L}{f}\right)$, begonnen im höchsten Punkte der linken Seite nicht unter dem höchsten Innenpunkt des Gewölbes bleiben, es muß also für $H = H_0$

$$a + b > h$$

sein, d. h.

$$a + \frac{1}{8}\frac{\varkappa l^2}{\frac{1}{2}\frac{L}{f}} > h$$

oder da $L = \varkappa l$ ist,

$$h < a + \frac{1}{4} fl. \tag{B}$$

Daß die flachste Parabel (die gerade Linie für $H = \infty$) angefangen im tiefsten Punkte des linken Lagers nicht über den höchsten Punkt des Gewölbes hinausgehen kann, ist klar.

Man überblickt nun ohne weiteres, daß wenn (B) erfüllt ist, immer eine Parabel möglich ist, welche den Anforderungen an eine Stütz- und Drucklinie entspricht.

In der Praxis wird man natürlich zu vermeiden suchen, daß der Druckmittelpunkt zu nahe an den Rand einer Fuge fällt, da dann der Stein an der Kante zu stark beansprucht wird. Man wird entsprechend mit einem kleineren a rechnen. Und ebenso wird man natürlich hinsichtlich f genügend weit unter dem wahren, aber unsicheren und schwankenden Werte bleiben.

§ 36. Faden und Seil.

178. Das allgemeine Erstarrungsprinzip der Statik. Axiom VIII: Haben wir ein ganz beliebiges mechanisches System, auf welches nach den Ausführungen des ersten Kapitels räumlich verteilte Kräfte $d\bar{k} = \bar{\varkappa}dV$ wirken und an jedem Flächenelement im Innern und an der Oberfläche Spannungen (Drucke im allgemeinen Sinne) $\bar{\sigma}dF$ vorhanden sind, so ist es wohl ganz plausibel, daß im Gleichgewichtsfalle für jeden herausgeschnittenen Teil die Summe der äußeren Kräfte und die Summe ihrer Momente verschwinden muß, wobei unter den äußeren Kräften die an dem Teil angreifenden, räumlich verteilten Kräfte und die an seiner Oberfläche wirkenden Druckkräfte zu verstehen sind. D. h. das Gleichgewicht wird nicht gestört, wenn man sich den betreffenden Teil erstarrt denkt.

Die Entwicklung der Mechanik hat aber in Übereinstimmung mit der Erfahrung auch gezeigt, daß dieses Prinzip hinreichend ist; wir sprechen demnach als ein neues Grundprinzip der Mechanik das Axiom aus:

Axiom VIII (Erstarrungsprinzip): Damit ein beliebiges mechanisches System im Gleichgewicht sei, ist hinreichend und notwendig, daß für jeden seiner Teile die Summe der für den Teil äußeren Kräfte und die Summe ihrer Momente verschwinde.

Die allgemeinen Folgerungen aus diesem Prinzip werden wir erst im dritten Abschnitt (Nr. 204 und 209) kennen lernen. Es soll jetzt nur eine spezielle Anwendung folgen.

179. Der vollkommen biegsame Faden. Wir haben uns vorläufig mit dem vollkommen biegsamen Faden schon in Nr. 65 beschäftigt und wollen nun die dortigen Ausführungen etwas tiefer begründen.

Wir verstehen unter einem Faden oder Seil einen Körper mit einer ausgezeichneten Kurve, seiner Mittellinie oder Achse, welche jede Lage annehmen kann. Der Faden heißt unausdehnbar, wenn die Mittellinie in allen Teilen unveränderliche Länge besitzt.

Wir setzen weiter voraus, daß sich die äußeren Kräfte, welche auf den Faden wirken, für jeden durch zwei zur Achse senkrechte, unendlich benachbarte Schnittebenen herausgegriffenen Teil auf eine Einzelkraft

$$d\bar{k} = \bar{\varkappa}\, ds$$

reduzieren lassen, welche in der Achse, und zwari nnerhalb des Bogenstückes ds der Achse angreift, das zwischen jenen benachbarten Schnittebenen liegt. Wir nennen nun das Seil vollkommen biegsam, wenn bei der Reduktion der inneren Spannungen an einem ebenen Querschnitt senkrecht zur Achse in bezug auf den Schnittpunkt der Achse mit dem Querschnitt ein Biegungsmoment von vornherein als ausgeschlossen angesehen wird (siehe die Definitionen von Nr. 157): Das Seil setzt einer Verbiegung gar keinen Widerstand entgegen.

Wir erweitern unsere Voraussetzungen dahin, daß auch kein Torsionsmoment da sein soll, daß sich also der Faden auch beliebig leicht und widerstandslos verdrehen läßt.

Wir wollen beweisen, daß dann auch keine Schubspannung da sein kann, so daß sich die ganze innere Spannung in einem Querschnitt auf eine Kraft in Richtung der Achse reduziert. Endlich und zuletzt setzen wir diese Spannung als einen Zug voraus und nennen ihn S.

Man könnte auch ruhig einen Druck als möglich annehmen: eine allerdings erst mit den Mitteln der Kinetik mögliche Betrachtung würde zeigen, daß entsprechende Gleichgewichtszustände wohl möglich, aber äußerst unstabil wären, d. h. bei der geringsten Störung eine radikale Änderung der Konfiguration eintreten würde, so daß praktisch dieser Fall unmöglich ist.

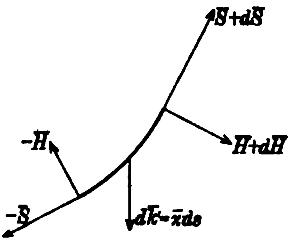


Fig. 155.

Wir beweisen nun den Satz, daß eine Schubspannung unmöglich ist.

Betrachten wir ein Fadenstück von der Länge ds, an einem Ende seien die Spannungen $\overline{H}$ und $\overline{S}$, am andern Ende $\overline{H}+d\overline{H}$, $\overline{S}+d\overline{S}$; $\overline{H}$ bzw. $\overline{H}+d\overline{H}$ seien die Schubspannungen.

Wenden wir nun das Erstarrungsprinzip auf unser Fadenstück ds an und wählen den Anfangspunkt O zum Bezugspunkt, so ergibt der Momentensatz

$$\overline{\overline{ds}(\overline{S}+d\overline{S}+\overline{H}+d\overline{H})}+\overline{\overline{ds'}\overline{\varkappa}}\cdot ds=0,$$

wo $d\overline{s}$ der Vektor der Sehne, $d\overline{s}'$ der Vektor von O bis zum Angriffspunkte der Kraft $d\overline{k}$ ist.

Das letzte Glied ist nun zweiter Ordnung unendlich klein, also gegen das erste wegzulassen, $\overline{\overline{ds}(\overline{S}+d\overline{S})}$ ist auch unendlich klein zweiter Ordnung, denn es ist außer ds auch noch proportional dem Sinus des unendlich kleinen Winkels, den $d\overline{s}$ mit der Richtung von $\overline{S}+d\overline{S}$ einschließt. Also bleibt

$$\overline{\overline{ds}\overline{H}}=0.$$

Da $\overline{H}$ auf $\overline{ds}$ senkrecht steht, so kann dieses äußere Produkt nur verschwinden, wenn

$$H=0$$

ist. W. z. b. w.

179 b. Fortsetzung. Setzen wir in analoger Weise auch die Summe der Kräfte gleich Null, so bekommen wir

$$(\overline{S}+d\overline{S})-\overline{S}+\overline{\varkappa}ds=0,$$

(denn da $\overline{S}$ die Zugkraft des Fadenstückes mit größerem s auf das Stück mit kleinerem s ist, so wirkt am Anfangspunkt von ds nach dem Gegenwirkungsprinzip $-\overline{S}$, am Endpunkt der Zug, der aus $\overline{S}$ beim Fortgang um ds entsteht, d. i. $\overline{S}+d\overline{S}$), d. h.

$$\frac{d\overline{S}}{ds}+\overline{\varkappa}=0. \tag{I}$$

Dies ist die hinreichende und notwendige Bedingung des Gleichgewichts, denn es folgt daraus schon das Erstarrungsprinzip für jeden endlichen Teil.

Integrieren wir nämlich (I) über ein Kurvenstück AB, so erhalten wir

$$\bar{S}\,\Big|_A^B + \int_A^B \bar{\varkappa}\,ds = 0.$$

Das heißt aber bereits, daß die Summe der äußeren Kräfte verschwindet.

Bilden wir von (I) das Momentprodukt mit $\bar{r}$ und integrieren, so erhalten wir

$$\int_A^B \overline{r\,d\bar{S}} \mp \int_A^B \overline{r\varkappa}\,ds = 0.$$

Nun ist aber

$$\overline{r\,d\bar{S}} = d(\overline{r\bar{S}}) - \overline{\bar{S}\,dr}.$$

Es ist aber $\overline{\bar{S}\,dr} = 0$, weil $\bar{S}$ und $d\bar{r}$ dieselbe Richtung haben. Also bleibt

$$\overline{r\bar{S}}\,\Big|_A^B + \int_A^B \overline{r\varkappa}\,ds = 0,$$

d. h. die Summe der Momente der äußeren Kräfte verschwindet.

Sei jetzt $\bar{\sigma}$ ein Einheitsvektor in Richtung wachsender s, also

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\sigma},$$

so ist

$$\bar{S} = S \cdot \bar{\sigma}$$

und aus (I) wird nach Ausführung der Differentiation

$$\bar{\sigma}\,\frac{dS}{ds} + S\,\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = -\,\bar{\varkappa}.$$

Nun haben wir aber früher gezeigt (Nr. 26), daß

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = \bar{\nu} \cdot \frac{1}{\varrho},$$

wenn $\bar{\nu}$ den Einheitsvektor in der Richtung der Hauptnormalen, ϱ den Krümmungsradius bedeutet. Somit bekommen wir

$$\bar{\sigma}\,\frac{dS}{ds} + \frac{1}{\varrho}\,S \cdot \bar{\nu} = -\,\bar{\varkappa}. \tag{I'}$$

Zerlegen wir die Gleichung nach dem natürlichen Koordinatensystem der Kurve (siehe Nr. 26), habe $\bar{\varkappa}$ die Komponenten $\varkappa_\sigma$, $\varkappa_\nu$, $\varkappa_{\nu'}$ nach Tangente, Hauptnormale und Binormale, so folgt

$$\left.\begin{aligned} \frac{dS}{ds} &= -\varkappa_\sigma, \\ \frac{1}{\varrho} S &= -\varkappa_\nu, \\ 0 &= -\varkappa_{\nu'} \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I}'')$$

d. h. *der Faden legt sich stets so, daß die ganze äußere Kraft in die Schmiegungsebene hineinfällt. Die tangentiale Komponente der äußeren Kraft bewirkt dann eine Veränderung der Spannung, die normale bei gegebener Spannung die Krümmung.*

180. Spezialfälle. a) Wenn keine längs des Seils verteilte Kraft da ist, wenn also insbesondere das Seil masselos (gewichtslos) ist, so ist $\bar{\varkappa} = 0$ und die Gleichungen (I'') ergeben:

1. $S = \text{const.}$; das Seil leitet die Spannung ungeändert weiter. Dies gilt natürlich stets, wenn $\varkappa_\sigma = 0$ ist, also auch, wenn ein masseloses Seil über eine glatte Fläche gespannt wird, wo dann von der Fläche auf das Seil nur ein Druck senkrecht zur Fläche, also auch senkrecht zur Seilrichtung ausgeübt wird.

2. $\frac{1}{\varrho} = 0$, d. h. das Seil ist geradlinig ausgespannt. Damit sind die Betrachtungen von Nr. 65 auf eine sichere Basis gestellt.

Aus der dritten Gleichung folgt für ein Seil, das masselos ist und über eine glatte Fläche gespannt wird, noch folgendes: die Schmiegungsebene der Seilkurve enthält stets die Flächennormale als Richtung von $\bar{\varkappa}$, dem spezifischen Normaldruck; diese Eigenschaft kommt aber auf den Flächen nur den geodätischen Linien zu, also *legt sich ein gespannter Faden auf einer glatten Fläche in eine geodätische Linie,* wenn er außer Normaldruck und Spannung keinen Kräften unterworfen ist.

b) Es sei die Belastung des Seils abwärts gerichtet und konstant pro Einheit der Horizontalprojektion.

Ist dx die Horizontalprojektion von ds, so heißt das

$$dk = \varkappa ds = \varkappa' dx,$$

wo $\varkappa'$ konstant ist.

Ist die Belastung von fester Richtung, so ist die Seilkurve stets eben. Denn dann ist die Schmiegungsebene, welche ja $d\bar{k}$ enthält, auch stets vertikal (dies sei etwa die feste Richtung von $d\bar{k}$); es schneiden sich aber nach Definition der Schmiegungsebene zwei benachbarte Schmiegungsebenen stets in der Tangente, wenn sie nicht zusammenfallen, die Kurve also eben ist. Demnach wäre die Tangente der Kurve vertikal, die Kurve selbst eine vertikale Grade, die aber auch als eben zu bezeichnen ist.

Sei nun y die Richtung nach oben, ϑ der Winkel der Tangente der Kurve mit der Horizontalen, so gibt die Zerlegung der Gleichung (I) selbst nach der Horizontalen und Vertikalen, wenn jetzt H die Horizontal-, V die Vertikalkomponente von $\bar{S}$ bedeutet,

$$\frac{dH}{ds} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{dV}{ds} = \varkappa \quad \text{oder} \quad dV = \varkappa ds. \tag{2}$$

Dazu kommt nach der Bedeutung von H und V

$$\frac{V}{H} = \operatorname{tg}\vartheta = \frac{dy}{dx}. \tag{3}$$

Gleichung (1) gibt (immer bei vertikaler Belastung)

$$H = H_0,$$

Bei vertikaler Belastung ist die Horizontalkomponente der Spannung konstant. Ist nun die Belastung konstant pro Einheit der Horizontalprojektion, also

$$\varkappa ds = \varkappa' dx,$$

wo $\varkappa'$ konstant, $= \gamma$, so gibt (2)

$$\frac{dV}{dx} = \gamma,$$

$$V = \gamma x + V_0.$$

Somit nach (3)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\gamma x + V_0}{H_0},$$

d. h.

$$y = y_0 + \frac{V_0}{H_0} x + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{H_0} x^2,$$

die Kurve ist eine Parabel.

Legen wir den Anfang des Koordinatensystems in den tiefsten Punkt der Kurve, so ist

$$y = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{H_0} x^2.$$

Sind die Enden des Seils in gleicher Höhe, ist l die Spannweite, h die maximale Durchbiegung, so muß für $y = h$, $x = \frac{l}{2}$ sein, d. h.

$$h = \frac{1}{8} \frac{\gamma l^2}{H_0}. \tag{A}$$

Man vergleiche das Resultat mit den Betrachtungen von Nr. 164 und 177. Denkt man an die mechanische Bedeutung des Seilpolygons (siehe Nr. 118), so hätte man das Resultat unserer jetzigen Betrachtung erwarten können.

c) Es sei die Belastung des Seils konstant pro Einheit der Seillänge selbst; das Seil sei etwa schwer und von konstantem spezifischem Gewicht.

Dann ist $\varkappa$ selbst konstant $= \gamma$.

$$H = H_0$$

bleibt. Dagegen wird, weil

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

und

$$\frac{dV}{ds} = \gamma,$$

$$dV = \gamma \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2} = \gamma dx \sqrt{1 + y'^2}.$$

Mit

$$V = H_0 y'$$

wird daraus

$$\frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{\gamma}{H_0} dx,$$

d. h.

$$\operatorname{ar\,sin\,hyp} \cdot y' = \frac{\gamma}{H_0} x + c,$$

$$y' = \sin\operatorname{hyp}\left(\frac{\gamma}{H_0} x + c\right),$$

$$y = \frac{H_0}{\gamma} \cos\operatorname{hyp}\left(\frac{\gamma}{H_0} x + c\right),$$

$$= \frac{H_0}{2\gamma}\left(e^{\frac{\gamma}{H_0} x + c} + e^{-\frac{\gamma}{H_0} x - c}\right).$$

Die Kurve ist die gewöhnliche Kettenlinie.

Bemerkung: Wenn im Falle c) das Seil sehr flach gespannt ist, so kann die Kettenlinie angenähert durch eine Parabel ersetzt werden. Denn dann ist y' klein gegen 1 und man kann die Gleichung

$$\frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{\gamma}{H_0} dx$$

durch die folgende ersetzen

$$dy' \doteq \frac{\gamma}{H_0} dx,$$

woraus sich ergibt

$$y \doteq \frac{1}{2} \frac{\gamma}{H_0} x^2 + c_1 x + c_2,$$

d. h. eine Parabel, die durch geeignete Wahl des Anfangspunktes des Koordinatensystems wieder auf die Form

$$y = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{H_0} x^2$$

gebracht werden kann (siehe Fall b).

Aus Gleichung (A) sieht man, daß die Parabel dann flach sein wird, wenn

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{8}\frac{\gamma l}{H_0} = \frac{1}{8}\frac{L}{H_0}$$

klein ist. $L = \gamma l$ ist die gesamte Belastung des Seiles.

Aufgabe 90: Wie stark muß ein Drahtseil von 20 m Länge gespannt werden, d. h. wie groß muß die Spannung im tiefsten Punkte sein, damit die Pfeilhöhe h nur 10 cm beträgt? Die Dicke des Seiles betrage 6 cm, das spezifische Gewicht des Materials sei 8.

180 a. Eulers Formel für die Spannung in Treibriemen. Ein Treibriemen (Seil) umfasse ein Rad mit dem Winkel α. Die Spannung an der Auflaufstelle sei S_1, an der Ablaufstelle S_2. Die Bewegung sei so langsam, daß wir das Problem als statisch behandeln dürfen (Korrektur siehe später in Nr. 347). Das dem Rad aufliegende Seilstück (Riemenstück) ist Normaldrucken dN und Haftreibungen dR unterworfen. (Von möglichen Schwingungen des Riemens und einem dadurch veranlaßten Abheben und Schlüpfen werde abgesehen. In Wahrheit machen sich oft derartige Störungen bemerkbar.) Das Eigengewicht des Riemens werde vernachlässigt.

Dann ist in den Formeln I″ aus Nr. 179: $-\varkappa_\nu > 0$, sonst unbekannt, nämlich der unbekannte spezifische Normaldruck, $\varkappa_\sigma$, die spezifische Reibung unbekannt; wohl weiß man, daß

$$|\varkappa_\sigma| \leqq f\,|\varkappa_\nu|;$$

ϱ ist konstant gleich dem Radius r der Riemenscheibe.

Dann folgt aus I″

$$\left|\frac{dS}{ds}\right| \leqq f\,|\varkappa_\nu| = f \cdot \frac{1}{r}\,S$$

oder, da $S > 0$,

$$\left|\frac{dS}{S}\right| \leqq f\,\frac{1}{r}\,ds,$$

$$\lg S_2 - \lg S_1 \leqq f\,\frac{1}{r}\,s = f\alpha,$$

$$S_1 e^{-f\alpha} \leqq S_2 \leqq S_1 e^{f\alpha} \quad \text{(Euler).}$$

Die Grenzen können gerade noch erreicht werden.

Ist z. B. eine Schnur ein paarmal (n mal) um einen Stab gewickelt, so kann die Spannung in dem einen Ende auf das $e^{f2\pi n}$-fache der Spannung in dem anderen Ende anwachsen. Da $e^{f\alpha}$ mit α sehr stark wächst, nimmt das Verhältnis $S_2 : S_1$ mit α sehr stark zu. Darauf beruht die Möglichkeit, schwere Lasten durch mehrmaliges Umschlingen eines Seiles um einen Stab (Pflock usw.) festzuhalten.

Auf eine Riemenscheibe kann also durch den Riemen im Maximum das Moment $(S_{2\,\max} - S_1)r = S_1 r(e^{f\alpha} - 1)$ übertragen werden.

181. Der Flaschenzug ist eine der vielen Vorrichtungen, die dazu dienen, um mit einer verhältnismäßig kleinen Kraft k große Lasten zu heben. Er besteht aus zwei Laschen, die übereinander geordnet je eine gleiche Anzahl (n) von Rollen tragen. Die obere Lasche ist befestigt, die untere, frei beweglich, trägt die Last L. Ein Seil, das an die obere Lasche geknüpft ist, wird der Reihe nach abwechselnd über alle $2n$ Rollen geschlungen, bis es von der obersten Rolle der obersten Lasche frei herabhängt, um als Handhabe der Kraft k zu dienen.

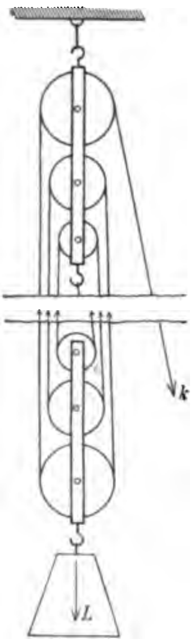


Fig. 156.

Wir wollen nun zunächst den Fall betrachten, daß sich die Rollen reibungsfrei drehen und daß die Seile vollkommen biegsam und masselos seien. Das Gewicht der unteren Lasche nebst ihren Rollen werde in L eingerechnet. Dann ist es leicht, die Frage zu beantworten, wann k und L sich das Gleichgewicht halten.

Nach den Voraussetzungen wird überall dieselbe Seilspannung $S = k$ herrschen: denn einmal wird nach der vorigen Nummer in jedem freien Seilstück die Spannung S ungeändert weitergeleitet, dann aber wird auch auf beiden Seiten einer Rolle dieselbe Spannung herrschen, wie man sofort aus dem Hebelsatz, angewendet auf eine Rolle, erkennt.

Legen wir nun einen Schnitt durch das System, der die untere Lasche von der oberen trennt, so trifft dieser Schnitt $2n$ Seile. Setzen wir die Summe der vertikalen Kräfte für den unteren Teil gleich Null, so erhalten wir

$$L = 2nS = 2nk,$$

$$k = \frac{1}{2n} L. \tag{A}$$

182. Berücksichtigung von Widerständen. Infolge der Widerstände, Zapfenreibung und Seilsteifigkeit wird die Seilspannung auf derjenigen Seite einer Rolle, nach welcher hin die Bewegung stattfindet, etwas größer sein als auf der anderen Seite. Dieser Unterschied kann erfahrungsgemäß der Seilspannung selbst proportional gesetzt werden — für die Zapfenreibung wissen wir es, für die Seilspannung soll es noch erörtert werden —, so daß die Spannung in dem Seilstück vor der obersten Rolle nicht k, sondern nur

$$k(1 - \varepsilon_1) = S_1$$

sein wird. ε_1 ist ein kleiner echter Bruch, über den wir noch reden werden. Ebenso ist dann in dem nächstfolgenden Seilstück die Spannung

$$k(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) \text{ usw.,}$$

in dem letzten, an der oberen Lasche befestigten Stück wird sie

$$k(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)\cdots(1-\varepsilon_{2n}) = S_{2n}$$

sein. Die Anwendung des Schnittprinzips ergibt jetzt

$$S_1 + \cdots + S_{2n} = L$$

oder

$$k[(1-\varepsilon_1) + (1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2) + \cdots] = L.$$

Die eckige Klammer besteht aus $2n$ echten Brüchen, ist also kleiner als $2n$. Es berechnet sich deshalb für k ein größerer Wert als aus der Formel (A); für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \cdots = \varepsilon_n = \varepsilon$ ergibt sich

$$k = \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)^{2n+1} - (1-\varepsilon)} L. \tag{B}$$

Was nun die ε angeht, so werden sie, wie gesagt, von zwei Ursachen herrühren, der Zapfenreibung und der Seilsteifigkeit. Die erstere Erscheinung ist uns bekannt (siehe Nr. 143); über die Wirkung der letzteren kann man sich folgende Vorstellung bilden:

Das Seil wird einer Änderung seiner Krümmung einen Widerstand entgegensetzen. Infolgedessen wird an den Stellen, wo das Seil auf die Rolle aufläuft bzw. von ihr abläuft, also eine Änderung der Krümmung stattfindet, ein Biegungswiderstand auftreten, der dem Sinne der Krümmungsänderung entgegengesetzt sein wird. Diese Momente B_2 und B_1 sind so in die Figur eingezeichnet, wie sie auf die Rolle zurückwirken. Der Sinn ergibt sich auch eindeutig dadurch, daß die B der Drehung der Rolle entgegengesetzt sein müssen.

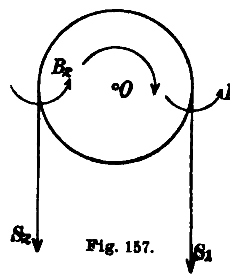


Fig. 157.

Definieren wir Längen r_1 und r_2 durch den Ansatz

$$B_1 = S_1 r_1,$$
$$B_2 = S_2 r_2$$

und sei R der Radius der Rolle, so wird der Momentensatz in bezug auf die Achse der Rolle geben:

$$S_2(R - r_2) - S_1(R + r_1) - (S_1 + S_2)\varrho = 0,$$

wenn ϱ den Radius des Reibungskreises bedeutet. Denn $D = S_1 + S_2$ ist die Belastung der Rolle, bis auf ihr meist zu vernachlässigendes Eigengewicht.

Daraus folgt

$$S_2 = S_1 \frac{R + r_1 + \varrho}{R - r_2 - \varrho}$$

und

$$S_2 - S_1 = S_1 \frac{r_1 + r_2 + 2\varrho}{R - r_2 - \varrho}.$$

$r_2 + \varrho$ wird klein gegen R sein; man kann deshalb mit Vernachlässigung von Größen zweiter Ordnung schreiben

$$S_2 - S_1 = S_1 \frac{(r_1 + r_2 + 2\varrho)}{R}$$

oder

$$S_2 = S_1(1 + \varepsilon),,$$

wo

$$\varepsilon = \frac{r_1 + r_2 + 2\varrho}{R} \tag{C}$$

ist. Über ϱ haben wir schon früher (Nr. 143, 145) gesprochen, es erübrigt sich, einiges über r_1 und r_2 zu bemerken.

183. Experimentelle Ergebnisse über die Seilsteifigkeit. Der erste, der experimentell die Seilsteifigkeit untersuchte, war Amontons (um 1700). Er fand, daß für dünne Seile $r_1 + r_2$ von der Spannung und dem Radius R der Rolle unabhängig, dagegen der Dicke der Seile direkt proportional war. Später nahm Coulomb die Versuche wieder auf (Théorie des machines simples, 1809). Es zeigte sich, daß $r_1 + r_2$ tatsächlich nur wenig mit der Spannung und dem Rollenradius schwankte, daß aber bei dickeren Seilen $r_1 + r_2$ einer höheren Potenz des Durchmessers proportional zu setzen war. Eine einfache Formel auf Grund der Coulombschen Versuche gab Eytelwein, nämlich

$$r_1 + r_2 = c \cdot \delta^2,$$

wo δ den Durchmesser des Seiles bedeutet, c eine Materialkonstante. Redtenbacher bestätigte diese Formel, während Coulomb selbst und Weisbach zweigliedrige Formeln gaben. Weitere Literaturangaben siehe Enzykl. IV, 10 (v. Mises).

Irgendwelchen Anspruch auf Exaktheit hat keine der Formeln, sie stellen nur einen Versuch dar, mit möglichst einfachen Mitteln eine rohe Abschätzung der durch die Seilsteifigkeit bedingten Korrektur der Formel (A) (Nr. 181) zu geben.

c schwankt je nach Beschaffenheit der Seile zwischen 0,13 und 0,3 cm^{-1}.

184. Theoretischer Ansatz für das steife Seil. Wir betrachten ein Seil wie in Nr. 179, lassen jedoch die Annahme fallen, daß kein Biegungsmoment vorhanden sei. Dasselbe heiße B, die Schubkraft, die dann auch nicht immer Null sein wird, H, die Längsspannung S. Wir beschränken uns auf das ebene Problem.

α sei der Winkel, den die Seilrichtung im Sinne wachsender Bogenlänge s mit einer festen Richtung einschließt, und werde nach links positiv gezählt,

$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\varrho} = \mathfrak{k}$ die Krümmung wird dann positiv sein, wenn sich die Kurve mit wachsendem s nach links biegt, sonst negativ. (Ausnahmsweise sei einmal ϱ nicht stets positiv!)

Ebenso werde H nach links positiv gezählt und zwar das H, das von einem Element mit größerem s auf das vorhergehende ausgeübt wird. Das Biegungsmoment B werde ebenfalls links herum positiv gezählt. Die äußere Kraft habe die Komponente $\varkappa_\nu ds$ senkrecht zum Seil, nach links positiv gezählt, $\varkappa_\sigma ds$ in Richtung wachsender Bogenlänge. Dann gibt der Momentensatz für ein Bogenelement bis auf Größen höherer Ordnung:

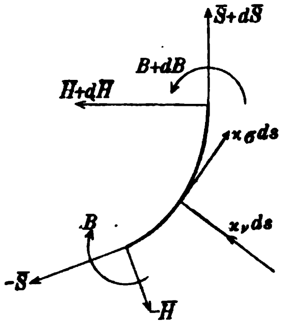


Fig. 158.

$$dB + Hds = 0;$$

die Summe der Kräfte gleich Null gesetzt ($\sin d\alpha \doteq d\alpha$!):

$$dS - Hd\alpha + \varkappa_\sigma ds = 0,$$
$$dH + Sd\alpha + \varkappa_\nu ds = 0.$$

Die erste Gleichung läßt also auf alle Fälle erschließen:

$$\frac{dB}{ds} = -H \tag{1}$$

(vgl. I in Nr. 162), die beiden anderen

$$\frac{dS}{ds} - \mathfrak{k}H + \varkappa_\sigma = 0, \tag{2}$$

$$\frac{dH}{ds} + \mathfrak{k}S + \varkappa_\nu = 0. \tag{3}$$

Diese drei Gleichungen genügen noch nicht, um die vier Abhängigen B, H, S und die Krümmung $\mathfrak{k}$ bei gegebenen äußeren Kräften als Funktionen der Bogenlänge darzustellen.

Es bedarf also noch einer physikalischen Hypothese. Man sieht: wenn B konstant ist, so ist $H = 0$ und das Seil verhält sich wie ein vollkommen biegsames Seil.

Wenn übrigens $\varkappa_\sigma$ nicht in der Achse selbst angreift, sondern etwa um die kleine Strecke δ exzentrisch verschoben ist, δ nach links positiv gerechnet, so lautet der Momentensatz

$$dB + Hds - \varkappa_\sigma ds \cdot \delta = 0,$$

so daß wir statt (1) erhalten

$$\frac{dB}{ds} = -H + \varkappa_\sigma \cdot \delta. \tag{1'}$$

Die Gleichungen (2) und (3) bleiben ungeändert. Wenn jetzt B konstant ist, ist H nicht Null, außer es sei $\varkappa_\sigma = 0$.

185. Das kräftefreie steife Seil. Wir wollen nun den Fall betrachten, daß ein Seilstück kräftefrei sei:

$$\varkappa_\sigma = \varkappa_\nu = 0.$$

Dann lassen sich die Gleichungen vermöge

$$f = \frac{d\alpha}{ds}$$

schreiben

$$\frac{dB}{ds} = -H, \tag{1}$$

$$\frac{dS}{d\alpha} = H \quad \text{und} \quad \frac{dH}{d\alpha} = -S.$$

Die beiden letzteren Gleichungen kann man sofort integrieren: sie ergeben

$$\left.\begin{aligned} H &= -C \sin(\alpha + \varepsilon), \\ S &= C \cos(\alpha + \varepsilon), \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

wo $C > 0$ und ε Integrationskonstante sind.

C bedeutet die (konstante) Größe der Gesamtspannung in einem Querschnitt, $-(\alpha + \varepsilon)$ ihr Winkel gegen die Seilrichtung (links herum positiv gezählt), also $-\varepsilon$ den Winkel gegen die feste Richtung.

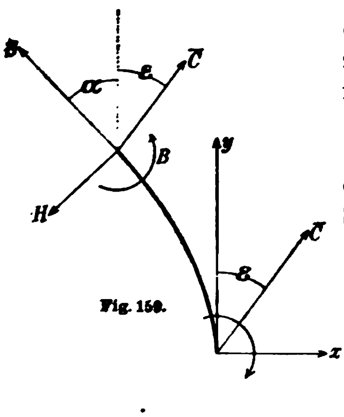


Fig. 159.

Man hätte die Gleichungen (A) durch Anwendung des Satzes von der Summe der Kräfte auf einen endlichen Teil des Seiles direkt ableiten können.

Gleichung (1) gibt dann weiter

$$\frac{dB}{ds} = -H = C \sin(\alpha + \varepsilon),$$

$$B = C \int_0^\alpha \sin(\alpha + \varepsilon)\, ds + B_0.$$

Sei $\alpha = 0$ nach oben gerichtet, in derselben Richtung die y-Achse gelegen, die x-Achse aber nach rechts, so ist

$$dx = -\sin\alpha\, ds, \quad dy = \cos\alpha\, ds,$$

also

$$\begin{aligned} B &= C \int^{s} (\sin\varepsilon\, dy - \cos\varepsilon\, dx) + B_0, \\ B &= C(y \sin\varepsilon - x \cos\varepsilon) + B_0. \end{aligned} \tag{B}$$

B_0 bedeutet das Biegungsmoment an der Stelle $x = 0$, $y = 0$. Man hätte auch diese Formel direkt durch Anwendung des Momentensatzes auf ein endliches Stück des Seiles finden können. Denn $+\varepsilon$ ist der Winkel, den die feste Richtung von $\bar{C}$, der Resultierenden von H und S, mit der y-Achse nach rechts einschließt, weil für $\alpha = 0$, $H = -C \sin\varepsilon$, $S = C \cos\varepsilon$ ist.

186. Einführung der erforderlichen Hypothese. Die Erfahrung zeigt, daß bei steifen, unelastischen Seilen an den Stellen, wo eine Biegungsänderung eintritt, ein bestimmtes Biegungsmoment der Verbiegung entgegenwirkt (wenn man die Gegenwirkung des Stückes nach außen betrachtet), das in erster Annäherung der gesamten Seilspannung C proportional gesetzt werden kann, sonst aber wesentlich nur von Eigenschaften des Seiles abhängt, also

$$B = C \cdot r,$$

wo die Länge r eine Materialkonstante ist.

Drückt sich schon darin eine große Verwandtschaft mit der Erscheinung der Reibung aus, so wollen wir sie als Hypothese allgemein aussprechen und folgende plausible Annahmen machen, von denen eine Genauigkeit ähnlich den Coulombschen Gesetzen zu erwarten ist.

1. Ändert sich für ein Seilstück bei der Bewegung die Krümmung nicht, ist $\frac{d\mathfrak{t}}{dt} \doteq 0$, so hat B einen unbestimmten Wert, B ist also ein Reaktionsmoment, das als Unbekannte in die Gleichungen eintritt. Doch ist stets

$$|B| \leqq C \cdot r,$$

wo C die Gesamtspannung des Seiles, r, der „Radius der Seilsteifigkeit", in erster Annäherung eine Konstante des gewählten Seiles.

In dieser ersten Annahme drückt sich aus, daß ein Seil einer Verbiegung einen gewissen passiven Widerstand entgegensetzt, der bis zu einer bestimmten Grenze geht.

2. Andert sich für ein Element des Seiles die Krümmung, ist also $\frac{d\mathfrak{t}}{dt} \neq 0$, so hat B dasselbe Zeichen, d. h. das Biegungsmoment, das von außen an einem Seilstück eine Biegung hervorruft, hat denselben Sinn wie die Biegungsänderung, wie $\frac{d\mathfrak{t}}{dt}$, ist aber sonst konstant

$$B = C \cdot r'.$$

In erster Annäherung bei langsamer Bewegung kann wieder r' als Konstante des Seiles angesehen und zwar $r' = r$ gesetzt werden.

Also: das Seil setzt seiner Verbiegung einen Biegungswiderstand entgegen, der der Seilspannung proportional ist. Die Verbiegung ist Ursache von B; dieses wird also Reaktionsmoment, sobald eine Verbiegung nicht stattfindet.

3. Eine Ergänzung erfordert die Theorie der Seilspannung gegenüber derjenigen der Reibung: da

$$\frac{dB}{ds} = -H,$$

so muß B stetig sein.

Wenn aber an einer Stelle $\frac{d\mathfrak{k}}{dt}$ sein Zeichen wechselte, so müßte B plötzlich von Cr auf $-Cr$ springen. Die hier auftretende Schwierigkeit überwinden wir durch folgende naheliegende Annahme:

Es kann nicht plötzlich $\frac{d\mathfrak{k}}{dt}$ sein Zeichen wechseln und B von Cr auf $-Cr$ springen. Wird $\frac{d\mathfrak{k}}{dt}$ an einer Stelle Null, so folgt auf sie eine endliche Strecke, wo $d\mathfrak{k} = 0$ ist, d. h. die Krümmung konstant bleibt. Auf dieser Strecke ist dann B unbestimmt und die Länge der Strecke, längs der $d\mathfrak{k} = 0$ bleibt, bestimmt sich dadurch, daß B allmählich von Cr auf $-Cr$ übergeht.

Es wird demnach das steife freie Seil aus Stücken folgenden Charakters bestehen: 1. aus Stücken, wo B konstant, also $H = 0$ ist, die sich also wie Stücke vollkommen biegsamer Seile bewegen müssen. Längs dieser Stücke behält $\frac{d\mathfrak{k}}{dt}$ sein Zeichen; 2. aus Stücken, wo $\dot{\mathfrak{k}} = \frac{d\mathfrak{k}}{dt} = 0$ ist, also die Krümmung konstant bleibt. Längs dieser Stücke geht B von $\pm Cr$ in $\mp Cr$ über. Beim Übergang von einem Stück zum andern sind B, S, H stetig, $\mathfrak{k}$ kann eventuell unstetig sein.

187. Folgerungen für das kräftefreie, ruhende Seil. Betrachten wir ein kräftefreies Seil im Ruhezustande. Dann ist nach Nr. 185

$$H = -C\sin(\alpha + \varepsilon),$$

$$S = C\cos(\alpha + \varepsilon)$$

und

$$B = B_0 + C(y\sin\varepsilon - x\cos\varepsilon),$$

wenn zu Anfang ($y = 0$, $x = 0$) auch $\alpha = 0$ war, wobei α von der y-Achse aus nach links gezählt wurde.

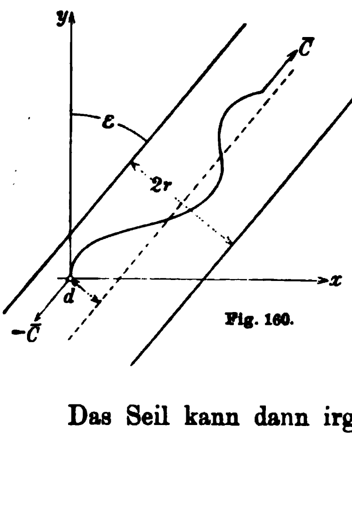


Fig. 160.

Nun gibt

$$B \leqq Cr$$

außer

$$B_0 \leqq Cr$$

noch

$$-r - \frac{B_0}{C} \leqq y\sin\varepsilon - x\cos\varepsilon \leqq r - \frac{B_0}{C}.$$

Es bedeutet aber diese Ungleichung, daß die Seilkurve in einem Streifen liegt, der mit der y-Achse nach rechts den Winkel ε einschließt und die Breite $2r$ hat. Außerdem hat die Mittelachse den Abstand $d = \frac{B_0}{C}$, der absolut $< r$ ist, nach rechts, wenn $d > 0$. Das Seil kann dann irgendwie in dem Streifen hin- und herlaufen.

Ein gespanntes, sonst kräftefreies, ruhendes Seil wird nach unseren Hypothesen in einem Streifen der Breite $2r$ — wo r der Radius der Seilsteifigkeit ist — liegen, sonst aber jede Gestalt haben können, also auch jede Krümmung.

Das aber widerspricht noch offenbar der Erfahrung. Auch wenn wir annehmen wollen, daß r mit wachsendem C abnimmt, bliebe noch immer das Paradoxon beliebiger Krümmung eines beliebig stark gespannten Seiles.

Es bedarf deshalb noch einer weiteren Hypothese. Diese wird sich auf H zu beziehen haben. Denn es ist

$$\frac{H}{S} = -\operatorname{tg}(\alpha + \varepsilon)$$

und $\alpha + \varepsilon$ ist der Winkel, welchen das Seil mit der Richtung des Streifens, d. h. der mittleren Seilrichtung einschließt. Wir werden verlangen müssen, daß dieser Winkel eine obere Schranke habe, die mit wachsendem C kleiner wird. Geben wir H selber eine feste obere Schranke, so wird die Bedingung für $\alpha + \varepsilon$ erfüllt sein.

Der Leser möge sich nochmals durch Zeichnung das in den Formeln dieser Nummer enthaltene Resultat klar machen: Wenn der Endpunkt eines Seilstücks links von der Geraden durch den Anfangspunkt und der Richtung $\overline{C}$ liegt, so muß beim kräftefreien Seil $B - B_0 > 0$, sonst < 0 sein.

188. Einführung einer Zusatzhypothese. Wir suchen den Tatsachen dadurch besser gerecht zu werden, daß wir festsetzen, daß im Ruhestande

$$H < H_0$$

sei, wo H_0 eine dem Seil eigentümliche Größe sei, die in erster Annäherung nicht mehr von S (bzw. C) abhängt. Man kann sich die Berechtigung dieser Hypothese wenigstens für festgedrehte Seile noch auf folgende Weise klar machen: Es sei $ABCD$ ein kleines Prisma aus dem Seil, BC und AD quer gelegene Ebenen, AB, CD längs gerichtet.

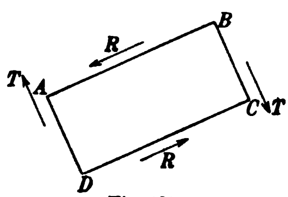


Fig. 161.

Zeichnen wir die spezifischen Schubkräfte R und T, so muß, wenn dx die Länge, dy die Breite des Prismas, dz seine Dicke ist, nach dem Momentensatze

$$T\,dx\,dy\,dz - R\,dx\,dy\,dz = 0,$$

also

$$T = R$$

sein.

Nun wird R eine Reibungskraft zwischen den Seilfäden sein, also $R < fN$, wo f den Reibungskoeffizienten, N den spezifischen

Normaldruck bedeutet, mit dem die Strähne gegeneinander gepreßt sind. Also ist auch

$$T < fN,$$

und da $H = \int TdF$, das Integral über den Querschnitt erstreckt, so muß $H < f\int NdF$ sein, welche feste Grenze wir eben H_0 nennen.

Wenn nun das Seil fest gedreht ist, so dürfen wir annehmen, daß N nur wenig mehr — im Mittel wenigstens — durch die Deformation geändert wird und daß also H_0 angenähert eine dem Seil eigentümliche Größe ist. Da

$$\frac{dB}{ds} = -H$$

ist, können wir auch sagen, daß nicht nur B einer oberen Grenze unterworfen ist, sondern auch $\frac{dB}{ds}$

$$\left|\frac{dB}{ds}\right| \leqq H_0.$$

Für das kräftefreie Seil folgt jetzt

$$|C\sin(\alpha+\varepsilon)| < H_0,$$

also

$$\sin(\alpha+\varepsilon) < \frac{H_0}{C}.$$

Nehmen wir C groß gegen H_0, so gibt das

$$\alpha + \varepsilon \leqq \frac{H_0}{C}$$

als Grenze des Winkels, welchen das Seil gegen seine mittlere Richtung haben kann.

189. Vereinigung beider Hypothesen zu einer einzigen. Nun können aber unmöglich beide Hypothesen getrennt nebeneinander bestehen bleiben, sie müssen beide in einer einzigen dritten enthalten sein. Denn wenn eine der Grenzen, entweder $H = \pm H_0$ oder $B = \pm Cr$ erreicht wird, muß eine Verbiegung eintreten; in diesem Augenblick werden B, H eingeprägte Momente bzw. Kräfte, müssen also in einem gesetzmäßigen Zusammenhang zu den anderen physikalischen Größen stehen. Nun besteht schon zwischen ihnen die eine Relation

$$\frac{dB}{ds} = -H,$$

es kann also bei Bewegung nur noch eine weitere geben:

$$F(B, H) = 0.$$

Da aber die Gleichgewichtszustände stetig an die Bewegungszustände angrenzen müssen, muß im Gleichgewichtsfalle

$$F(B, H) < 0$$

bestehen und in dieser Hypothese müssen die alten

$$B \leqq Cr,$$
$$H| \leqq H_0$$

enthalten sein. D. h. das Gebiet

$$F(B, H) < 0$$

muß in der B, H-Ebene in das Innere des Rechtecks $H = \pm H_0$, $B = \pm Br$ fallen.

Nun liegen noch gar keine hinreichenden experimentellen Daten vor, F zu bestimmen. Die einfachste und plausibelste Annahme, nämlich die, daß $F = 0$ einfach den Rand des Rechtecks gibt, führt zu einem bemerkenswerten Resultat: ist eine Strecke lang $H = H_0$, so folgt aus der obigen Differentialgleichung

$$B = B_0 - H_0 s,$$

das kann aber nur solange gelten, bis $B = \pm Cr$ wird, was sicher eintreten muß. Bliebe dann $B = \pm Cr$, so müßte wegen der Differentialgleichung plötzlich $H = 0$ werden, was nicht zulässig ist, da H stetig sein muß. Es kann also weder $H = H_0$, noch $B = \pm Cr$ bleiben, mithin müßte jetzt ein Stück Kurve ansetzen, wo $F < 0$ ist, d. h. ein Stück Kurve, das bei der Bewegung seine Krümmung nicht ändert, also starr bleibt.

190. Ein Fall, in dem die erste Hypothese genügt. Nun kann leicht gezeigt werden, daß für ein Seil der Länge s, wo s groß ist gegen r, das ferner kräftefrei und konstanter Krümmung ist, aus der Bedingung

$$B| \leqq Cr$$

allein schon die Paradoxie starker Krümmung verschwindet, so daß wir in diesem Falle eine zweite Annahme nicht nötig haben und mit den Festsetzungen aus Nr. 186 auskommen.

Denn die Anschauung läßt sofort erkennen, daß man in einen schmalen Streifen der Breite $2r$ (siehe Nr. 187) ein Stück Kreisbogen der Länge s, wobei $s \gg r$, nur dann hineinlegen kann, wenn die Krümmung des Kreisbogens hinreichend klein ist.

Betrachten wir etwas näher den besonderen Fall, daß das Biegungsmoment in den beiden Enden A, B eines Seilstücks die Extremalwerte habe $-Cr$ in A, $+Cr$ in B. Dann müssen, nach Nr. 187, A und B genau auf den Grenzen des Streifens liegen. Sind etwa umgekehrt A, B gegeben, so ist damit der Streifen für das Seil vollständig bestimmt, denn man kann durch A, B nur in einer Weise Parallelen vom Abstande $2r$ legen, so daß B auf dem linken, A auf dem rechten Rande des Streifens liegt und das Seil von A nach B läuft (siehe die Bemerkung am Schlusse von Nr. 187). Die möglichen Kreisbögen, welche A und B verbinden und gleichzeitig in dem Streifen liegen, verlaufen zwischen zwei Grenzfällen: dem Kreisbogen, der eine der Parallelen in A, und dem Kreisbogen, der die andere Parallele in B berührt. Die gerade Strecke AB gehört natürlich auch zu den möglichen Formen des Seilstücks.

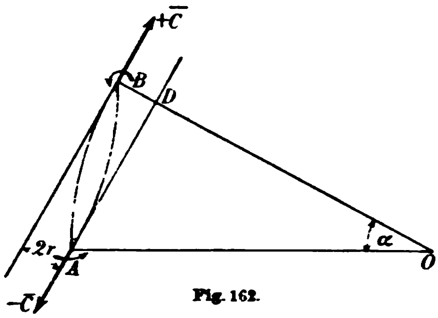


Fig. 162.

Wie groß kann die Krümmung $\mathfrak{k}$ also höchstens sein?

Betrachten wir den einen Extremalfall, wo der Kreisbogen in B berührt. Sei R der Radius des Kreises, α der Zentriwinkel, so ist

$$2r = BD = R(1 - \cos\alpha) = \frac{s}{\alpha}(1 - \cos\alpha).$$

α ist klein. Behalten wir Glieder erster Ordnung bei, so wird aus der vorstehenden Gleichung

$$2r \doteq \frac{1}{2} s\alpha,$$

also

$$\alpha \doteq \frac{4r}{s}$$

und

$$\mathfrak{k} \equiv \frac{\alpha}{s} \doteq \frac{4r}{s^2}.$$

Das ist unter Vernachlässigung höherer Glieder in $\frac{r}{s}$ der mögliche Maximalwert der Krümmung eines kräftefreien gespannten steifen Seilstückes von konstanter Krümmung.

191. Anwendung auf die stationäre Bewegung. Wir beginnen mit einer wichtigen Bemerkung:

Ein kräftefreies Seil kann sich nicht in einem endlichen Stück im Zustande der Verbiegung befinden, sondern nur an einzelnen Stellen.

Dieser Satz folgt sowohl aus der urspr[ü]glichen Hypothese in Nr. 186 als auch aus der Zusatzhypothese.

Denn ist $H = H_0$, so folgt aus

$$H = -C\sin(\alpha + \varepsilon),$$

daß auch α konstant ist, das Seil also gerade ist, und aus $B = \text{const}$ folgt $H = 0$, also dasselbe, speziell ist nur $\alpha = -\varepsilon$.

Nunmehr führe ein steifes Seil eine sogenannte stationäre Bewegung aus, d. h. es bewege sich in einer festen Kurve. Dann muß diese Kurve nach dem vorangehenden Satz jedenfalls aus Kreisbögen bestehen, denn andernfalls fände ein beständiger Wechsel der Krümmung statt. Wir wollen weiter zeigen:

Wenn an den Enden des kräftefreien Seilstücks das Biegungsmoment die Extremalwerte $-Cr$ und Cr hat, besteht das Stück im Falle stationärer Bewegung aus einem einzigen Kreisbogen (ev. einer Strecke).

Denn bestände das Seilstück aus mehreren Kreisbögen, so müßte an den Anschlußstellen $B = \pm Cr$ sein; diese Stellen müßten also auf den Grenzen des Streifens liegen. Es ist aber nicht möglich, zwei oder mehrere Kreisbögen mit stetiger Tangentenrichtung aneinander zu zeichnen, so daß die Stellen des Zusammentreffens auf den Rändern des Streifens und auch noch Anfangs- und Endpunkt auf den Rändern und zwar auf verschiedenen Rändern liegen. Denn eine Fortsetzung mit stetiger Tangente ist am Rande des Streifens nur bei Berührung mit dem Rande möglich; eine solche Berührung kann aber immer nur an einem Ende des Kreisbogens stattfinden, so daß überhaupt nur zwei Kreisbögen stetig zusammentreffen können, deren freie Enden dann beide auf dem anderen Rande liegen müssen.

Betrachten wir jetzt ein Seilstück zwischen zwei Rollen eines Flaschenzuges, so ist (bei Drehung links herum) an den Ablösungsstellen $B = -Cr$, an den Auflaufstellen $B = Cr$; denn an diesen Stellen findet sicher ein Krümmungswechsel in dem entsprechenden Sinne statt.

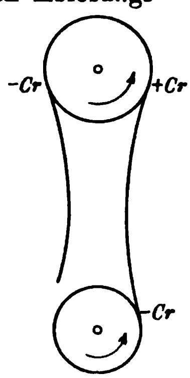


Fig. 163.

Zwischendurch ist dann die Seilkurve, wenn sie als kräftefrei gelten kann, ein Stück Kreisbogen (ev. Gerade); s ist bis auf kleine Größen gegeben, nämlich gleich dem Abstande der Rollenmitten. Also ist das Maximum der Krümmung, die nach außen oder innen erfolgen kann, durch

$$\mathfrak{k} \doteq \frac{4r}{s^2}$$

gegeben.

Die wirkliche Berechnung von $\mathfrak{k}$ erweist sich nun als unmöglich, solange man die Rollen als starr ansieht.

Denn die Gleichung

$$\frac{dH}{ds} + \frac{1}{a}S + \varkappa_\nu = 0$$

enthält, angewendet auf das Seilstück auf der Rolle, den unbekannten Normaldruck $\varkappa_\nu$. Man weiß von $\varkappa_\nu$ nur, daß es negativ ist. Da aber H klein ist, jedenfalls auch $\frac{dH}{ds}$, so kann die Gleichung bei großem S nichts über H aussagen.

Insofern also die Krümmung der freien Seilstücke innerhalb gewisser Grenzen frei bleibt, ist das Problem „statisch unbestimmt".

Die Berechnung der kleinen Größe ε nach Nr. 182 wird aber durch diese Unbestimmtheit höchstens in Gliedern zweiter Ordnung beeinflußt.

Aufgabe 91: Ein Seil ist an einem reibungsfreien Gelenk aufgehängt und trägt unten eine vertikale Last. Es werde selbst als gewichtslos angesehen. Welche Mannigfaltigkeiten von Gestalten kann es in der Ruhelage annehmen, wenn man nur $B \leq Cr$ verlangt?

Schluß des zweiten Abschnittes:

§ 37. Übergang zur Kinetik starrer Systeme.

192. Gleichgewicht und Äquivalenz von Kräften an einem System von n Freiheitsgraden. In seinem „Traité de dynamique" entwickelte D'Alembert 1743 ein einfaches, ganz allgemeines Prinzip, das gestattet, jedes kinetische Problem aus der Mechanik der Systeme starrer Körper auf ein statisches zurückzuführen. Um dieses Prinzip klar zu formulieren, müssen wir noch eine Bemerkung über die Statik der Systeme starrer Körper vorausschicken.

Besteht das System aus starren Körpern, so werden wir die Bedingungen des Gleichgewichts erhalten, indem wir für jeden einzelnen starren Körper die Summe und die Summe der Momente der für ihn äußeren Kräfte gleich Null setzen.

In diesen Gleichungen kommen nun noch im allgemeinen Normaldrucke explizit und eventuell auch Haftreibungen zwischen den Körpern selbst und zwischen ihm und den gegebenen Stützflächen vor. Denken wir uns diese unbekannten Reaktionskräfte eliminiert (doch nur soweit sie explizit vorkommen; daß eventuell eingeprägte Kräfte, wie Gleitreibungen, von ihnen abhängen, geht uns hier nichts an!), so werden eine gewisse Anzahl, sagen wir, n Gleichungen zwischen den eingeprägten Kräften allein übrig bleiben. Wir werden später (Nr. 325) sehen, daß diese Anzahl n genau gleich der Anzahl unabhängiger Bewegungsmöglichkeiten ist, welche das System unter Beachtung der vorgeschriebenen Berührungsbedingungen hat. Man nennt diese Anzahl n den Freiheitsgrad des Systems.

So hat ein starrer Körper in der Ebene drei Freiheitsgrade, denn ich kann einen seiner Punkte nach jeder Richtung hin ein beliebiges Stück verschieben — macht zwei Freiheitsgrade — und den

Körper dann noch um eine Achse durch den herausgegriffenen Punkt durch einen vorgeschriebenen Winkel drehen, macht einen dritten Freiheitsgrad.

Dem entsprechend gibt es auch drei Gleichgewichtsbedingungen für die eingeprägten Kräfte beim freien starren Körper, denn bei ihm sind alle äußeren Kräfte zugleich eingeprägte Kräfte.

Ebenso überlegt man sich leicht, daß der starre Körper im Raum sechs Grade der Freiheit hat (genaueres siehe § 46). Das Schubkurbelgetriebe, das wir in Nr. 155 behandelten, hat einen Freiheitsgrad, denn ich habe nur den Kurbelwinkel frei zum Bewegen; alles andere bewegt sich dann in bestimmter Weise mit.

Man nennt deshalb ein System von einem Freiheitsgrad auch „zwangläufig".

Wir wollen nun sagen, daß eine Gruppe von Kräften an dem mechanischen System im Gleichgewicht sei oder sich aufhebe, wenn es jene n Gleichungen erfüllt, welche zwischen irgendwelchen eingeprägten Kräften bestehen müssen, damit unter ihrer Wirkung das mechanische System im Gleichgewicht sei. Gleichwertig werden zwei Kräftesysteme sein, wenn das eine und das entgegengesetzte des andern sich aufheben. (Beweis wohl klar. Siehe Nr. 116 und 124.)

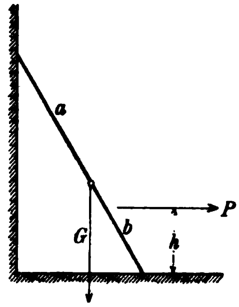


Fig. 164.

In diesem Sinne sagten wir schon, daß beim Schubkurbelgetriebe der Dampfdruck P dem Tangentialdampfdruck T gleichwertig (äquivalent) sei.

Aufgabe 92: Welcher Kraft P ist bei dem gezeichneten System von einem Freiheitsgrad das Gewicht G äquivalent? Es greife P in der Höhe h horizontal an.

193. Das D'Alembertsche Prinzip. Wir gehen von der Newtonschen Grundgleichung eines Volumelementes aus (siehe Nr. 47 und 48)

$$dm\bar{w} = \mathfrak{S}d\bar{k}$$

und teilen die Summe der Kräfte $\mathfrak{S}d\bar{k}$ in zwei Teile: der eine mag kurz $d\bar{k}$ heißen, der andere $d\bar{s}$. $d\bar{k}$ sei die Summe der an dem Volumelement angreifenden eingeprägten Kräfte, $d\bar{s}$ die Summe der Reaktionskräfte (siehe Nr. 58, 61, 62, 141).

Für ein Volumelement im Innern eines starren Körpers ist also $d\bar{s}$ die Summe der Spannungen; für ein Element am Rande besteht $d\bar{s}$ aus der Summe der Spannungen an den inneren Flächen und dann nur noch aus dem Teile des Druckes an der Oberfläche, der Normaldruck oder Haftreibung eines angrenzenden Körpers des Systems oder einer gegebenen Stützfläche ist.

Schreiben wir also

$$dm\,\bar{w} = d\bar{k} + d\bar{s}. \tag{I}$$

Diese Gleichung, die eigentlich keine andere als die Newtonsche Grundgleichung ist, heiße in dieser Form der D'Alembertsche Ansatz.

Das Prinzip D'Alemberts lautet:

Bei der Bewegung des Systems hält sich die Gesamtheit der Reaktionskräfte $d\bar{s}$ (in dem in Nr. 192 präzisierten Sinne) an dem System das Gleichgewicht.

Da nach (I)

$$-d\bar{s} = -dm\,\bar{w} + d\bar{k}$$

ist, so kann man das Prinzip auch in der folgenden, sehr brauchbaren Form aussprechen:

Bei der Bewegung halten sich die eingeprägten Kräfte und die negativen Massenbeschleunigungen das Gleichgewicht oder es sind die Massenbeschleunigungen den eingeprägten Kräften äquivalent.

Man füge also zu den eingeprägten Kräften $d\bar{k}$ die negativen Massenbeschleunigungen $-dm\,\bar{w}$ als Scheinkräfte hinzu und behandle nun das ganze Problem als ein statisches. So lautet die praktische Regel des d'Alembertschen Prinzips.

Nehmen wir ein Beispiel vor.

194. Der um eine feste Achse rotierende starre Körper ist offenbar ein System von einem Freiheitsgrad. Die explizite Gleichgewichtsbedingung für die eingeprägten Kräfte kennen wir (Nr. 141): es muß die Summe der Momente in bezug auf die Achse Null sein.

Also muß bei der Bewegung das Moment der Massenbeschleunigung gleich dem Moment der eingeprägten Kräfte sein. Dann werden die $d\bar{k}$ und die $dm\bar{w}$ einander äquivalent oder die $d\bar{k}$ und die $-dm\bar{w}$ sich gegenseitig aufheben.

Nun beschreibt aber jeder Punkt einen Kreis mit dem Radius r seines Abstandes von der Achse. Sei ω die Winkelgeschwindigkeit, $\dot{\omega}$ die Winkelbeschleunigung, so ist die Zentripetalbeschleunigung $r\omega^2$: sie hat kein Moment, da sie die Achse schneidet. Die Tangentialbeschleunigung ist $r\dot{\omega}$ und hat das Moment $r \cdot r\dot{\omega} = r^2\dot{\omega}$.

Mithin ist das Gesamtmoment aller Massenbeschleunigungen

$$\mathfrak{S}\,dmr^2\dot{\omega} = \dot{\omega}\,\mathfrak{S}\,dmr^2 = \dot{\omega}\,T,$$

wenn wir die für den Körper in bezug auf die Drehachse konstante Größe $\mathfrak{S}\,dmr^2 = T$, das „Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die Achse“ nennen.

Und die Bewegungsgleichung lautet

$$\dot{\omega} T = M,$$

wo M das Moment der eingeprägten Kräfte in bezug auf die Drehachse bedeutet.

Diese fundamentale Gleichung läßt sich schon wegen ihrer Analogie zur Newtonschen Grundgleichung leicht behalten:

An Stelle der Kraft tritt als dynamische Größe das Kraftmoment M,

an Stelle der gewöhnlichen Beschleunigung als kinematische Größe die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$,

an Stelle der Masse als Trägheitsfaktor das Trägheitsmoment T des Körpers.

Ist $M = 0$, also das System der eingeprägten Kräfte für sich im Gleichgewicht, so folgt $\dot{\omega} = 0$, $\omega = \text{const.}$ Der Körper dreht sich mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit, bleibt also speziell in Ruhe, wenn er zu Anfang in Ruhe war.

195. Das physische Pendel ist ein Körper, der sich unter der Einwirkung der Schwerkraft als wesentlich einziger eingeprägter Kraft um eine horizontale Achse (Schneide) drehen kann und nun erfahrungsgemäß kleine Schwingungen ausführt, wenn man ihn ein wenig anstößt.

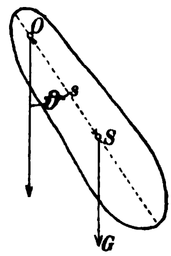


Fig. 165.

Habe der Schwerpunkt S die Entfernung s von der Drehachse, sei G das Gewicht, ϑ der Ausschlagwinkel, d. h. der Winkel, den OS mit der Lotrichtung einschlägt, so ist das Moment der Schwere

$$-\,G s \sin\vartheta,$$

im Sinne des wachsenden ϑ positiv gerechnet.

Da die Winkelbeschleunigung

$$\dot{\omega} = \ddot{\vartheta}$$

ist, so wird aus der Hauptgleichung der vorigen Nummer

$$T\ddot{\vartheta} = -\,s G \sin\vartheta.$$

Also

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{l}\sin\vartheta, \tag{I}$$

wo

$$l = \frac{T}{ms}$$

gesetzt ist.

Gleichung (I) ist aber genau die Gleichung eines Punktpendels (siehe Nr. 66) von der Länge l.

Es schwingt also das physische Pendel wie ein mathematisches Pendel von der sogenannten „reduzierten Pendellänge“

$$l = \frac{T}{ms}.$$

Ein Punkt M auf OS, der die Entfernung l von O hat, heißt der **Schwingungsmittelpunkt**: er schwingt, dem Pendel angehörig, genau so, wie er schwingen würde, wenn er mit einer kleinen Masse an einem Faden von der Länge l hängen würde.

T hat die Dimension einer Masse mal dem Quadrat einer Länge, weil jedes Glied der unendlichen Summe, aus der T besteht, diese Dimension hat. Setzen wir dem entsprechend

$$T = m\sigma^2,$$

so ist σ eine Strecke, welche **Trägheitsradius**, auch **Gyrationsradius** genannt wird. Durch ihn drückt sich die reduzierte Pendellänge so aus:

$$l = \frac{\sigma^2}{s}.$$

Die Schwingungsdauer unendlich kleiner Schwingungen ist (siehe Nr. 66)

$$\tau_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Kennt man T, m und s, so dient das Pendel zum Messen von g (geodätische Verwendung). Sieht man aber g als bekannt an, so kann man das Pendel brauchen, um aus beobachtetem τ_0 das l, d. h. wenn man m und s, Masse und Schwerpunktslage eines Körpers kennt, das Trägheitsmoment experimentell zu bestimmen. (Weiteres darüber siehe Nr. 259.)

196. Das Reversionspendel. Wir wollen nun die Frage stellen: für welche zu der alten Achse O parallelen Achsen hat das Pendel dieselbe Schwingungsdauer?

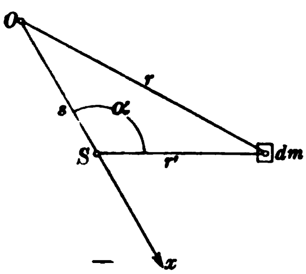


Fig. 166.

Wir schicken der Beantwortung der Frage einen **Hilfssatz über Trägheitsmomente** voraus.

Durch den Schwerpunkt S ziehen wir die Parallele zur Achse O. r sei der Abstand eines Massenteilchens von O, r' der von der Achse durch S. Der Winkel zwischen r' und s sei α.

Dann ist

$$r^2 = s^2 + r'^2 - 2sr'\cos\alpha = s^2 + r'^2 - 2s\cdot x,$$

wenn wir eine x-Achse von S aus in der Richtung OS zählen.

Daraus folgt, daß

$$T \equiv \mathsf{S}\, dm r^2 = s^2 \mathsf{S}\, dm + \mathsf{S}\, dm r'^2 - 2s\,\mathsf{S}\, dm x.$$

Nun ist aber $\mathsf{S}\, dm r'^2 = T'$ das Trägheitsmoment des Körpers um die zu O parallele Achse durch S,

$$\mathsf{S}\, dm x = 0,$$

weil $S(x=0)$ Schwerpunkt ist (siehe Nr. 52). Somit bleibt

$$T = T' + ms^2$$

oder nach Division durch m

$$\sigma^2 = \sigma'^2 + s^2.$$

Unter allen parallelen Achsen ist also für die Achse durch den Schwerpunkt das Trägheitsmoment (T') am kleinsten, für alle andern parallelen Achsen bestimmt es sich aus T' und dem Abstand der Achsen nach der vorstehenden Formel. (Dieser Satz wird oft nach Steiner benannt.)

Nach dieser Vorbereitung können wir die zu Anfang dieser Nummer gestellte Frage leicht lösen.

Es soll $\frac{\sigma^2}{s}$ einen festen Wert l haben, denn mit τ_0 ist ja auch l fest.

Nun ist aber

$$\sigma^2 = \sigma'^2 + s^2,$$

also soll

$$\frac{\sigma'^2}{s} + s = l$$

sein. Dabei ist σ' für den Körper fest, l ist gegeben, also berechnet sich s aus der Gleichung

$$s^2 - sl + \sigma'^2 = 0.$$

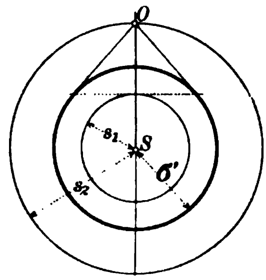


Fig. 167.

Daraus ergeben sich, wenn $l^2 > 4\sigma'^2$ ist, für s zwei reelle, konstante Werte: s_1 und s_2. Es ist

$$s_1 + s_2 = l,$$
$$s_1 \cdot s_2 = \sigma'^2.$$

Daraus folgt:

Die untereinander parallelen Achsen, für welche die Schwingungsdauer dieselbe ist, stehen auf zwei konzentrischen Kreisen um den Schwerpunkt senkrecht. Die Summe der Radien dieser Kreise ist gleich der reduzierten Pendellänge l, die stets größer oder mindestens gleich dem doppelten zum Schwerpunkt zugehörigen Trägheitsradius ist ($l > 2\sigma'$). Für den Grenzfall ($l = 2\sigma'$) ist $s_1 = s_2 = \frac{l}{2} = \sigma'$. In allen anderen Fällen hat ein Punkt des einen Kreises zur Polaren in bezug auf den Kreis mit dem Radius σ' eine Tangente des andern Kreises.

Da stets $s_1 + s_2 = l$, so folgt:

Wandert die Achse O auf dem einen der beiden Kreise, so wandert der Schwingungsmittelpunkt M auf dem andern so, daß S zwischen ihnen liegt. Daraus, daß also für alle Punkte beider Kreise l, also auch τ_0 dasselbe ist, folgt weiter:

Bringen wir im Schwingungsmittelpunkt eine zweite Schneide an, so schwingt das Pendel um diese genau so wie um die erste Schneide.

Darauf beruht das Reversionspendel de Katers: Angenommen, man kennt l nicht genau genug, so daß man g und l als Unbekannte hat. Dann bringt man auf der Achse OS an der ungefähren Stelle von M eine zweite horizontale Schneide an, parallel der ersten, und stellt sie nun so lange ein, bis die Schwingungsdauer für sie die gleiche geworden ist, wie um die erste Schneide. Dann ist l der Abstand beider Schneiden, kann so direkt gemessen werden und g bestimmt sich dann aus der Schwingungsdauer τ_0 nach der Formel

$$\tau_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

197. Zurückführung des D'Alembertschen Prinzips auf ein einfacheres Prinzip.[1])

Wirken auf ein System die eingeprägten Kräfte $d\bar{k}$ und sei $dm\bar{w}$ die hervorgerufene Massenbeschleunigung, so können wir nach dem d'Alembertschen Ansatz

$$dm\bar{w} = d\bar{k} + d\bar{s}$$

jedenfalls für jeden Punkt die gesamte Reaktionskraft $d\bar{s}$ berechnen, wenn $\bar{w}$ bekannt ist.

Denken wir uns nun eine neue eingeprägte Kraft hergestellt, gleich groß und gleich gerichtet mit $d\bar{s}$:

$$d\bar{k}' = d\bar{s}$$

und lassen dasselbe mechanische System ein zweitesmal den eingeprägten Kräften

$$d\bar{k} + d\bar{k}'$$

unterworfen sein, so ist die nach der Gleichung

$$dm\bar{w} = d\bar{k} + d\bar{k}'$$

für jeden Punkt bestimmte Beschleunigung jedenfalls eine mögliche Beschleunigung, denn sie ist ja genau dieselbe, die im ersten Falle wirklich eintritt.

Machen wir nun die höchst plausible Annahme, daß bei Vorhandensein der Kräfte $d\bar{k} + d\bar{k}'$ die nach

$$dm\bar{w} = d\bar{k} + d\bar{k}'$$

berechnete Beschleunigung auch jetzt wirklich eintritt, so erzeugen die Kräfte $d\bar{k}$ dieselbe Beschleunigung wie die Kräfte $d\bar{k} + d\bar{k}'$; es sind also nach unserer Terminologie (siehe Nr. 111) die Kräftegruppen $d\bar{k} + d\bar{k}'$ und $d\bar{k}$ einander äquivalent, d. h. die Gruppe der $d\bar{k}'$ ist äquivalent Null. Da aber $d\bar{k}' = d\bar{s}$ war, so heißt das: die Gesamtheit der Reaktionskräfte hält sich am System das Gleichgewicht. Das ist aber das D'Alembertsche Prinzip.

Damit ist dieses Prinzip auf die folgende Annahme zurückgeführt:

---

1) Der Anfänger kann diese Nummer auslassen.

Sind die eingeprägten Kräfte $d\bar{k}$, welche auf ein System wirken, zufällig so beschaffen, daß die nach

$$dm\bar{w} = d\bar{k}$$

berechneten Beschleunigungen möglich sind, d. h. mit den kinematischen Bedingungen des Systems verträglich, so treten diese Beschleunigungen auch wirklich ein.

Dieser Grundsatz setzt den passiven Charakter der Reaktionskräfte ins rechte Licht: sie treten nur auf, wenn es unbedingt nötig ist. Dieser Grundsatz schien d'Alembert so selbstverständlich zu sein, daß er den hypothetischen Charakter desselben nicht erkannte und er so die vorstehende Überlegung als einen Beweis a priori seines Prinzips ansah.

Man kann aber leicht zeigen, daß das d'Alembertsche Prinzip logisch nicht aus unseren früheren Axiomen folgt. Doch würde dieser Nachweis die Ziele dieses Buches überschreiten.

198. Die sogenannte Zentrifugalkraft. Nehmen wir an, ein System bewege sich so, daß jeder Punkt einen Kreis mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω beschreibe. Dann ist als Beschleunigung nur eine Zentripetalbeschleunigung der Größe $r\omega^2$ da, wenn r der Radius des Kreises ist.

Die negative Massenbeschleunigung eines Volumelementes ist dann

$$dm r\omega^2$$

und nach außen, d. h. vom Zentrum fortgerichtet. Diese Scheinkraft nennt man wohl die Zentrifugalkraft.

Es muß dann die Gesamtheit der Zentrifugalkräfte der Gesamtheit der eingeprägten Kräfte nach dem D'Alembertschen Prinzip das Gleichgewicht halten.

Das gilt aber nur für die zu Anfang dieser Nummer genannte einfache Bewegung. In anderen Fällen ist als Scheinkraft das ganze $-dm\bar{w}$ zu nehmen.

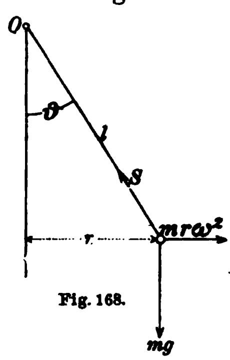


Fig. 168.

Betrachten wir als Beispiel einen Massenpunkt, der mittels eines Idealfadens an einem festen Punkt O aufgehängt ist, und fragen wir, ob unser Punkt einen horizontalen Kreis mit konstanter Winkelgeschwindigkeit beschreiben kann. Wir kennen die Antwort schon aus Nr. 67, doch ist es nützlich, diese spezielle Frage hier noch einmal zu behandeln.

Wir haben nach dem D'Alembertschen Prinzip die Zentrifugalkraft $mr\omega^2$ radial nach außen zum Gewicht mg hinzuzufügen und nun das Ganze als eine Aufgabe des Gleichgewichts zu behandeln. Der Hebelsatz in bezug auf O gibt sofort

$$-mgr + mr\omega^2 l \cos\vartheta = 0,$$

d. h.

$$\omega^2 = \frac{g}{l\cos\vartheta},$$

unser altes Resultat.

Wir wollen jetzt folgende wichtige vorbereitende Aufgabe lösen:

Ein symmetrischer Körper drehe sich um eine in seiner Symmetrieebene gelegene Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Wie reduzieren sich auf einen Punkt O des Körpers die Zentrifugalkräfte?

O habe den Abstand a von der Achse.

Wir legen durch O ein Koordinatensystem, so daß die y Achse radial nach außen, die x Achse parallel zur Achse sei. r sei der konstante Abstand eines Punktes von der Achse, φ der Winkel zwischen r und der y-Achse. Die xy-Ebene ist nach Voraussetzung Symmetrieebene des Körpers.

Da alle Zentrifugalkräfte senkrecht zur x-Achse stehen, existiert in deren Richtung keine Resultierende. Ebensowenig für die z-Achse, aus Symmetriegründen. Dagegen ist die Resultierende für die y-Achse

$$Y = \int dm\, r\omega^2 \cos\varphi = \int dm\,\omega^2(a + y)$$

$$Y = m\omega^2(a + y^*),$$

wenn y^* die Entfernung des Schwerpunkts von der x-Achse, $a + y^*$ die von der Drehachse bedeutet.

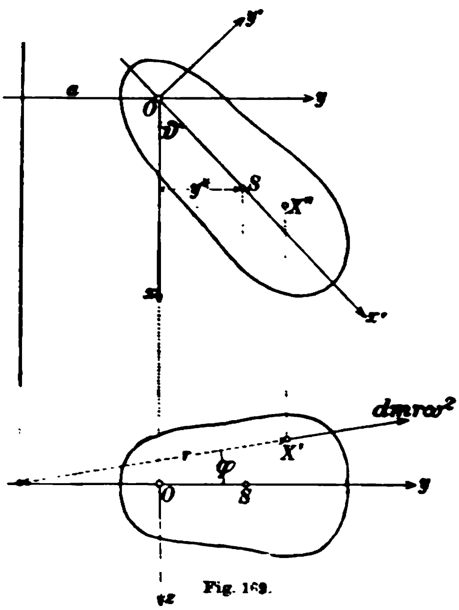


Fig. 169.

Ein Moment um die y- und um die x-Achse existiert nicht aus Symmetriegründen, dagegen ist das Moment um die z-Achse so zu erhalten (siehe Nr. 127):

Man projiziert die Kraft $dmr\omega^2$ in die xy-Ebene. Diese Projektion hat die Größe

$$dmr\omega^2 \cos\varphi = dm\omega^2(a + y).$$

Der Hebelarm aber in bezug auf O ist x. Mithin ist

$$M_z = \int dm\,\omega^2(a + y)x$$
$$= \omega^2(amx^* + \int dm\,xy).$$

Nennen wir $\int dm\,xy$ das Deviationsmoment in bezug auf die xy-Achsen und schreiben es D, so ist

$$M_z = \omega^2(ax^*m + D).$$

Nun sei Ox' durch den Schwerpunkt S eine weitere Symmetrieachse des Körpers, sie bilde mit der x-Achse den Winkel ϑ. Es sei ferner $OS = s$.

Dann ist

$$x^* = s\cos\vartheta \quad \text{und} \quad y^* = s\cdot\sin\vartheta.$$

Ferner ist

$$x = x' \cos\vartheta - y' \sin\vartheta,$$

$$y = x' \sin\vartheta + y' \cos\vartheta.$$

Also

$$D = \mathfrak{S}\, dm\,xy = \cos\vartheta \cdot \sin\vartheta\, \mathfrak{S}\, dm(x'^2 - y'^2) + (\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\, \mathfrak{S}\, dm\,x'y'.$$

Nun sollte aber der Körper in bezug auf die x-Achse symmetrisch sein, also entspricht jedem dmy' ein $-dmy'$ mit gleichem x', in $\mathfrak{S}\, dmx'y'$ heben sich also alle Glieder auf, es ist Null. Da wir endlich schreiben können

$$x'^2 - y'^2 = x'^2 + z^2 - (y'^2 + z^2),$$

wo $\sqrt{x'^2 + z^2}$ den Abstand von der y'-Achse und $\sqrt{y'^2 + z^2}$ den Abstand von der x'-Achse bedeutet, so wird

$$D = \cos\vartheta \sin\vartheta (B - A),$$

wo

$$B = \mathfrak{S}\, dm(x'^2 + z^2)$$

das Trägheitsmoment um die y'-Achse,

$$A = \mathfrak{S}\, dm(y'^2 + z^2)$$

das Trägheitsmoment um die x'-Achse darstellt.

Fassen wir zusammen, so erhalten wir:

1. eine resultierende Kraft in der y-Achse, d. h. radial nach außen

$$Y = m\omega^2(a + s \sin\vartheta) \equiv m\omega^2 r^*,$$

wenn r^* die Entfernung des Schwerpunktes von der Drehachse ist,

2. ein resultierendes Moment um die z-Achse

$$M_z = \omega^2 \cos\vartheta (ams + (B - A) \sin\vartheta).$$

Ist O der Schwerpunkt, so ist die Kraft

$$Y = m\omega^2 a,$$

das Moment

$$M_z = \frac{1}{2}(B - A)\omega^2 \sin 2\vartheta,$$

es verschwindet im allgemeinen nicht.

Man kann also die Zentrifugalkräfte im allgemeinen nicht auf eine einzelne im Schwerpunkt angreifende Kraft reduzieren.

In den vorstehenden Formeln sind nach Wahl des Punktes O die Größen m, r, A, B feste Konstanten des Körpers.

199. Bewegung eines Wagens in einer Kurve auf überhöhter Bahn. Ein Wagen bewege sich auf einer schrägen Bahn in einem horizontalen Kreise vom Radius a. Dieser sei vom Mittelpunkt des Kreises bis zum Schwerpunkt des Wagens gemessen. Die Neigung der nach außen überhöhten Bahn sei α, G das Gewicht des Wagens, h der Normalabstand des Schwerpunktes über dem Boden, d der Räderabstand, v die konstante Geschwindigkeit des Wagens, so daß $\omega = \frac{v}{a}$ die Winkelgeschwindigkeit der Kreisbewegung ist.

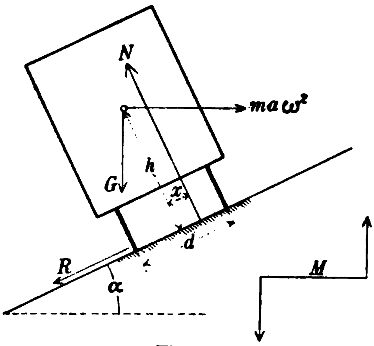


Fig. 170.

Nach dem D'Alembertschen Prinzip muß dann am Wagen Gleichgewicht zwischen den folgenden Kräften herrschen:

dem Gewicht G, der Zentrifugalkraft $ma\omega^2$, beide im Schwerpunkt angreifend,

der Reibung R, nach innen positiv gerechnet, dem Normaldruck N, der im unbekannten Abstande x vom Schwerpunkt vorbeigehe

und endlich dem Kräftepaare der Zentrifugalkraft, das nach der vorigen Nummer

$$M = \frac{1}{2}(B - A)\omega^2 \sin 2\alpha$$

ist. Die verlangten Symmetrieeigenschaften der vorigen Nummer dürfen wir wohl als hinreichend genau erfüllt ansehen.

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten dem entsprechend

$$N = G \cos\alpha + ma\omega^2 \sin\alpha,$$

$$R = ma\omega^2 \cos\alpha - G \sin\alpha,$$

$$xN = (ma\omega^2 \cos\alpha - G \sin\alpha)h - \frac{1}{2}(B - A)\omega^2 \sin 2\alpha.$$

Daraus berechnen sich N, R und x.

Nun muß noch

$$|R| \leq Nf$$

und

$$|x| \leq \frac{d}{2}$$

sein. Setzt man die Werte von N, R, x ein, so bekommt man

$$|ma\omega^2 \cos\alpha - G \sin\alpha| \leq (G \cos\alpha + ma\omega^2 \sin\alpha)f \tag{1}$$

als Bedingung gegen das Ausrutschen,

$$(ma\omega^2\cos\alpha - G\sin\alpha)h - \frac{1}{2}(B-A)\omega^2\sin 2\alpha$$
$$\leqq \frac{d}{2}(G\cos\alpha + ma\omega^2\sin\alpha) \tag{2}$$

als Bedingung gegen das Umkippen.

Nun wird in den praktisch wichtigen Fällen a meist groß sein gegen die Dimensionen des Wagens. Da aber ein Trägheitsmoment

$$A = \int dm r^2 < m r^2_{\max}$$

ist, wo $r_{\max}$ die maximale Entfernung eines Körperpunktes von der betreffenden Achse bedeutet, so wird das Glied mit $(B-A)\omega^2$ klein sein gegen das Glied mit $ma\omega^2 h$ und also meist vernachlässigt werden dürfen.

Tun wir das, so wird aus der zweiten Ungleichheit die einfachere

$$ma\omega^2\cos\alpha - G\sin\alpha \leqq \frac{d}{2h}(G\cos\alpha + ma\omega^2\sin\alpha). \tag{2'}$$

Werde der kleinere der beiden Werte f und $\frac{d}{2h}$ mit η bezeichnet, so ist notwendig und hinreichend, daß

$$|ma\omega^2\cos\alpha - G\sin\alpha| \leqq \eta(G\cos\alpha + ma\omega^2\sin\alpha) \tag{3}$$

sei. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $ma\omega^2\cos\alpha - G\sin\alpha > 0$, d. h.

$$\operatorname{tg}\alpha < \frac{a\omega^2}{g}.$$

Dann nimmt (3) die Form an

$$a\omega^2\cos\alpha - g\sin\alpha \leqq \eta(g\cos\alpha + a\omega^2\sin\alpha)$$

oder

$$\operatorname{tg}\alpha \geqq \frac{a\omega^2 - \eta g}{\eta a\omega^2 + g}.$$

2. $ma\omega^2\cos\alpha - mg\sin\alpha < 0$, d. h.

$$\operatorname{tg}\alpha > \frac{a\omega^2}{g}.$$

Dann nimmt (3) die Form an

$$-a\omega^2\cos\alpha + g\sin\alpha \leqq \eta(g\cos\alpha + a\omega^2\sin\alpha),$$

d. h.

$$\operatorname{tg}\alpha \leqq \frac{a\omega^2 + \eta g}{g - \eta a\omega^2}.$$

Nehmen wir beides zusammen, so folgt als Schlußergebnis:

$$\frac{a\omega^2 - \eta g}{\eta a\omega^2 + g} \leqq \operatorname{tg}\alpha \leqq \frac{a\omega^2 + \eta g}{g - \eta a\omega^2}.$$

Sollte

$$g < \eta a \omega^2$$

sein, so fällt die obere Schranke für α fort; sollte hingegen

$$\eta g > a \omega^2$$

sein, so wird die untere Schranke bedeutungslos. Die Bahn braucht dann nicht überhöht zu werden.

Aufgabe 93: Ein Radfahrer fahre auf derselben Bahn; welche Neigung wird er gegen die Vertikale haben? Und wie stark darf bzw. muß die Bahn überhöht sein?

200. Die stationäre Bewegung des Zentrifugalregulators. Wir betrachten einen Wattschen Schwungkugelregulator, etwa von der einfachen gezeichneten Art (in der Figur ist nur die Hälfte gezeichnet), AB sei die Achse, um die das Ganze rotiert. Der Körper OCK kann sich noch um den mit umlaufenden Punkt O drehen, welcher den konstanten Abstand a von der Achse hat. Der Punkt D ist dann zwangläufig geführt. Alle Bezeichnungen sind wohl aus der Figur klar.

Das Ganze ist ein System von zwei Freiheitsgraden: ϑ ist variabel und dann noch der Winkel φ, welcher die Stellung der ganzen Figur um die Drehachse angibt.

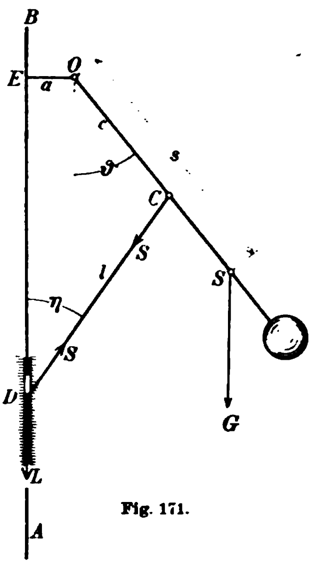


Fig. 171.

Der Einfachheit halber nehmen wir die Stangen $EO = a$ und $DC = l$ ohne Massen an. Dann wird in l ein Zug (bzw. Druck) S in Richtung der Stange herrschen. An der Hülse D wirke eine Kraft L nach abwärts (d. h. in Richtung der Drehachse). OCK habe das Gewicht G. L ist die Hälfte des Hülsengewichts vermehrt um die halbe Rückwirkung des Stellzeuges, das an der Hülse D mit dem Regulator verbunden ist. Was nun die Bewegung angeht, so beschränken wir uns auf den Fall sogenannter stationärer Bewegung: ϑ sei konstant, die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \dot{\varphi}$$

desgleichen, so daß die Voraussetzungen von Nr. 198 zutreffen.

Wir fragen nach der Bedingung dafür, daß das System die beschriebene stationäre Bewegung ausführen kann.

Nach dem D'Alembertschen Prinzip muß an dem System Gleichgewicht herrschen zwischen den Kräften G, L, der Zentrifugalkraft

$$Y = m\omega^2(a + s \sin \vartheta),$$

in O angreifend und dem Moment

$$M = \omega^2 \cos\vartheta (ams + (B - A)\sin\vartheta)$$

um eine Achse durch O.

Nun gibt die Gleichgewichtsbedingung im Punkte D:

$$S\cos\eta = L$$

(es ist ja außer L und S nur noch ein Normaldruck senkrecht zur Achse in D vorhanden), also

$$S = \frac{L}{\cos\eta}.$$

Dabei bestimmt sich η aus der sofort als richtig zu erkennenden geometrischen Gleichung:

$$l\sin\eta = a + c\cdot\sin\vartheta. \tag{1}$$

Zweitens gibt der Momentensatz für den Körper OSK in bezug auf O:

$$-Gs\cdot\sin\vartheta - Sc\sin(\vartheta + \eta) + M = 0,$$

oder, wenn man die Werte für S und M einsetzt:

$$0 = Gs\sin\vartheta + Lc\frac{\sin(\vartheta + \eta)}{\cos\eta} - \omega^2\cos\vartheta(ams + (B - A)\sin\vartheta). \tag{I}$$

Zu jeder Stellung ϑ des Regulators gehört also eine bestimmte Umlaufsgeschwindigkeit ω der stationären Bewegung. Damit aber der Regulator funktioniere, wird man verlangen, daß auch, wenigstens in dem in Frage kommenden Bewegungsbereich, zu jedem ω nur ein ϑ gehöre, und zwar zu jedem ω ein anderes. Denn wenn die Maschine, also auch der angekuppelte Regulator die Drehgeschwindigkeit ω ändert, so soll sich der Regulator verstellen und dabei das Kraftfeld der Maschine in dem Sinne beeinflussen, daß jene Änderung rückgängig gemacht wird. Es ist aber wohl plausibel, daß das nicht geschehen würde, wenn bei Änderung von ω fortdauernd eine stationäre Bewegung ohne Änderung von ϑ möglich wäre. Denn diese würde dann zweifellos bestehen bleiben und ein Regulieren der Maschine fände nicht statt.

In solcher Weise kann aus der Diskussion der stationären Bewegung schon einiges über die Brauchbarkeit oder Nichtbrauchbarkeit eines Regulators erschlossen werden. Manche Lehrbücher kommen über diesen Standpunkt auch nicht hinaus. Aber es ist klar, daß die wirkliche Erledigung der einschlägigen Fragen nur durch ein Studium der zu den stationären Bewegungen benachbarten Bewegungen erfolgen kann, in der Weise, wie wir das beim sphärischen Pendel getan haben (siehe Nr. 67). Dabei ist es nötig, den Regulator mit der Maschine als ein System aufzufassen, da sie sich in ihrer Bewegung gegenseitig beeinflussen.

Alle Ausführungen über stationäre Bewegungen bedeuten also nur eine Vorbereitung für das wirkliche Regulatorproblem. In diesem Buche ist nicht der Platz, das Problem selbst zu behandeln, es sei deshalb nur noch die wichtigste Literatur genannt.

Die ersten, die eine wissenschaftliche Behandlung des Regulatorproblems anstrebten, waren Airy 1839, dann Maxwell 1868. Ihnen folgten Routh (A Treatise on the stability of a given state of motion, 1877) und Wischnegradsky (Zivilingenieur 1877). Diese Untersuchungen sind teilweise in die Lehrbücher aufgenommen, siehe Routh, Dynamik, II. Bd., Föppl, Bd. 6 und Lorenz, Technische Physik, Bd. I.

Mit verschiedenen Problemen, zu denen kompliziertere als die oben skizzierten Reguliereinrichtungen führen, beschäftigen sich zahlreiche neuere Arbeiten, u. a.:

A. Stodola, Das Siemenssche Regulierprinzip und die amerikanischen Inertieregulatoren, 1899 (Z. d. V. d. I.) W. Hort, Die Entwicklung des Problems der stetigen Kraftmaschinenregelung und über unstetige Regulierung, in der Ztschr. f. Math. u. Phys. 1904, auch: Beitrag zur Theorie der Dampfmaschinenregulierung (Dinglers polyt. Journal, Bd. 322); Ph. Ehrlich, Der Einfluß des Tachometers auf den Reguliervorgang (Elektrotechnik und Maschinenbau, 1907): R. v. Mises, Zur Theorie der Regulatoren (Elektrotechnik und Maschinenbau, 1908). Auch sei auf den Artikel von v. Mises in der Encyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. IV, 10: Dynamische Probleme der Maschinentechnik; endlich auf das Referat von K. Heun, Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik (Deutsche Math.-Vereinigung Bd. IX, Teil 2 (1900)) hingewiesen.

In der ersten (größeren) Arbeit von W. Hort findet sich eine ziemlich ausführliche historische Darstellung des Problems.

Als ausführliches, technisches Lehrbuch, das auch die elementare Theorie berücksichtigt, sei Tolle, Regelung der Kraftmaschinen, 2. Aufl. 1910, genannt.

Der in diesem Buche benutzte Begriff der C-Kurve sei noch kurz erklärt: Wählt man als Unabhängige den Schwerpunktsabstand $r^* = a + s \cdot \sin\vartheta$, als Abhängige $C = r^*\omega^2$ und trägt die durch (I) vermittelte Beziehung von C zu r^* graphisch auf, so erhält man die fragliche C-Kurve.

201. Anwendungen des D'Alembertschen Prinzips in der Kinetostatik. Das D'Alembertsche Prinzip gestattet eine sehr einfache Bestimmung der Beanspruchung eines bewegten starren Körpers. Betrachtet man z. B. die Lenkstange einer Dampfmaschine, und will man ihre Beanspruchung wissen, so füge man zu den Schwerkräften noch die negativen Massenbeschleunigungen an jeder Stelle hinzu und behandle nun die Lenkstange hinsichtlich der Bestimmung von Zug, Druck, Schub und Biegungsmoment wie einen Balken, der außer diesen Kräften noch an den Enden den Drucken unterworfen ist, welche von Kreuzkopf und Kurbelzapfen auf die Lenkstange ausgeübt werden. Kennt man die Bewegung der Maschine, so sind alle Kräfte, die wirklichen und die Scheinkräfte, bekannt, das Problem ist also vollständig bestimmt.

Wir wollen ein einfaches Beispiel durchführen: Ein homogener Stab der Länge l und der spezifischen Masse μ rotiere um das eine Ende mit der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit ω; die augenblickliche Winkelbeschleunigung sei $\dot{\omega}$. Wie groß wird in der Entfernung x von der Achse, Zug, Schub und Biegungsmoment? Von der Beanspruchung durch äußere Kräfte sehen wir ab.

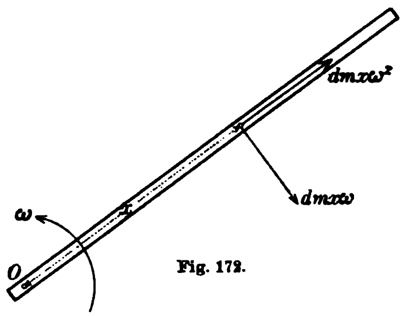


Fig. 172.

Die Scheinkräfte sind an einer Stelle z von der Achse $dm z\omega^2$ nach außen, $dm z\dot{\omega}$ dem Sinne der Drehung entgegengesetzt.

Daher ist der Zug an der Stelle x

$$S = \int_x^l \mu z \omega^2 dz = \frac{1}{2}\mu\omega^2(l^2 - x^2).$$

Der Schub ist

$$V = \int_x^l \mu z \dot{\omega}^2 dz = \frac{1}{2}\mu\dot{\omega}^2(l^2 - x^2).$$

Das Biegungsmoment

$$B = \int_x^l (z - x)\mu z \dot{\omega}\, dz = \frac{1}{6}\mu\dot{\omega}(2l^3 - 3xl^2 + x^3).$$

für $x = 0$ erhält man die Rückwirkung der rotierenden Stange auf das Lager:

einen Zug in Richtung der Stange: $\frac{1}{2}\mu\omega^2 l^2$,

eine Kraft senkrecht, zu $\dot{\omega}$ entgegengesetzt: $\frac{1}{2}\mu\dot{\omega}l^2$,

ein Moment, ebenfalls $\dot{\omega}$ entgegengesetzt: $\frac{1}{3}\mu\dot{\omega}l^3$.

Aufgabe 94: Für einen in sich rotierenden Kreisring der Dicke d mit den Radien R und r sowie der spezifischen Masse μ berechne man für einen Querschnitt die gesamte, von der Drehung veranlaßte Zugspannung.

202. Weitere Beispiele und Aufgaben.

Es seien zwei Massenpunkte m_1 und m_2 durch einen Idealfaden miteinander verbunden, der über eine feste Rolle O laufe. Der eine hänge frei herab, der andere sei reibungsfrei zwischen zwei vertikalen Schienen beweglich.

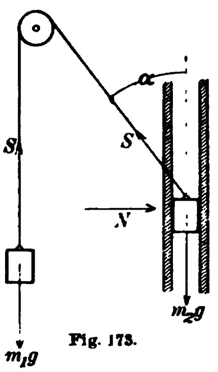


Fig. 173.

Wir lösen zunächst das Problem des Gleichgewichts. Aus dem Gleichgewicht für den Punkt m_2 folgt sofort die Fadenspannung

$$S = \frac{m_2 g}{\cos\alpha}.$$

Für m_1 aber muß sein

$$S = m_1 g.$$

Mithin lautet die Gleichgewichtsbedingung

$$m_2 g = m_1 g \cos\alpha.$$

Wenn wir nun das Bewegungsproblem lösen wollen, so sei zunächst bemerkt, daß das D'Alembertsche Prinzip auch für allgemeine Systeme gilt, wenn z. B. wie hier, ein Idealfaden mitspielt, dessen Spannung stets Reaktionskraft ist.

Habe nun m_1 die Beschleunigung w_1 abwärts, m_2 die Beschleunigung w_2 nach abwärts, so haben wir nach dem D'Alembertschen Prinzip dieselbe Aufgabe wie vorhin zu lösen, nur daß wir $m_1 g - m_1 w_1$ statt $m_1 g$; $m_2 g - m_2 w_2$ statt $m_2 g$ zu setzen haben. Also lautet die Bewegungsgleichung

$$m_2 g - m_2 w_2 = \cos\alpha\,(m_1 g - m_1 w_1).$$

Nun sind aber w_1 und w_2 nicht unabhängig voneinander. Ist l die konstante Fadenlänge, h der Abstand der Rolle von der vertikalen Führung des Punktes m_2, sind x_1 und x_2 die abwärts gerichteten Koordinaten von m_1 bzw. m_2, von der Höhe der Rolle an gezählt, und sehen wir den Durchmesser der Rolle als verschwindend klein gegen die anderen Dimensionen an, so ist

$$x_2 = h \operatorname{ctg}\alpha,$$

$$x_1 = l - \frac{h}{\sin\alpha},$$

also

$$\dot{x}_2 = -h\frac{\dot{\alpha}}{\sin^2\alpha},$$

$$\dot{x}_1 = +h\frac{\cos\alpha\cdot\dot{\alpha}}{\sin^2\alpha}$$

und schließlich

$$w_2 = -h\frac{\ddot{\alpha}}{\sin^2\alpha} + 2h\frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha}\cdot\dot{\alpha}^2,$$

$$w_1 = h\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\ddot{\alpha} - h\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha}\cdot\dot{\alpha}^2.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die obige Bewegungsgleichung ein, so erhält man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Weiterbehandlung uns nicht interessiert.

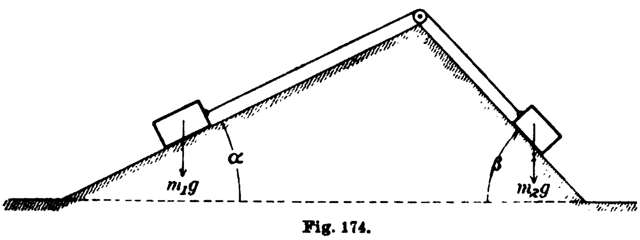


Fig. 174.

Aufgabe 95: Zwei Massen mögen sich auf je einer geneigten Ebene bewegen und durch einen Idealfaden verknüpft sein, der über eine reibungsfrei drehbare und masselose Rolle geht.

Man stelle zunächst die Gleichgewichtsbedingungen auf, dann nach dem D'Alembertschen Prinzip die Bewegungsgleichungen.

203. Die Bewegungsgleichungen des freien starren Körpers. Wir schließen den Abschnitt damit, daß wir zeigen, wie wir aus dem D'Alembertschen Prinzip die schon am Schluß des ersten Abschnittes aus der Punktmechanik gewonnenen Bewegungsgleichungen des starren Körpers ableiten können. Mit den besser entwickelten Hilfsmitteln, namentlich kinematischer Art, die uns der dritte Abschnitt geben soll, kommen wir später noch einmal auf das D'Alembertsche Prinzip zurück (siehe Nr. 316).

Am starren Körper sind zwei Kräftesysteme gleichwertig, wenn die Summe der äußeren Kräfte und die Summe ihrer Momente gleich sind.

Für den freien starren Körper sind aber die äußeren Kräfte zugleich die eingeprägten Kräfte.

Da nun nach dem D'Alembertschen Prinzip das System der Massenbeschleunigungen dem System der eingeprägten Kräfte äquivalent sein soll, so erhalten wir unmittelbar die beiden vektoriellen Gleichungen

$$\mathfrak{S}\, dm\, \bar{w} = \mathfrak{S}\, d\bar{k},$$
$$\mathfrak{S}\, dm\, \overline{r\, w} = \mathfrak{S}\, \overline{r\, dk}.$$

Die erste Gleichung sagt aus:

Für den freien starren Körper ist die Summe der Massenbeschleunigungen gleich der Summe der eingeprägten (äußeren) Kräfte.

Das ist aber der Schwerpunktssatz, denn es ist ja

$$\mathfrak{S}\, dm\, \bar{w} = \frac{d^2}{dt^2}\mathfrak{S}\, dm\, \bar{r} = m\, \frac{d^2 \bar{r}^*}{dt^2}.$$

Der zweite Satz heißt der Momentensatz, er sagt aus

daß für irgendeinen Bezugspunkt, fest oder beweglich, die Summe der Momente der Massenbeschleunigungen gleich ist der Summe der Momente der eingeprägten (äußeren) Kräfte.

Man kann mit diesen beiden Sätzen allein schon in Verbindung mit der lex tertia (siehe Nr. 47, 48) die Mechanik der Systeme starrer Körper aufbauen. Wir werden auch später diese synthetische Methode ausführlich besprechen (siehe § 53).

Vorher aber ist es nützlich, eine ganz allgemeine Methode der Mechanik kennen zu lernen, **ein zweites Grundgesetz der Mechanik,** das zusammen mit dem ersten (Newtonschen) Grundgesetz gestattet, alles das über die Bewegung beliebiger Systeme auszusagen, was sich überhaupt allgemein darüber aussagen läßt. Dieses zweite Grundgesetz wollen wir zunächst im dritten Abschnitt kennen lernen.

Dritter Abschnitt.

Allgemeine Mechanik.

Kapitel VIII.

Grundlagen einer allgemeinen Mechanik.

§ 38. Das erste (Newtonsche) Grundgesetz.

204. Das Gegenwirkungsgesetz. An die Ergebnisse des ersten Kapitels (siehe § 10) anknüpfend, legen wir nunmehr einer allgemeinen Mechanik die folgenden Anschauungen zugrunde:

An jedem Volumelement dV irgendeines Teiles der uns umgebenden Natur von der Masse $dm = \mu dV$ greife die resultierende, räumlich verteilte Kraft $d\bar{k} = \bar{x} dV$ an (also die Resultierende aller Gravitations-, Molekular-, elektrischen, magnetischen usw. Kräfte). Außerdem stehe die Oberfläche des Elementes noch unter der Wirkung von mechanischen, d. h. durch Deformationen bedingten Druckkräften (Spannungen), welche von der unmittelbaren Umgebung des Elementes auf dasselbe ausgeübt werden. Auf das Flächenelement dF mit der äußeren Normalen $\bar{\nu}$ wirke also noch die Kraft $dF \cdot \bar{\sigma}_\nu$.

Dann lautet das erste Grundgesetz der Mechanik, das von Newton ausgesprochen wurde,

$$\mu \bar{w} = \bar{x} + \lim_{dV=0} \frac{1}{dV} \mathfrak{S} \bar{\sigma}_\nu dF,$$

wobei $\mathfrak{S}$ die Summation über die Oberfläche des Elementes bedeutet.

Aus der vorstehenden Grundgleichung ziehen wir nun sofort eine wichtige Folgerung:

Nach Voraussetzung sind $\mu \bar{w}$ und $\bar{x}$ bestimmte endliche Vektoren. Also muß dasselbe für

$$\lim_{dV=0} \frac{1}{dV} \mathfrak{S} \bar{\sigma}_\nu dF$$

gelten, welche Gestalt auch immer dV haben mag.

Betrachten wir nun als Volumelement ein rechtwinkliges Parallelepiped, das wir gegen eine Ecke konvergieren lassen, und legen die Koordinatenachsen den Kanten parallel, so daß die Kantenlängen dx, dy, dz seien.

Die mittleren Spannungen an den drei Flächen, welche den Konvergenzpunkt enthalten, wollen wir mit $\bar{\sigma}_{-x}$, $\bar{\sigma}_{-y}$, $\bar{\sigma}_{-z}$ bezeichnen, da die $-x$-, $-y$-, $-z$-Achsen die äußeren Normalen der Flächen bilden. Dagegen werden naturgemäß mit $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z$ die spezifischen Spannungen zu bezeichnen sein, die unser Volumelement selbst auf seine Nachbarschaft mit kleinerem x bzw. y bzw. z ausübt. Die Spannungen, die es hingegen selbst von Elementen mit größerem x bzw. y bzw. z empfängt, werden $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$, $\bar{\sigma}_z$ sein, jedoch mit $x+dx, y, z$ bzw. $x, y+dy, z$, bzw. $x, y, z+dz$ als Argumenten. Da wir nun die $\bar{\sigma}$ als stetige und stetig differentiierbare Funktionen des Ortes voraussetzen, so werden wir die Kraftwirkungen auf den drei Flächen, welche den Konvergenzpunkt nicht enthalten, unter Fortlassen von Größen höherer Ordnung, die beim Grenzprozeß herausfallen, durch

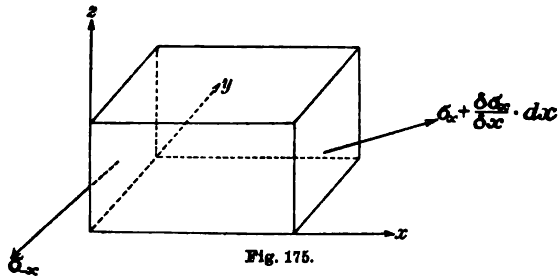


Fig. 175.

$$\left(\bar{\sigma}_x + \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x}\,dx\right)dy\,dz \text{ bzw. } \left(\bar{\sigma}_y + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y}\,dy\right)dx\,dz \text{ bzw. } \left(\bar{\sigma}_z + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z}\,dz\right)dx\,dy$$

anzusetzen haben.

Also wird unser Ausdruck

$$\lim_{dV=0} \frac{1}{dV} \mathfrak{S}\, \bar{\sigma}_\nu dF,$$

indem wir beachten, daß sich die Summe $\mathfrak{S}$ hier über sechs Flächen erstreckt und daß $dV = dx\,dy\,dz$ ist

$$\lim_{dx=0} \lim_{dy=0} \lim_{dz=0} \frac{1}{dx\,dy\,dz} \Big\{\bar{\sigma}_{-x} dy\,dz + \left(\bar{\sigma}_x + \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x}\,dx\right) dy\,dz$$
$$+ \bar{\sigma}_{-y} dx\,dz + \left(\bar{\sigma}_y + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y}\,dy\right) dx\,dz + \bar{\sigma}_{-z} dx\,dy$$
$$+ \left(\bar{\sigma}_z + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z}\,dz\right) dx\,dy\Big\}$$

oder gleich

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} + \lim_{dx=0} \frac{1}{dx}(\bar{\sigma}_{-x} + \bar{\sigma}_x)$$
$$+ \lim_{dy=0} \frac{1}{dy}(\bar{\sigma}_{-y} + \bar{\sigma}_y) + \lim_{dz=0} \frac{1}{dz}(\bar{\sigma}_{-z} + \bar{\sigma}_z).$$

Dieser Ausdruck kann aber, weil dx, dy, dz unabhängig voneinander gegen Null gehen, nur dann gegen eine feste Grenze gehen, wenn

$$\bar{\sigma}_{-x} + \bar{\sigma}_x, \quad \bar{\sigma}_{-y} + \bar{\sigma}_y, \quad \bar{\sigma}_{-z} + \bar{\sigma}_z$$

für sich Null sind.

Nun war aber die x-Richtung eine ganz willkürliche Richtung: wir können sie mit irgendeiner Richtung $\bar{\nu}$ identifizieren. Und somit erhalten wir

$$\bar{\sigma}_\nu = -\bar{\sigma}_{-\nu}, \tag{I}$$

d. h. das Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung.

Daß die beiden an einem Flächenelement auftretenden Spannkräfte entgegengesetzt gleich sind, ist also eine notwendige Folgerung des ersten Grundgesetzes der Mechanik.

Außerdem aber haben wir gefunden, daß

$$\lim \frac{1}{dV} \mathrm{S}\, \bar{\sigma}_\nu dF = \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} \tag{II}$$

ist.

Nach derselben Methode folgt die Gleichung (I) für die Statik aus dem Erstarrungsprinzip (siehe Nr. 151 und 178), denn dieses sagt ja aus, daß im Gleichgewichtsfalle

$$\bar{\varkappa} + \lim \frac{1}{dV} \mathrm{S}\bar{\sigma}_\nu dF = 0$$

sein muß.

205. Die Spannungsdyade. Wir wollen die Überlegungen der vorhergehenden Nummer noch einmal wiederholen, indem wir als Volumelement ein Tetraeder nehmen, das wir erhalten, wenn wir durch einen festen Punkt drei orthogonale Strahlen ziehen und diese durch eine gegen diese Strahlen geneigte Ebene schneiden, die wir, sich selbst parallel, dem festen Punkte unbegrenzt näher bringen.

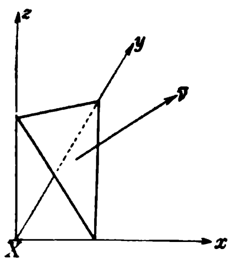


Fig. 176.

Wir können die drei Strahlrichtungen wieder zur positiven x-, y-, z-Achse machen. Sei dF die kleine Dreiecksfläche in der beweglichen Ebene, deren äußere Normale die Winkel α, β, γ gegen die drei Achsen bildet, so sind $dF \cos\alpha$, $dF \cos\beta$, $dF \cos\gamma$ die drei anderen Flächen des Tetraeders und aus

$$\lim \frac{1}{dV} \mathrm{S}\bar{\sigma}_\nu dF$$

wird

$$\lim \frac{dF}{dV}(\bar{\sigma}_\nu + \bar{\sigma}_{-x} \cos\alpha + \bar{\sigma}_{-y} \cos\beta + \bar{\sigma}_{-z} \cos\gamma).$$

Da aber in der Grenze $\frac{dF}{dV}$ unendlich wird, so kann der vorstehende Ausdruck nur dann endlich bleiben, wenn die Klammer Null wird,

d. h. wenn in der Grenze, wo die Fläche mit den Neigungswinkeln α, β, γ in den Punkt X hineinrückt,

$$\bar{\sigma}_\nu = \bar{\sigma}_x \cos\alpha + \bar{\sigma}_y \cos\beta + \bar{\sigma}_z \cos\gamma \tag{III}$$

wird.

Kennen wir also an einer Stelle die Spannungen für drei zueinander orthogonale Flächenelemente, so berechnet sich die Spannung für jedes andere Flächenelement nach der Formel (III).

Nimmt man das Gegenwirkungsprinzip hinzu, so kann man leicht zeigen, daß die Formel (III) auch dann noch gilt, wenn die Winkel α, β, γ nicht alle spitz sind.

Der Spannungszustand an einer Stelle ist also durch drei Vektoren oder neun Skalare, nämlich die dreimal drei Komponenten von $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$, $\bar{\sigma}_z$ nach den drei Achsen gegeben.

Bezeichnen wir die Komponenten von $\bar{\sigma}_x$ mit X_x, Y_x, Z_x und die von $\bar{\sigma}_y$, $\bar{\sigma}_z$ entsprechend, so können wir auch sagen, daß der Spannungszustand an einer Stelle durch das Schema der neun Größen

$$\begin{matrix} X_x\, Y_x\, Z_x \\ X_y\, Y_y\, Z_y \\ X_z\, Y_z\, Z_z \end{matrix}$$

gegeben sei. X_x, Y_y, Z_z sind Zugkräfte, wenn sie positiv, Druckkräfte im engeren Sinne, wenn sie negativ sind; die sechs anderen Größen sind Scher(Schub-)kräfte.

Wir wollen den Inbegriff aller Spannungen an einer Stelle auch Spannungsdyade nennen, indem wir das Wort „Dyade" nach Jaumann (Gibbs sagt: Dyadic) für einen Größenkomplex brauchen, der an einer Stelle jedem Vektor mit den Komponenten a, b, c in linearhomogener Weise einen Vektor mit den Komponenten $a'b'c'$ zuordnet.

Die allgemeinste Art einer solchen linear-homogenen Zuordnung ist die folgende:

$$\begin{aligned} a' &= X_x a + X_y b + X_z c, \\ b' &= Y_x a + Y_y b + Y_z c, \\ c' &= Z_x a + Z_y b + Z_z c, \end{aligned}$$

so daß jede Dyade durch ein Schema von neun Größen: X_x usw. gegeben ist.

Nehmen wir als Vektor (a, b, c) speziell einen Einheitsvektor, so entsprechen die vorstehenden Formeln vollständig der Formel (III). Daß sich bei einer Dyade stets X_x, Y_x, Z_x, ebenso die beiden anderen Tripel als Komponenten eines Vektors auffassen lassen, sieht man sofort ein, wenn man als zu transformierenden Vektor den Einheitsvektor $(1, 0, 0)$ nimmt.

Die Formel (III) gestattet auch, von einem Koordinatensystem zu einem anderen überzugehen, denn man erhält sofort

$$\bar{\sigma}_{x'} = \bar{\sigma}_x \cos(x,x') + \bar{\sigma}_y \cos(y,x') + \bar{\sigma}_z \cos(z,x')$$

usw. Es muß sich mit Benutzung dieser Formel und der bekannten Koordinatentransformationsformeln

$$x' = x \cos(x,x') + y \cos(y,x') + z \cos(z,x')$$

usw. beweisen lassen, daß der Ausdruck

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z}$$

invariant ist gegen Wechsel des Koordinatensystems, denn seine Bedeutung ist vermöge

$$\lim \frac{1}{dV} \mathsf{S}\, \bar{\sigma}_\nu dF = \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z}$$

unabhängig von jedem speziellen Koordinatensystem.

Abkürzungsweise schreiben wir ihn

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} = \nabla \cdot \Lambda,$$

und nennen ihn die „Ableitung der Spannungsdyade Λ“, indem wir mit Λ die Spannungsdyade selbst bezeichnen.

Aufgabe 96: Man beweise direkt auf die oben angedeutete Weise die Unabhängigkeit von $\nabla \cdot \Lambda$ vom Koordinatensystem.

206. Der Schwerpunktssatz. Wir können diesen fundamentalen Satz, den wir schon in Nr. 51 mit Benutzung des Gegenwirkungsprinzips und in Nr. 203 wenn auch nur für den starren Körper mit Hilfe des D'Alembertschen Prinzips gewonnen haben, nunmehr direkt aus dem Newtonschen Grundgesetz ableiten.

Wir schreiben dieses unter Benutzung von (II) Nr. 204 so:

$$\mu \bar{w} = \bar{\varkappa} + \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z}.$$

Daraus folgt durch Multiplikation mit dV und Integration über einen beliebigen Teil V der Materie

$$\int_V dm\, \bar{w} = \int_V \bar{\varkappa}\, dV + \int_V \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z}\right) dV. \qquad (1)$$

Nun läßt sich das letzte Volumintegral nach dem Gaußschen Satze (siehe Anhang III, 1) in ein Oberflächenintegral, d. h. in ein Integral über die Oberfläche F des Teiles V der Materie umwandeln.

Denn es ist

$$\int_V \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} dV = \int_F \bar{\sigma}_x \cos(\nu, x)\, dF$$

und, wenn man Gleichung (III) aus Nr. 205 hinzuzieht,

$$\int \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} \right) dV = \int_F \bar{\sigma}_\nu dF.$$

Setzen wir das in die obige Gleichung (1) ein, so ergibt sich sofort

$$m\bar{w}^* \equiv \int_V dm\, \bar{w} = \underset{V}{\mathfrak{S}} \bar{x}\, dV + \underset{F}{\mathfrak{S}} \bar{\sigma}_\nu dF.$$

Auf der rechten Seite stehen jetzt nur noch die räumlich verteilten Kräfte und die Spannungen an der Oberfläche, die wir zusammen auch als äußere Kräfte bezeichnen wollen: wir haben also den Schwerpunktssatz gewonnen:

Für jedes mechanische System ist die Beschleunigung des Schwerpunktes (Massenmittelpunktes), *mit der ganzen Masse des Systems multipliziert, gleich der Summe der äußeren Kräfte.*

Da in dem Schwerpunktssatz das Newtonsche Grundgesetz enthalten ist, wenn man ihn auf beliebig kleine Teile anwendet, wir aber den Schwerpunktssatz allein unter Benutzung der Formeln I, II, III (Nr. 204 und 205) abgeleitet haben, so folgt daraus zugleich:

Die Formeln (I), (II), (III) *enthalten alles, was man aus dem Newtonschen Grundgesetz allein für die Spannungen ableiten kann.*

Es hätte also keinen Zweck, noch anders geartete Volumelemente als Parallelepipede und Tetraeder in analoger Weise zu behandeln, wie es mit diesen in den Nr. 204 und 205 geschehen ist.

Als Beispiele zu diesem Paragraphen können alle Betrachtungen des Kapitels II dienen.

§ 39. Das zweite (Boltzmannsche) Grundgesetz.

207. Der Momentensatz. Wir haben schon zweimal den Momentensatz abgeleitet, einmal am Schlusse des ersten Abschnittes, in dem wir das mechanische System in lauter diskrete Punkte auflösten, dann am Schlusse des zweiten Abschnittes, allerdings nur für den starren Körper, indem wir das D'Alembertsche Prinzip und die Grundsätze der Statik anwandten. Nunmehr wollen wir zusehen, ob und welche neue Voraussetzungen wir machen müssen, um den Momentensatz direkt aus dem Newtonschen Grundgesetz zu gewinnen.

Wir schreiben dieses wieder in der Form, wie schon in Nr. 204

$$\mu \bar{w} = \bar{x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z},$$

bilden das äußere Produkt (siehe Anhang I, 5, auch Nr. 112) mit dem Ortsvektor $\bar{r}$, multiplizieren mit dV und integrieren über einen beliebigen Teil der Materie, so daß wir erhalten

$$\mathrm{S}\, dm \overline{r w} = \mathrm{S}\, \overline{r x} dV + \mathrm{S}\, \overline{r \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\right)} dV. \tag{1}$$

Auf der linken Seite steht bereits die Summe der Momente der Massenbeschleunigungen, das zweite Integral ist das Gesamtmoment der räumlich verteilten Kräfte; betrachten wir noch das letzte Integral, das wir durch partielle Integration und Anwendung des Gaußschen Satzes umformen können.

Allgemein ist

$$\mathrm{S}_V \overline{a \frac{\partial b}{\partial x}} dV = \mathrm{S}_F \overline{ab} \cos(\nu, x) dF - \mathrm{S}_V \overline{\frac{\partial a}{\partial x} b} dV,$$

wo (ν, x) den Winkel bedeutet, den die äußere Normale der Oberfläche F mit der x-Achse einschließt.

Also ist, wenn wir noch (III) aus Nr. 205 hinzuziehen

$$\mathrm{S}\, \overline{r \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\right)} dV = \mathrm{S}_F \overline{r \sigma_\nu} dF - \mathrm{S} \overline{\left(\frac{\partial r}{\partial x}\sigma_x + \frac{\partial r}{\partial y}\sigma_y + \frac{\partial r}{\partial z}\sigma_z\right)} dV.$$

Setzen wir noch zur Abkürzung

$$\overline{\frac{\partial r}{\partial x}\sigma_x} + \overline{\frac{\partial r}{\partial y}\sigma_y} + \overline{\frac{\partial r}{\partial z}\sigma_z} = \bar{D}, \tag{2}$$

so nimmt Gleichung (1) die Form an

$$\mathrm{S}\, dm \overline{r w} = \mathrm{S}\, \overline{r x} dV + \mathrm{S}\, \overline{r \sigma_\nu} dF - \mathrm{S}\, \bar{D} dV.$$

Die beiden ersten Summen der rechten Seite stellen das Moment der äußeren Kräfte dar; bezeichnen wir die äußeren Kräfte kurz mit $d\bar{k}$, so haben wir aus dem Newtonschen Grundgesetz den folgenden **allgemeinen Momentensatz** gewonnen:

$$\mathrm{S}\, dm \overline{r w} = \mathrm{S}\, \overline{r dk} - \mathrm{S}\, \bar{D} dV.$$

Soll also für einen beliebigen Teil der Materie der eigentliche Momentensatz gelten: „das Moment der Massenbeschleunigung ist gleich dem Moment der äußeren Kräfte", so muß überall

$$\bar{D} = 0$$

sein.

208. Axiom IX: Die Symmetrie der Spannungsdyade. Ist nun wirklich überall $\overline{D} = 0$?

Es war

$$\overline{D} = \overline{\frac{\partial r}{\partial x}}\,\sigma_x + \overline{\frac{\partial r}{\partial y}}\,\sigma_y + \overline{\frac{\partial r}{\partial z}}\,\sigma_z.$$

Nun ist aber, wenn $\bar{\varepsilon}_x$, $\bar{\varepsilon}_y$, $\bar{\varepsilon}_z$ Einheitsvektoren in Richtung der x-, y-, z-Achse bezeichnen,

$$\bar{r} = \bar{\varepsilon}_x \cdot x + \bar{\varepsilon}_y \cdot y + \bar{\varepsilon}_z \cdot z,$$

also

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial x} = \bar{\varepsilon}_x, \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} = \bar{\varepsilon}_y, \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial z} = \bar{\varepsilon}_z$$

und somit

$$\overline{D} = \overline{\varepsilon_x \sigma_x} + \overline{\varepsilon_y \sigma_y} + \overline{\varepsilon_z \sigma_z},$$

in Komponenten geschrieben:

$$D_x = Z_y - Y_z,$$
$$D_y = X_z - Z_x,$$
$$D_z = Y_x - X_y.$$

Soll also $\overline{D} = 0$ sein, so müssen

$$Z_y = Y_z, \quad X_z = Z_x, \quad Y_x = X_y \tag{IV}$$

sein, oder:

Es muß die Spannungsdyade

$$\begin{matrix} X_x\, Y_x\, Z_x, \\ X_y\, Y_y\, Z_y, \\ X_z\, Y_z\, Z_z \end{matrix}$$

symmetrisch (zu der Diagonalen: X_x, Y_y, Z_z) *sein, wenn der Momentensatz gelten soll*:

$$\mathfrak{S}\, dm\, r\, w = \mathfrak{S}\, r\, dk.$$

Da (IV) eine Aussage ist, die offenbar von den Behauptungen (I), (II), (III) der vorhergehenden Nummern ganz unabhängig ist, diese aber die einzigen Folgerungen aus dem Newtonschen Grundgesetze darstellen, so kann der eigentliche Momentensatz nicht aus diesem gewonnen werden.

Um also den Momentensatz behaupten zu können, bedarf es eines besonderen Axioms:

Die Spannungsdyade ist symmetrisch.

209. Worauf stützt sich die Berechtigung dieses Axioms? Wir wissen, daß man den Momentensatz und damit auch dieses Axiom aufstellen kann, wenn man die Hypothese zuläßt, daß ein jedes

System aus einer endlichen Anzahl von Massenpunkten besteht, deren Zusammenhang durch Kräfte aufrecht erhalten wird, die dem Gegenwirkungsprinzip in seiner weiteren Fassung gehorchen (siehe § 22).

Auf diese Weise wird auch meist unser neues Axiom gewonnen. Daß jedoch die benutzte Grundvorstellung recht künstlich ist, wurde früher schon betont.

Wesentlich befriedigender ist die Ableitung mittels des D'Alembertschen Prinzips, das selbst nebst den benutzten Axiomen der Statik einen sehr hohen Grad von Plausibilität besitzt. Doch wird dadurch das Axiom nur für starre Körper gewährleistet, die Übertragung auf andere Systeme ist ein neues Axiom. Bei dem in diesem Abschnitt vorgetragenen Aufbau der Mechanik ist der Satz unbeweisbar, was zuerst Boltzmann deutlich aussprach, weshalb wir das Grundgesetz der Symmetrie der Spannungsdyade auch nach ihm benennen wollen, obgleich der Satz an sich viel älter ist.

Das Axiom empfiehlt sich nun zunächst durch seine Einfachheit. Wir werden sehen, daß wir einen Satz analog dem Momentensatz auf jeden Fall brauchen. Wäre nun $\bar{D}$ nicht Null, so müßten wir irgend eine Annahme über $\bar{D}$ machen: es müßte $\bar{D}$ durch irgend welche Ursachen bestimmt werden.

Für die Statik folgt der Satz aus dem allgemeinen Erstarrungsprinzip (Axiom VIII, Nr. 178). Denn danach muß im Gleichgewichtsfalle für jeden Raumteil die Summe der Momente der äußeren Kräfte Null sein, also

$$\int r d\bar{k} = 0;$$

da aber nach Nr. 207 auch im Gleichgewichtsfalle

$$\int r dk - \int \bar{D} d V = 0$$

sein muß, so folgt

$$\int \bar{D} d V = 0$$

für jeden Raumteil, also auch überall

$$\bar{D} = 0.$$

Das Hauptargument aber, die Annahme $\bar{D} = 0$ zu vertreten, liegt naturgemäß in der Übereinstimmung mit der Erfahrung.

Wir dürfen deshalb das einfache Axiom der Symmetrie der Spannungsdyade aussprechen, weil sich bis jetzt noch alle Erfahrungstatsachen in ungezwungener Weise mit dem Momentensatz haben in Einklang bringen lassen.

Wir sagen absichtlich nicht: die Erfahrung beweist die Symmetrie der Spannungsdyade, weil man zeigen kann, daß sich jeder Erfahrungsinhalt mit dem Boltzmannschen Axiom in Einklang bringen ließe, wenn man geeignete, noch unbekannte und durch eben jene Ursachen bestimmte Kräfte annähme, durch die auch $\bar{D}$ verursacht würde (siehe des Verfassers Arbeit in den Math. Annalen, Bd. 66: Über die Grundlagen der Mechanik).

Noch eine Bemerkung sei gestattet, welche die räumlich verteilten Kräfte anbetrifft. Auch von ihnen werden sich einige aus den beiden Fundamentalsätzen fortheben:

1. diejenigen, welche sich als Kraftwirkungen zwischen je zwei Punkten des Körpers auffassen lassen und das vollständige Gegenwirkungsprinzip erfüllen, wie z. B. die Gravitationskräfte (siehe Nr. 95, 107 und 108) oder die elektromagnetischen Kräfte in der älteren Auffassung (Coulombsches Gesetz);

2. zum Teil diejenigen, welche neuerdings meist als (nicht-mechanische) Spannungen aufgefaßt werden (z. B. elektromagnetische Kräfte, siehe die Bemerkung in Nr. 42), von denen dann auch nur die Oberflächenspannungen in Schwerpunkts- und Momentensatz stehen bleiben (genau wie bei den mechanischen Spannungen), vorausgesetzt, daß ihre Spannungsdyade ebenfalls symmetrisch ist.

210. Andere Fassungen des Momentensatzes. Es ist nicht nötig, daß wir in dem Momentensatz: Moment der Massenbeschleunigung gleich dem Moment der äußeren Kräfte, die Momente auf denselben Punkt O beziehen, von dem aus wir den Ortsvektor $\bar{r}$ messen. Offenbar können wir irgendeinen Bezugspunkt zugrunde legen.

Wir erhalten aber damit keine neuen Sätze. Denn nach Nr. 114 ist für jedes Vektorensystem, also auch für $dm\bar{w}$ ebensogut wie für die $d\bar{k}$ das Moment in bezug auf einen Punkt O'

$$\overline{M'} = \overline{M} + sK,$$

wo $\bar{M}$ das Moment in bezug auf den Punkt O ist, s den Vektor $O'O$ bedeutet und $\bar{K}$ die Summe der Vektoren.

Ist also in bezug auf den Punkt O das Moment der Massenbeschleunigungen gleich dem Moment der äußeren Kräfte, und nach dem Schwerpunktssatz die Summe der Massenbeschleunigungen gleich der Summe der äußeren Kräfte, so ist der Momentensatz für jeden anderen Punkt O' von selbst erfüllt, mag dies nun ein fester Punkt sein oder ein beweglicher Punkt.

Nehmen wir nun als Bezugspunkt einen festen Punkt, so können wir von ihm aus den Ortsvektor $\bar{r}$ messen, so daß

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}}$$

ist, und

$$\frac{d}{dt}\overline{rv} = \overline{rw}.$$

(siehe Nr. 102). In diesem Falle wird also

$$\mathrm{S}\, dm\overline{rw} = \frac{d}{dt}\mathrm{S}\, dm\overline{rv}.$$

Sowie man also den Schwerpunktssatz stets schreiben kann

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{S}dm\bar{v} = \mathfrak{S}d\bar{k},$$

so kann man den Momentensatz, bei Bezugnahme auf einen festen Punkt, schreiben

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{S}dmrv = \mathfrak{S}rdk.$$

Das Gesamtmoment der Massengeschwindigkeit $\mathfrak{S}dm\overline{rv}$ wollen wir auch als Impulsvektor $\bar{J}$ bezeichnen:

$$\bar{J} \equiv \mathfrak{S}dmrv.$$

Und der Momentensatz lautet dann

$$\frac{d\bar{J}}{dt} = \overline{M},$$

das Moment $\overline{M}$ der äußeren Kräfte erzeugt eine Änderung $d\bar{J}$ des Impulsvektors, welche nach Größe und Richtung gleich dem Moment ist, mit dt multipliziert.

Dieselbe Form des Momentensatzes gilt nun auch, wenn man als Bezugspunkt den Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) *des Systems nimmt und zwar genügt es, das Moment von den Geschwindigkeiten relativ zum Schwerpunkt zu bilden.*

Beweis: Es sei

$$\bar{r} = \bar{r}^* + \bar{s},$$

also

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}}^* + \dot{\bar{s}} = \bar{v}^* + \bar{v}',$$

wo $\bar{v}'$ die Geschwindigkeit relativ zum Schwerpunkt bedeutet, und

$$\bar{w} = \bar{w}^* + \bar{w}'.$$

Dann ist

$$\mathfrak{S}dmsw = \mathfrak{S}dm\dot{s}\bar{w}^* + \mathfrak{S}dm\overline{sw}'$$

oder da man $\bar{w}^*$ aus der ersten Summe rechts herausziehen kann,

$$= ms^*w^* + \frac{d}{dt}\mathfrak{S}dm\overline{sv}'.$$

Die erste Summe ist aber Null, da $\bar{s}^* = 0$ ist, also bleibt

$$\mathfrak{S}dm\overline{sw} = \frac{d}{dt}\bar{J}' \equiv \frac{d}{dt}\mathfrak{S}dm\overline{sv}'.$$

Und der Momentensatz lautet

$$\frac{d\bar{J}'}{dt} = \overline{M}',$$

wo auch das Moment der äußeren Kräfte $\overline{M}'$ sich auf den Schwerpunkt bezieht.

Bezogen auf einen beliebigen Punkt aber lautet, nach den Ergebnissen von Nr. 114 und weil $\mathfrak{S}\, dm\bar{w} = m\bar{w}^*$ ist, der Momentensatz

$$\frac{d\bar{J}'}{dt} + m\overline{s}\,\overline{w}^* = \overline{M},$$

wenn $\bar{s}$ der Vektor vom neuen Bezugspunkt nach dem Schwerpunkt ist.

211. Der Momentensatz bezogen auf eine Achse. Wir wissen, was das Moment in bezug auf eine Achse ist (siehe Nr. 127) und wissen auch, daß es zugleich die Komponente des Momentenvektors, bezogen auf einen Punkt der Achse, nach dieser Achse ist. Also gilt der Momentensatz auch für Momente um eine Achse.

Legen wir nun durch einen festen Punkt oder durch den Schwerpunkt eine Achse unveränderlicher Richtung und führen in bezug auf diese Achse die sogenannten Zylinderkoordinaten z, r, ϑ ein, (z parallel der Achse, r radial nach außen, ϑ Polarwinkel), so daß $\dot{z}, \dot{r}, r\dot{\vartheta}$ die Geschwindigkeitskomponenten eines Systempunktes relativ zum gewählten Punkte sind, so haben $\dot{z}$ und $\dot{r}$ kein Moment in bezug auf die Achse, $r\dot{\vartheta}$ dagegen das Moment $r \cdot r\dot{\vartheta} = r^2\dot{\vartheta}$.

Somit hat $\bar{J}$ nach der gewählten Achse die Komponente

$$J_3 = \mathfrak{S}\, dmr^2\dot{\vartheta}$$

und wir können den Momentensatz so aussprechen:

Für jede der Richtung nach feste Achse durch einen ruhenden Punkt oder den Schwerpunkt ist

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{S}\, dmr^2\dot{\vartheta}) = M,$$

wo r den Abstand eines Systempunktes von der Achse, $\dot{\vartheta}$ seine Winkelgeschwindigkeit um die Achse und M das Moment der äußeren Kräfte um die Achse bedeutet.

Ist insbesondere $M = 0$, so folgt

$$\mathfrak{S}\, dmr^2\dot{\vartheta} = \text{const.}$$

Ist die Bewegung dann weiter von der besonderen Art, daß sich alle Punkte mit derselben Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\vartheta}$ um die Achse drehen, so folgt

$$T\omega = \text{const},$$

wo $T = \mathfrak{S}\, dmr^2$ das Trägheitsmoment des Systems um die betreffende Achse ist.

212. Einfache Anwendungen des Momentensatzes. Bewegt sich ein System um eine Achse und ist das Moment der äußeren Kräfte in bezug auf diese Achse Null, so ist nach der vorhergehenden Nummer

$$\mathfrak{S}\, dmr^2\omega = \text{const.}$$

1. Haben nun alle Punkte dasselbe ω, während sie jedoch ihren Abstand von der Drehachse verändern können, so folgt aus

$$\omega \cdot \int dm\, r^2 = \text{const}:$$

je größer die Abstände r von der Achse sind, desto kleiner muß von selbst ω sein und umgekehrt. Man kann sich von der Richtigkeit dieser Erscheinung leicht durch ein Experiment überzeugen:

Man nehme einen Drehschemel (nach Prof. Prandtl, Göttingen), d. h. einen Schemel, der sich um eine vertikale Achse möglichst reibungsfrei drehen kann. Man stelle sich darauf und lasse sich in Drehung versetzen. Annäherungsweise werden dann die äußeren Kräfte kein Moment um die vertikale Achse haben, da das Gewicht der Achse parallel und die Widerstandskräfte (Reibung, Luftwiderstand) äußerst gering sind. Streckt man nun die Arme aus, so muß momentan eine Verlangsamung der Drehbewegung eintreten, die sofort wieder rückgängig gemacht werden kann, wenn man die Arme wieder in die alte Lage bringt. Die Erscheinung ist besonders auffällig, wenn man die Hände noch durch Massen beschwert.

Das hier besprochene Gesetz ist auch für die Drehbewegung der Erde von Wichtigkeit: Zieht sie sich infolge Abkühlung zusammen, so muß ihre Winkelgeschwindigkeit größer werden. Es ist dies einer der Gründe, die für eine Veränderung der Drehbewegung der Erde sprechen (siehe § 2), doch ist diese Veränderung der Messung noch nicht zugänglich, auch gibt es andere Gründe, welche eine Verlangsamung erzeugen, nämlich die retardierende Wirkung der Anziehung des Mondes auf die Flutwelle. Bekanntlich ist der Mond rückläufig: er läuft im entgegengesetzten Sinne der Erddrehung um unsern Planeten.

Dasselbe Gesetz benutzen Akrobaten, um einen Saltomortale zu schlagen: sie setzen ihren Körper in ausgestreckter Lage beim Abspringen in eine geringe Drehbewegung um eine horizontale Querachse, ziehen dann ihren Körper in der Luft zusammen, wodurch die Rotation vergrößert und somit der Saltomortale ermöglicht wird, und strecken sich dann wieder aus, um mit verringerter Winkelgeschwindigkeit auf den Boden zu kommen.

2. Will man einen Körper, dessen Punkte alle dasselbe ω haben, in seiner Drehbewegung durch äußere Kräfte beeinflussen, so geschieht dies nach der Formel

$$\frac{d}{dt}(T\omega) = M.$$

Daraus sieht man, daß die Erzeugung einer gleichen Veränderung der Winkelgeschwindigkeit ein um so größeres Moment erfordert, je größer T ist, je weiter also die Massen von der Achse entfernt liegen. (Darum der Name „Trägheitsmoment".) Auch davon überzeugt man sich leicht mittels des Drehschemels: es bedarf einer größeren Anstrengung, eine Person mit ausgestreckten Armen in Drehung zu versetzen, als die gleiche Person mit herabhängenden Armen.

3. Ist die Summe der äußeren Kräfte Null, so folgt aus dem Schwerpunktssatz

$$\mathsf{S}\, dm\bar{v} = \bar{c}\,,$$

$$\bar{v}^* = \text{const.}$$

Man kann also die Bewegung des Schwerpunktes ohne Zuhilfenahme äußerer Kräfte nicht ändern. Wegen der Analogie dieses Satzes mit

$$\mathsf{S}\, dmr^2\omega = \text{const.},$$

falls das Moment der äußeren Kräfte Null ist, hat man oft geschlossen, man könne sich ohne Zuhilfenahme äußerer Kräfte nicht herumdrehen. Diese Schlußfolgerung ist jedoch falsch.

Nehmen wir z. B. an, das System, etwa ein lebendes Wesen, bestehe wesentlich aus zwei Teilen, von denen jeder eine für seine Massenelemente gemeinsame Winkelgeschwindigkeit besitze (ω_1 und ω_2), während die Trägheitsmomente T_1 und T_2 seien. War dann zu Anfang Ruhe ($\omega_1 = \omega_2 = 0$), so verlangt der Momentensatz bei Fehlen äußerer Kräfte

$$T_1\omega_1 + T_2\omega_2 = 0;$$

wenn wir T_1 und T_2 wesentlich konstant halten, d. h. die Abstände r von der Achse, so ergibt eine weitere Integration

$$T_1\vartheta_1 + T_2\vartheta_2 = 0\,,$$

wenn wir die Drehwinkel ϑ_1, ϑ_2 so zählen, daß sie zu Anfang Null waren.

Nun kann ein lebendes Wesen zweifellos durch innere Kräfte (durch Muskelanstrengung) einen Teil des Körpers gegen den Rest herumdrehen, man kann z. B. einen Arm über dem Kopf im Kreise herumführen und ihn gegen den ruhenden Raum einen Winkel ϑ_1 beschreiben lassen. Dann folgt sofort aus der obigen Formel, daß der Rest des Körpers, wenn er sich frei um die Achse drehen kann, nach der entgegengesetzten Seite einen Winkel beschreiben muß: $-\vartheta_2$, der sich berechnet zu

$$-\vartheta_2 = \frac{T_1}{T_2}\vartheta_1.$$

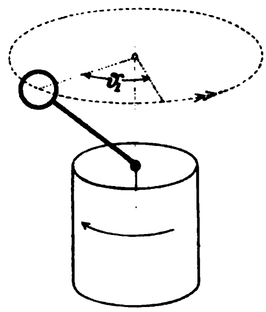


Fig. 177.

Sollen sich nach der Bewegung Arm und Körper wieder in der alten relativen Lage zueinander befinden, so muß nur

$$\vartheta_1 + (-\vartheta_2) = 2\pi$$

sein, woraus sich ergibt

$$\vartheta_1 = 2\pi \frac{T_2}{T_1 + T_2},$$

$$-\vartheta_2 = 2\pi \frac{T_1}{T_1 + T_2},$$

der ganze Körper hat sich also um diesen Winkel ϑ_2 herumgedreht.

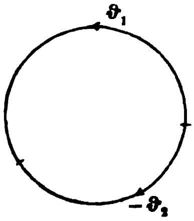


Fig. 178.

Man kann das Experiment sehr gut auf dem Drehschemel ausführen.

Wir haben angenommen, daß sich alle Punkte in Kreisen um die Achse bewegen, doch ist das nicht nötig. Denn wir wissen (siehe Nr. 29, 30), daß $r^2 d\vartheta$ die Fläche dF ist, die der Radius r in der Zeit dt beschreibt: man kann also den Momentensatz beim Fehlen eines äußeren Momentes auch so schreiben:

$$S\, dm \frac{dF}{dt} = 0,$$

oder nach Integration

$$S\, dm F = 0,$$

wenn F die Flächen sind, welche die einzelnen Radien von der Anfangsstellung aus beschrieben haben. Daraus folgt: wenn ein Teil des Körpers Flächen F_1 in einem bestimmten Umlaufssinn beschreibt, so muß sich gleichzeitig der andere Teil des Körpers im entgegengesetzten Sinne so herumdrehen, daß die Radienvektoren seiner Punkte Flächen F_2 vom entgegengesetzten Umlaufssinn überstreichen und daß

$$S\, dm_1 F_1 = S\, dm_2 F_2$$

ist. (Hier sind die F mit ihren absoluten Werten einzusetzen.)

Diese spezielle Folgerung des Momentensatzes (für $M = 0$) nennt man wohl auch den Flächensatz.

In den neunziger Jahren des verflossenen Jahrhunderts gab einen neuen Anstoß zur Erörterung der vorstehenden Probleme die Beobachtung, daß eine Katze, wenn sie mit dem Rücken nach unten zu fallen anfängt, es meist so einzurichten weiß, daß sie mit den Füßen auf den Boden kommt. Beobachtungen lehrten, daß sie sich dabei keine Anfangsdrehung im Momente des Fallens erteilen konnte; auch ist die Wirkung der Luft zu gering, um als äußere Kraft die Drehung hervorzurufen. Das Tier kann nun nach dem oben auseinander gesetzten tatsächlich seinen Körper um eine Horizontalachse drehen, wenn es Extremitäten im entgegengesetzten Sinne herumbewegt. Momentphotographien lehren, daß die Katze wirklich so verfährt (siehe: Comptes rendus der Pariser Akademie 1894, 2. Bd.): sie schleudert Hinterbeine und Schwanz in kräftigem Schwunge um eine horizontale Achse, der Vorderkörper dreht sich dann von selbst im entgegengesetzten Sinne. Durch Ausstrecken der Hinterextremitäten und Einziehen der Vorderbeine kann sie die Trägheitsmomente verändern und somit den gesamten Drehwinkel regulieren, so daß sie gerade eine halbe Drehung ausführt und auf die Beine zu stehen kommt.

Ein Schwimmer kann die Folgerungen des Flächensatzes an sich selbst leicht ausprobieren, indem er, auf dem Rücken liegend, mit dem linken Beine etwa einen kräftigen Schwung links herum in der Luft ausführt: er wird sich dann von selbst rechts herumdrehen.

Aufgabe 97: Auf einem Drehschemel vom Trägheitsmoment T laufe ein Insekt (Massenpunkt m) vom Mittelpunkte aus auf einem Radius bis in die Entfernung r vom Mittelpunkt, dann auf einem Kreise durch den Zentriwinkel φ, endlich wieder auf einem Radius in die Mitte zurück. Um welchen Winkel wird sich dabei der Schemel gedreht haben, von dem wir annehmen wollen, daß er sich reibungsfrei um seine vertikale Achse drehen kann.

§ 40. Weitere Anwendungen von Schwerpunkt- und Momentensatz.

213. Der um eine feste Achse rotierende starre Körper. In Nr. 211 hatten wir dem Momentensatz, bezogen auf eine der Richtung nach feste Achse durch den Schwerpunkt oder durch einen festen Punkt die Form gegeben:

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{S} dm r^2 \omega = M.$$

Dreht sich nun ein starrer Körper um eine feste Achse, so können wir diese zur Momentenachse wählen: weil der Körper starr ist, drehen sich alle Punkte in gleichen Zeiten um gleiche Winkel, also ist ω eine allen Punkten gemeinsame Größe, kann also aus der Summe $\mathfrak{S} dm r^2 \omega$ herausgezogen werden. Außerdem sind die Abstände r konstant, also auch das Trägheitsmoment T.

Somit ergibt sich für den um eine feste Achse rotierenden starren Körper die Bewegungsgleichung

$$T \frac{d\omega}{dt} = M.$$

Dabei ist M das Moment aller äußeren Kräfte.

Nun kann man aber die Lagerreaktionen bei der Berechnung von M fortlassen. Denn die Berührungsfläche des rotierenden Körpers mit dem Lager ist auf jeden Fall das Stück einer Rotationsfläche, auf dieser stehen aber die Lagerdrucke senkrecht, gehen also durch die Drehachse hindurch und haben somit kein Moment in bezug auf dieselbe.

Es bleiben also für die Bildung von M nur diejenigen Kräfte übrig, die wir früher (Nr. 141) als eingeprägte Kräfte bezeichnet haben und somit haben wir dieselbe fundamentale Gleichung erhalten wie in Nr. 194. Es sei aber ausdrücklich bemerkt, daß die Lagerreibung bei der Bildung von M zu berücksichtigen ist, denn sie hat ein Moment (und ist auch als Gleitreibung eine eingeprägte Kraft: siehe Nr. 61).

214. Auslauf eines zentrierten Rades infolge der Lagerreibung. Ein Rad möge sich frei um eine horizontale Achse drehen, außer der Schwerkraft und dem ganzen Lagerdruck möge keine Kraft auf das Rad wirken. Der Schwerpunkt liege auf der Achse, das Rad, sei, wie man sagt, zentriert.

Dann ist die Massenbeschleunigung des Schwerpunktes notwendigerweise Null und also verschwindet die Summe aller äußeren Kräfte: der ganze Lagerdruck $\bar{D}$ ist also nach oben gerichtet und gleich dem Gewichte. Aber er wird bei Vorhandensein von Reibung nicht durch die Wellenachse gehen können. Denn die Reibung ist der Bewegung entgegengesetzt und ergiebt also ein Moment, daß dem Drehungssinn des Rades entgegen ist. Ist der Abstand des Druckes $\bar{D}$ von der Achse ϱ, so ist das Reibungsmoment $-\varrho D = -\varrho G$, falls wir Momente im Sinne der Bewegung positiv rechnen.

Die Bewegungsgleichung lautet somit

$$T\frac{d\omega}{dt} = -\varrho G.$$

Dürfen wir die Reibung als von der Geschwindigkeit unabhängig ansehen, d. h. ϱ als konstant, so ergibt die Integration

$$T(\omega - \omega_0) = -\varrho G t,$$

also als Auslaufszeit (für $\omega = 0$)

$$t = \frac{T}{\varrho G}\omega_0.$$

Ist das Lager zylindrisch, ungeschmiert, und die Berührung zwischen Rad und Lager wesentlich auf eine Erzeugende beschränkt, so ist

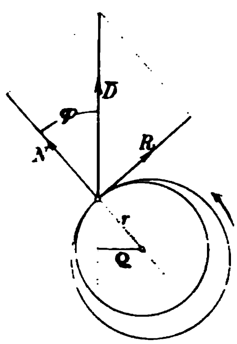


Fig. 179.

$$\varrho = r \sin\varphi,$$

wenn r den Zapfenradius ($2r$ den Durchmesser des Lagers) bedeutet, φ den Reibungswinkel. Man sieht dies sofort aus der Figur, welche das Kräftespiel im Lager für den ins Auge gefaßten Fall darstellt. Aus der Figur erkennt man zugleich, daß die Berührungsstelle aus der normalen Lage im Falle der Ruhe im Sinne der Drehbewegung um den Winkel φ verschoben ist.

Wenn nun die Berührung nicht einpunktig ist oder Schmierung vorhanden, so setzt man

$$\varrho = r \cdot f'$$

und bestimmt am besten f' experimentell.

Neuere Untersuchungen haben bei geschmierter Reibung eine starke Abhängigkeit des f' von N (oder D) und v ergeben (siehe Nr. 60und 143), was man bei der Integration der Differentialgleichung

$$T\frac{d\omega}{dt} = -\varrho G$$

zu beachten hat. Es ist jetzt $\varrho = rf'$ eine Funktion von ω; man wird demnach haben

$$\frac{d\omega}{f'(\omega)} = -\frac{rG}{T}dt,$$

also

$$t = -\frac{T}{rG}\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\omega}{f'(\omega)}.$$

Ist $f'(\omega)$ graphisch gegeben, so kann man das rechtsstehende Integral auch graphisch leicht ermitteln und somit die Auslaufszeit berechnen.

Wir erwähnten schon früher, daß die Theorie der zähen Flüssigkeiten eine wenigstens teilweise befriedigende theoretische Behandlung des Problems der geschmierten Reibung ermöglicht hat und in Übereinstimmung mit der Erfahrung eine Verschiebung der engsten Stelle des Spielraums zwischen Zapfen und Lager gerade im anderen Sinne ergibt als die Hypothese der trockenen Reibung (siehe Sommerfeld, Z. f. Math. u. Physik 1904, Bd. 50).

215. Die Atwoodsche Fallmaschine (ohne Reibung) besteht aus einem um eine horizontale Achse drehbaren Rade, einem darum geschlungenen Faden und zwei Gewichten, die an die Enden desselben geknüpft sind. Wir betrachten nur den Fall, daß sich die Gewichte in je einer Vertikalen auf- und abbewegen. T sei das Trägheitsmoment des Rades, G_1, G_2 die Gewichte, l die unveränderliche Länge des Fadens, μ dessen spezifische Masse pro Längeneinheit, x die variable Entfernung des Gewichtes G_1 unter dem Mittelpunkte des Rades, dessen Radius r sei.

Senkt sich G_1 mit der Geschwindigkeit v, so haben Gewichte und Faden die Beschleunigungskomponente $\frac{dv}{dt}$ in Richtung ihrer Bewegung, das Rad aber die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{v}{r}$, wenn wir annehmen dürfen, daß die Reibung zwischen Faden und Rad so stark ist, daß ein Gleiten nicht eintritt.

Daher ist für das ganze bewegte System das Moment der Massenbeschleunigung in bezug auf die Drehachse O des Rades

$$T\frac{\dot v}{r} + l\mu \cdot \dot v \cdot r + (m_1 + m_2) r \dot v$$

oder

$$r\frac{dv}{dt}(m_1 + m_2 + m' + m''), \tag{1}$$

wo

$$m_1 = \frac{1}{g}G_1, \quad m_2 = \frac{1}{g}G_2, \quad m' = l\mu$$

die Massen der Gewichte und des Fadens, m'' aber die sogenannte, auf den Umfang des Rades „reduzierte Masse" desselben ist, nämlich

$$m'' = \frac{T}{r^2}.$$

Die einzige äußere Kraft, die ein Moment hat, ist die Schwerkraft, wenn wir von der Reibung zwischen Rad und Lager absehen; die Schwerkraft hat aber das Moment

$$G_1 r + x\mu g r - (l - r\pi - x)\mu g r - G_2 r. \tag{2}$$

Nach dem Momentensatz, angewendet auf das ganze bewegte System, muß nun Ausdruck (1) gleich dem Ausdruck (2) sein, also lautet die Bewegungsgleichung, wenn wir $m_1 + m_2 + m' + m'' = m$ setzen,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = g(m_1 - m_2 - (l - \pi r)\mu) + 2x\mu g,$$

da ja $v = \frac{dx}{dt}$ ist.

Setzen wir noch zur Abkürzung

$$g\frac{m_1 - m_2 - (l - r\pi)\mu}{m} = g'$$

$$\frac{2\mu g}{m} = \alpha^2,$$

so lautet die Differentialgleichung der Bewegung

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \alpha^2 x = g',$$

deren Integral lautet

$$x = -\frac{1}{\alpha^2}g' + Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}$$

mit A und B als Integrationskonstanten.

War etwa für $t = 0$ auch $x = 0$ und $\dot{x} = 0$, so bestimmen sich A und B aus

$$0 = -\frac{1}{\alpha^2}g' + A + B,$$

$$0 = A\alpha - \alpha B,$$

d. h.

$$A = B = \frac{1}{2}\frac{g'}{\alpha^2},$$

so daß

$$x = \frac{1}{\alpha^2}g'\left(-1 + \frac{1}{2}\left(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}\right)\right)$$

wird. Für sehr kleine α (Vernachlässigung der Schwere des Fadens) muß sich in der Grenze eine gleichförmig beschleunigte Bewegung ergeben; tatsächlich ist

$$\lim_{\alpha=0} x = \frac{1}{2}g't^2.$$

216. Berücksichtigung der Reibung.

Wollen wir die Reibung im Lager berücksichtigen, so tritt in die Differentialgleichung der vorigen Nummer noch das Moment der Reibung ein, das wir analog wie in N. 214 mit

$$-\varrho D = -r'f'D$$

bezeichnen, wo r' den Zapfenradius bedeutet und f' — es wird sich meist um geschmierte Reibung handeln — als bekannte Funktion von v anzusehen ist. Den gesamten Lagerdruck D, der wesentlich [1]) vertikal sein muß, berechnen wir durch Anwendung des Schwerpunktsatzes:

$$m_1 \frac{dv}{dt} - m_2 \frac{dv}{dt} + (x - (l - x - r\pi))\mu \frac{dv}{dt} = (m_1 + m_2 + l\mu + m_3)g - D\,^{1}),$$

wobei m_3 die Masse der Rolle ist.

Also ist

$$D = (m_1 + m_2 + l\mu + m_3)g - [m_1 - m_2 + 2x\mu - (l - r\pi)\mu] \frac{dv}{dt},$$

infolgedessen der Momentensatz nach Division durch r die Form annimmt:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= g(m_1 - m_2 - (l - \pi r)\mu) + 2x\mu g \\ &\quad - f' \frac{r'}{r} \left\{ (m_1 + m_2 + l\mu + m_3)g - [m_1 - m_2 + 2x\mu - (l - r\pi)\mu] \frac{d^2x}{dt^2} \right\}. \end{aligned}$$

Ist f' eine Funktion von $\dot{x}$, so wird man am besten tun, die vorstehende Differentialgleichung graphisch zu integrieren. Kann man dagegen f' als konstant ansehen, so hat die vorstehende Differentialgleichung, nach $\ddot{x}$ aufgelöst, die Form

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g'' + \varkappa x}{1 - \lambda x},$$

wo g'', $\varkappa$, λ Konstante sind.

Aufgabe 98: Man führe die vorstehende Differentialgleichung nach der in Nr. 67 angegebenen Methode zur Integration einer jeden Differentialgleichung der Form

$$\ddot{x} = f(x)$$

auf bloße Quadraturen zurück.

In vielen Fällen wird man die Masse des Seiles vernachlässigen können, d. h. λ und $\varkappa$ gleich Null setzen dürfen und erhält dann wiederum eine konstante Beschleunigung.

217. Anwendung auf Aufzüge und Krahne.

Handelt es sich um einen Krahn oder Aufzug, so wird die Frage meist so gestellt sein: welches Drehmoment muß ich noch auf die Rolle wirken lassen, damit die Bewegung gleichförmig geschieht?

Es tritt dann in die Momentengleichung noch das gesuchte Drehmoment M hinzu; dafür aber hat man $\ddot{x} = 0$ zu setzen. Man bekommt auf diese Weise die Gleichung

$$0 = rg(m_1 - m_2 - (l - r\pi)\mu) + 2x\mu g r - f'r'(m_1 + m_2 + l\mu + m_3)g + M,$$

woraus sich nach Einführung der Gewichte ergibt

$$M = r[G_2 - G_1 + (l - r\pi)\gamma] - 2x\gamma r + f'r'G,$$

---

1) Von der Beschleunigungswirkung des kleinen, die Rolle umspannenden Seilstückes ist abgesehen.

wo G das Gesamtgewicht von Rolle, Seil und Lasten ist, γ das spezifische Gewicht des Seiles. Bei kurzen Aufzügen wird auch hier das Glied $2x\gamma r$ oft unbedeutend sein, in anderen Fällen aber, wie z. B. bei Förderanlagen in Bergwerken, wo l sehr groß ist, kann es ganz wesentlich ins Gewicht fallen.

Wegen Berücksichtigung der Seilsteifigkeit im Falle langsamer Bewegung siehe § 36.

218. Berechnung der Lagerreaktionen eines um eine feste Achse rotierenden starren Körpers. Wir wollen folgende allgemeine Aufgabe in Behandlung nehmen:

Ein starrer Körper rotiere um eine feste Achse; er sei irgendwelchen eingeprägten Kräften unterworfen, wie bewegt er sich und was läßt sich aus Schwerpunkts- und Momentensatz über die Lagerreaktionen erschließen?

Folgendes können wir von vornherein erwarten: Schwerpunkts- und Momentensatz bedeuten zwei vektorielle, also sechs skalare Gleichungen. Wir wissen, daß die Lagerreaktionen kein Moment um die Achse haben (siehe Nr. 141), daraus folgt eine von den Lagerreaktionen freie Gleichung, die Momentengleichung für die Achse als Bewegungsgleichung. Es bleiben noch fünf Gleichungen, wir werden also erwarten dürfen, daß wir mit ihrer Hilfe fünf Aussagen über die Reaktionen machen können, daß es uns nämlich gelingen wird, ihre geometrische Summe und ihr Moment, das sicher auf der Achse senkrecht steht, zu berechnen.

Um die Aufgabe zu behandeln, nehmen wir die Rotationsachse zur z-Achse, legen den Anfangspunkt des Koordinatensystems in den Fußpunkt O des Lotes vom Schwerpunkt S auf die Achse, wählen OS zur x-Achse, woraus sich die Richtung der y-Achse von selbst versteht.

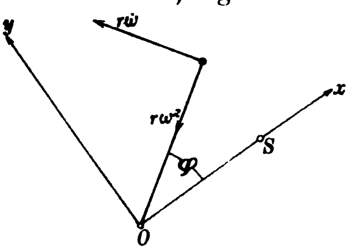


Fig. 180.

Die eingeprägten Kräfte mögen nach diesen Achsen die resultierenden Komponenten K_x, K_y, K_z und die Momente M_x, M_y, M_z haben, die Lagerdrucke entsprechend die resultierenden Komponenten r_x, r_y, r_z und die Momente R_x, R_y, 0, und zwar seien damit die Druckwirkungen auf das Lager gemeint, so daß die entsprechenden Größen, welche auf den rotierenden Körper wirken, nach dem Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung dieselben sind, nur mit entgegengesetztem Zeichen.

Da der Schwerpunkt eine Kreisbewegung (siehe Nr. 25) macht, so lauten die Komponentengleichungen des Schwerpunktsatzes

$$
\begin{aligned}
-ms\omega^2 &= K_x - r_x,\\
ms\dot{\omega} &= K_y - r_y,\\
0 &= K_z - r_z.
\end{aligned}
$$

Daraus ergeben sich sofort die resultierenden Lagerdrucke

$$r_x = K_x + m s \omega^2,$$
$$r_y = K_y - m s \dot{\omega},$$
$$r_z = K_z.$$

Das Lager hat also insgesamt nicht nur die eingeprägten Kräfte aufzunehmen, sondern noch zwei Anteile, die von der „Massenwirkung" herrühren: die sogenannte Zentrifugalkraft $m s \omega^2$ in der Richtung von der Achse auf den Schwerpunkt zu und den Anteil $m s \dot{\omega}$ senkrecht dazu und dem Sinne der positiv gerechneten Winkelbeschleunigung entgegen. Der erste Anteil verschwindet nur, wenn der Körper zentriert ist, der zweite auch bei gleichförmiger Bewegung.

Die Zentrifugalkraft wird namentlich bedeutend für rasch umlaufende Körper; geringe Exzentrizitäten geben dann bedeutende Beanspruchungen (siehe die Bemerkung über Lavalturbinen in Nr. 76).

Um die Momentengleichungen aufzustellen, beachten wir, daß $\overline{rw}$ nach der x-Achse die Komponente $y w_z - z w_y$ hat usw. und daß für einen Punkt mit der Entfernung r von der Drehachse und der Amplitude φ gegen die x-Achse (nach Fig. 180 oder nach Nr. 27)

$$w_x = -r\omega^2 \cos\varphi - r\dot{\omega}\sin\varphi = -x\omega^2 - y\dot{\omega},$$
$$w_y = -r\omega^2 \sin\varphi + r\dot{\omega}\cos\varphi = -y\omega^2 + x\dot{\omega},$$
$$w_z = 0$$

ist. Danach lautet der Momentensatz in Komponenten:

$$\mathfrak{S}\, dm(y w_z - z w_y) \equiv \mathfrak{S}\, dm(y z \omega^2 - z x \dot{\omega}) = M_x - R_x,$$
$$\mathfrak{S}\, dm(z w_x - x w_z) \equiv \mathfrak{S}\, dm(-z x \omega^2 - z y \dot{\omega}) = M_y - R_y,$$
$$\mathfrak{S}\, dm(x w_y - y w_x) \equiv \mathfrak{S}\, dm(x^2 + y^2)\dot{\omega} = M_z.$$

Man kann aus den Summen links überall ω^2 und $\dot{\omega}$ herausziehen und erhält sofort aus der letzten Gleichung die schon bekannte Bewegungsgleichung

$$T\dot{\omega} = M_z.$$

In den beiden anderen kommen die Ausdrücke vor

$$\mathfrak{S}\, dm\, y z = D_{y,z},$$
$$\mathfrak{S}\, dm\, x z = D_{x,z},$$

charakteristische Konstante für den Körper und das gewählte, im Körper feste Achsensystem, die wir Deviationsmomente nennen wollen. (Siehe Nr. 198 und § 45). Nach Einführung dieser Abkürzungen erhalten wir aus den beiden ersten Momentengleichungen:

$$R_x = M_x - D_{y,z}\omega^2 + D_{x,z}\dot{\omega},$$
$$R_y = M_y + D_{x,z}\omega^2 + D_{y,z}\dot{\omega}.$$

Daraus sieht man, daß selbst bei zentriertem Rad und gleichförmigem Laufe desselben die „Massenwirkung" nicht Null ist: es bleiben im allgemeinen noch Kräftepaare $-D_{y,z}\omega^2$ *und* $D_{x,z}\omega^2$, *welche nur verschwinden, wenn die Deviationsmomente* $D_{z,y}$ *und* $D_{z,x}$ *Null sind.*

Man erkennt nun sofort, daß dies jedenfalls dann der Fall ist, wenn entweder die Schwerpunktsebene senkrecht zur Drehachse eine Symmetrieebene der Massenverteilung ist; denn dann entspricht jedem Element $dm\, yz$ (bzw. $dm\, xz$) ein entgegengesetzt gleiches $dm\, y(-z)$ (bzw. $dm\, x(-z)$) — oder wenn die Schwerpunktsebene durch die Achse und die dazu senkrechte Ebene durch die Drehachse Symmetrieebenen sind (z. B. bei einem Körper von voller Rotationssymmetrie). Der Beweis ist analog dem vorhergehenden.

Wir werden später (§ 45) sehen, daß jeder Körper durch jeden Punkt mindestens drei zueinander senkrechte Achsen, die sogenannten Hauptachsen, besitzt, für welche alle drei Deviationsmomente verschwinden.

Rotiert ein Körper, der gar keinen Kräften unterworfen ist, konstant um eine feste Achse durch den Schwerpunkt? Wir können die Frage so stellen: Ist es nötig, eine Rotationsachse durch den Schwerpunkt festzuhalten, wenn der Körper gar keinen Kräften unterworfen ist? Aus unseren Gleichungen folgt zwar wegen $s = 0$

$$r_x = r_y = r_z = 0,$$

dagegen trotz $\dot{\omega} = 0$ (wegen $M_z = 0$)

$$R_x = -D_{y,z}\omega^2,$$
$$R_y = D_{x,z}\omega^2.$$

Die Frage ist also im allgemeinen zu verneinen, denn wenn $D_{y,z}$ $D_{x,z}$ nicht Null sind, so brauchen wir zur Aufrechterhaltung der Drehachse ein Kräftepaar.

Ein Körper, der gar keinen äußeren Kräften unterworfen ist, rotiert nur dann dauernd um dieselbe Achse, wenn die beiden Deviationsmomente dieser Achse verschwinden. Man nennt deshalb eine Achse von dieser Eigenschaft auch eine „freie Achse".

Was ein kräftefreier Körper tut, der um eine andere Achse in Rotation versetzt wird, werden wir später (Nr. 279 und 280) sehen.

Wir sehen des weiteren aus unseren Formeln, daß für langsame und gleichmäßige Bewegung die statische Behandlung des Problems, die wir schon früher besprochen haben (Nr. 142) erlaubt ist.

Die Bedeutung des Problems, das schon von Euler gelöst wurde, dürfte auf der Hand liegen: nicht nur werden durch die Lagerdrucke die Lager selbst beansprucht, sondern auch die Fundamente. Sind z. B. die Momente R_x und R_y oder r_x, r_y konstant, was für die Massenwirkung allein bei gleichförmigem Gang ($\dot{\omega} = 0$) der Fall ist, so bedeutet dies Reaktionswirkungen, die mit den Achsen (x, y) umlaufen und also das Fundament in periodischem Wechsel beanspruchen. Daher rührt die stampfende Wirkung umlaufender Maschinen auf das Fundament. Tritt nun Resonanz ein (siehe Nr. 76), d. h. stimmt die Umlaufszeit der Maschine mit einer Periode der freien Schwingungen des Gebäudes überein, so wird dieses in besonders heftiger Weise in Schwingungen versetzt, welche seine Haltbarkeit ernstlich gefährden können, ganz abgesehen von der sonstigen Unannehmlichkeit dieser Wirkung.

Umlaufende Schiffsmaschinen werden in gleicher Weise das ganze Schiff in Schwingungen versetzen. Diese möglichst herabzudrücken, soweit die Massenwirkung in Frage kommt, ist das Problem des Massenausgleichs, das von O. Schlick zu einem gewissen Abschluß gebracht wurde (siehe O. Schlick, Deutsches R. P. 1893, auch Z. d. V. d. I. 1894. Schubert, Theorie des Schlickschen Massenausgleiches. Lorenz, Dynamik des Kurbelgetriebes, auch das Referat von Heun, Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik sowie v. Mises, Encyklopädie IV, 10). Wären die Schiffsmaschinen rein rotierende Körper, so lautete die Bedingung des Massenausgleichs: es muß die Drehachse durch den Schwerpunkt gehen und eine freie Achse sein. Der Umstand, daß auch Maschinenteile mit ganz anderer Bewegung beteiligt sind, bringt eine Komplikation des Problems mit sich. Siehe die oben angeführte Literatur.

Für Lokomotiven hat bereits Redtenbacher die Massenwirkungen betrachtet (Literatur siehe Nr. 150).

Aufgaben: 99. Eine Achse von der Länge l trage symmetrisch im Abstande b von der Mitte zwei gleiche Schwungräder vom Radius a. Nur das eine habe noch an der Peripherie eine Zusatzmasse vom Gewicht G, die wir punktförmig annehmen wollen. Die Welle sei an den beiden Enden gestützt in kurzen Lagern, deren Längsausdehnung wir vernachlässigen wollen, d. h. wir sehen die Lagerung an den Enden als punktförmig an. Eingeprägte Kräfte seinen nicht vorhanden, das Rad drehe sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Man berechne den Lagerdruck an den Enden der Welle.

100. Ein rotierender starrer Körper habe die Exzentrizität s, während eine Hauptachse durch den Schwerpunkt S, um die zugleich Rotationssymmetrie herrsche, die Drehachse unter dem Winkel α schneide. Gegeben seien m, s, ω, $\dot{\omega} = 0$, und die Hauptträgheitsmomente: C um die Symmetrieachse, $A = B$ senkrecht dazu. Man bestimme die Massenwirkung. (Man braucht zur Lösung die Ergebnisse aus § 45, den man aber jetzt schon studieren kann.)

Kapitel IX.

Ebene Bewegung des starren Körpers.

§ 41. Lagenänderungen eines starren Körpers in der Ebene.

219. Allgemeine Bemerkungen. Unter einem starren Körper verstehen wir einen Körper, der sich bei der Bewegung selbst kongruent bleibt.

Wir nennen seine Bewegung eben, wenn alle seine Punkte ebene Bahnen beschreiben, deren Ebenen untereinander parallel sind. (Es gibt auch eine Bewegungsart, bei der zwar alle Bahnen eben sind, diese Ebenen aber nicht einander parallel liegen, diese Bewegung entdeckte Darboux, siehe Comptes rendus Bd. 92, 1881).

Aus der Definition der ebenen Bewegung folgt:

1. Punkte, die einmal in einer Bewegungsebene liegen, bleiben in dieser.

2. Kennt man die Bewegung des Schnittes eines Körpers mit einer Bewegungsebene, so kennt man die ganze Bewegung. Denn betrachtet man die augenblickliche Projektion P' eines Punktes P auf die herausgegriffene Schnittebene, so bleibt diese Beziehung beider bei der Bewegung bestehen, denn einmal bleibt P' in der Parallelebene zu P, dann aber auf der Kugel um P mit dem Radius der ursprünglichen Entfernung PP'. Da dies aber die kürzeste Entfernung der beiden Ebenen ist, so haben Kugel und Ebene nur einen Punkt gemein, eben den Projektionspunkt P' von P.

Also genügt zum Studium der Geometrie der ebenen Bewegung die Betrachtung der kongruenten Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene.

Kongruenz allein genügt aber noch nicht, um behaupten zu können, daß man zwei Figuren durch stetige Bewegung ineinander überführen kann. Auch der Umlaufssinn bleibt bei stetiger ebener Bewegung erhalten. Umfahren wir nämlich den Umriß einer Figur in bestimmtem Sinne und betrachten diesen Prozeß von einer bestimmten Seite der Ebene aus, so sind zwei Möglichkeiten vorhanden: entweder liegt das Innere der Figur zur Linken oder zur Rechten. Die darin begründete Unterscheidung bleibt offenbar bei stetiger ebener Bewegung bestehen, wenn wir nur immer in derselben Weise umfahren, d. h. die Punkte des Umrisses im selben Sinne anordnen.

Es können also Figuren kongruent und von gleichem Umlaufssinn sein (z. B. die Dreiecke ABC und $A'B'C'$) oder auch kongruent und von entgegengesetztem Umlaufssinn (ABC und $A'B''C$). Figuren der letzteren Art kann man also durch ebene Bewegung sicher **nicht** ineinander überführen.

Wir können dagegen leicht einsehen, daß man Figuren der ersten Art, die also kongruent und gleichsinnig sind, immer durch ebene Bewegung ineinander überführen kann.

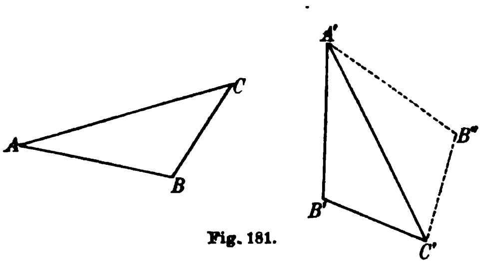


Fig. 181.

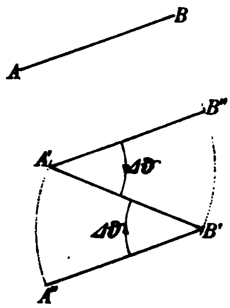


Fig. 182.

Beweis: Betrachten wir eine Strecke AB und eine gleich große $A'B'$, so kann man durch Bewegung AB immer nach $A'B'$ bringen. Man braucht nur zuerst AB parallel so zu verschieben, daß etwa B nach B' kommt, A nach A'' und kann dann durch Drehung um B' den Punkt A'' nach A' schaffen. Ist nun C ein dritter Punkt, so ist ein Punkt C' eindeutig dadurch bestimmt, daß ABC kongruent und gleichsinnig mit $A'B'C'$ sein soll und also muß bei dem angegebenen Prozeß C nach C' kommen.

Damit ist der Beweis geliefert und zugleich gezeigt, daß man eine ebene Lagenänderung eines starren Körpers stets dadurch erzeugen kann, daß man erst eine Translation (Parallelverschiebung) ***und dann eine Rotation*** (Drehung um einen festen Punkt) ***ausführt.***

Aus dem Vorhergehenden geht des Weiteren hervor, daß man die Lage einer ebenen Figur eindeutig beschreiben kann, wenn man die Lage eines herausgegriffenen Punktes und die Richtung eines von diesem Punkte ausgehenden, im Körper festen Strahles angibt. Da man andererseits diese Angaben auch willkürlich treffen kann und dazu drei Stücke angeben muß, etwa die Koordinaten c_x, c_y des herausgegriffenen Punktes C und den Winkel ϑ, den der gewählte Strahl mit einer festen Richtung (etwa der x-Achse) einschließt, so sagt man:

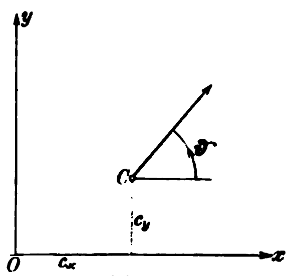


Fig. 183.

Der starre Körper hat bei ebener Bewegung drei Freiheitsgrade.

In der Tat kann man die drei Koordinaten x, y, z eines Punktes P durch c_x, c_y, ϑ und drei bei der Bewegung unveränderliche Stücke ausdrücken. Zu dem Zwecke wähle man im starren Körper ein festes Koordinatensystem (a, b, c), dessen Anfangspunkt mit C, dessen a Achse mit der Strahlrichtung zusammenfalle, während die c Achse der z Achse parallel sei. Dann ist bekanntlich

$$x = c_x + a \cos \vartheta - b \sin \vartheta,$$
$$y = c_y + a \sin \vartheta + b \cos \vartheta,$$
$$z = c.$$

220. Weiteres über endliche Lagenänderungen. Wir sahen in der vorigen Nummer, daß man eine endliche Lagenänderung immer durch Aufeinanderfolge einer Translation und einer Rotation erzeugen kann. Dabei konnten wir einen Punkt auswählen, den wir zuerst durch eine Translation in seine richtige Lage bringen. (Wir nennen ihn hinfort „Translationspunkt".) Wählen wir einen anderen, z. B. A (siehe Fig. 182) und bringen ihn zuerst in seine Endlage A', wobei B nach B'' komme, so ist die erforderliche Translation eine ganz andere, dagegen ist die noch erforderliche Drehung insofern dieselbe wie vorhin geblieben, als wie die Figur sofort lehrt, der Drehwinkel nach Größe und Sinn derselbe geblieben ist. ($\sphericalangle A''B'A'$ gleich $\sphericalangle B''A'B'$ nach Größe und Drehsinn.)

Man kann also bei der Lagenänderung eines starren Körpers schlechthin von einer bestimmten dazu erforderlichen Drehung sprechen, während die notwendige Parallelverschiebung im allgemeinen von der Wahl eines Punktes abhängt.

Wir wollen nun zeigen, daß man jede ebene Lagenänderung, wenn sie keine bloße Parallelverschiebung ist, durch eine reine Drehung erzeugen kann.

Es genügt, als ebene Figur eine Strecke AB zu betrachten: $A'B'$ sei eine zweite Lage.

Soll es möglich sein, durch Drehung um einen Punkt M die Strecken ineinander überzuführen, so muß jedenfalls $MA = MA'$ sein, also M auf der Mittelsenkrechten von AA' liegen, ebenso natürlich auf der Mittelsenkrechten von BB'.

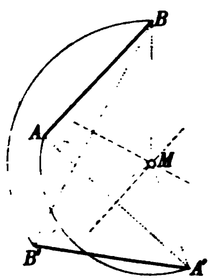


Fig. 184.

Wenn AA' und BB' einander nicht parallel sind, was wir zunächst annehmen wollen, so ist dadurch der Punkt M eindeutig bestimmt.

Man kann nun tatsächlich durch eine Drehung um M die Strecke AB in die Strecke $A'B'$ überführen.

Betrachten wir nämlich die Dreiecke ABM und $A'B'M$, so sind dieselben sicher kongruent, da alle Seiten entsprechend gleich sind. Aber sie haben auch denselben Umlaufssinn. Wäre das nämlich nicht der Fall, so lägen sie zu der Mittelsenkrechten auf BB' symmetrisch, also fielen beide Mittelsenkrechten zusammen und es wäre $AA' \parallel BB'$, was wir zunächst ausgeschlossen haben. Es ist demnach klar, daß man die Dreiecke ABM und $A'B'M$ durch Drehung um M ineinander überführen kann.

Waren hingegen AA' und BB' einander parallel, so sind noch zwei Fälle denkbar: entweder bilden $AA'BB'$ ein Parallelogramm: die Mittelsenkrechten schneiden sich dann nicht, die Überführung von AB nach $A'B'$ ist dann aber auch durch eine bloße Translation möglich; oder aber $ABB'A'$ bilden ein gleichschenkliges Trapez (Fig. 186). In diesem Falle wären die beiden Mittelsenkrechten zusammengefallen und M unbestimmt geblieben; aber man erkennt sofort, daß hier der gesuchte Punkt M der Schnittpunkt von AB mit $A'B'$ ist.

Damit ist die Betrachtung vollständig durchgeführt.

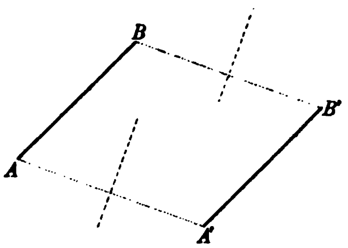


Fig. 185.

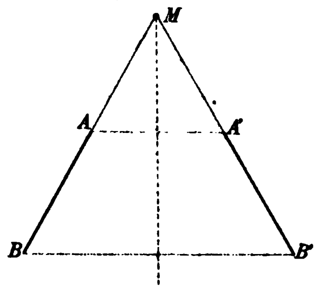


Fig. 186.

Den Punkt M, um welchen man drehen muß, um die Lagenänderung zu erzeugen, nennen wir den Drehpol. Er ist der einzige Punkt, der bei der Lagenänderung festbleibt. Man kann demnach das Ergebnis auch so aussprechen:

Bei ebener Lagenänderung eines starren Körpers gibt es stets einen und nur einen Punkt, der seine Lage beibehält, den Drehpol. Liegt dieser im Endlichen, so kann die Lagenänderung durch eine Kreisbewegung um den Drehpol erzeugt werden. Der Punkt kann jedoch auch ins Unendliche fallen, dann kann die Lagenänderung durch eine reine Translation bewirkt werden.

221. Zusammensetzung ebener Bewegungen. Führen wir nacheinander zwei Bewegungen in derselben Ebene aus, so ist das Resultat wieder eine ebene Bewegung und muß sich nach den Ergebnissen der vorigen Nummer wieder auf eine reine Drehung oder auf eine reine Parallelverschiebung zurückführen lassen. Wie setzt sich die Gesamtverschiebung aus den gegebenen Verschiebungen zusammen?

1. Nehmen wir hintereinander zwei reine Translationen vor, die durch die Strecken $\Delta_1 \bar{c}$ und $\Delta_2 \bar{c}$ der Verschiebung gegeben seien, so ist das Resultat wieder eine Translation, deren Verschiebungsstrecke durch $\Delta_1 \bar{c} + \Delta_2 \bar{c}$ gegeben ist. Das bedarf wohl keines aus-

führlichen Beweises. Auch ist sofort einleuchtend, daß es für das Resultat gleichgültig ist, welche Translation man zuerst vornimmt $(\Delta_1 \bar{c} + \Delta_2 \bar{c} = \Delta_2 \bar{c} + \Delta_1 \bar{c})$, man sagt:

Translationen sind miteinander vertauschbar.

2. Nehmen wir erst eine Translation $(\Delta \bar{c})$ und dann eine Rotation $(\Delta \vartheta)$ vor, so ist das Resultat, wie wir schon wissen (Nr. 220), eine Rotation. Der Winkel derselben ist $\Delta \vartheta$. Sei A' der Punkt, um welchen wir drehen, A der Punkt, der bei der Translation in A' übergeht, so liegt nach Nr. 220 der Drehpol M der resultierenden Rotation auf der Mittelsenkrechten von AA' und zwar so, daß $\sphericalangle AMA'$ nach Sinn und Größe gleich $\Delta \vartheta$ ist.

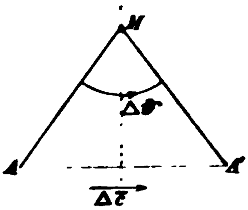


Fig. 187.

Vertauschen wir Translation und Rotation, so erhalten wir dasselbe Resultat, wenn wir die Rotation um denselben Körperpunkt, d. h. um den Punkt A vornehmen, denn dann kommt A wieder nach A' und der Drehwinkel ist nach Größe und Sinn selbstverständlich derselbe. Drehen wir aber erst um A', d. h. denselben Raumpunkt, um den wir das erstemal gedreht haben, so erhalten wir ein anderes Resultat: A' kommt dann nach A'', wobei $A'A''$ nach Richtung und Größe mit AA' übereinstimmt, d. h. gleich $\Delta \bar{c}$ ist, und also ist auch der Drehpol um $\Delta \bar{c}$ vershcoben, während natürlich der Drehwinkel nach Sinn und Größe ungeändert bleibt.

Rotation und Translation sind also dann vertauschbar, wenn man beide Male um denselben Körperpunkt dreht.

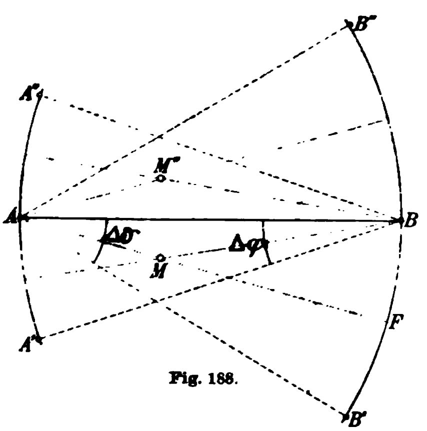


Fig. 188.

3. Es erübrigt sich, die Zusammensetzung zweier Drehungen zu besprechen.

Drehen wir erst um den Raumpunkt A durch den Winkel $\Delta \vartheta$, dann um den Raumpunkt B durch den Winkel $\Delta \varphi$.

Es sei B' der Körperpunkt, der bei der ersten Drehung nach B kommt, so daß $\sphericalangle B'AB = \Delta \vartheta$ ist, während bei der zweiten Drehung A nach A' komme, so daß $\sphericalangle ABA' = \Delta \varphi$. Dann ist im Ganzen die Strecke AB' in $A'B$ übergegangen und deshalb findet man nach Nr. 220 den Drehpol, indem man auf $B'B$ und AA' die Mittelsenkrechten errichtet, oder was dasselbe ist, die Winkelhalbierenden von $\sphericalangle B'AB$ und ABA'

zieht. Diese schneiden sich im allgemeinen — falls sie nämlich nicht parallel laufen — im Drehpol M.

Man findet also den resultierenden Drehpol zweier Drehungen um gegebene Raumpunkte A und B, indem man an der Strecke AB vom ersten Drehpol A aus $-\frac{\Delta\vartheta}{2}$, dagegen von B aus $+\frac{\Delta\varphi}{2}$ anträgt und den Schnittpunkt M der beiden freien Schenkel sucht. Der Drehpol fällt nur dann ins Unendliche, d. h. das Resultat ist nur dann eine Translation, wenn $\Delta\vartheta = -\Delta\varphi$ ist, wenn also beide Drehungen um entgegengesetzt gleiche Winkel stattfinden.

Der resultierende Drehwinkel ist $\sphericalangle B'MB$ (resp. $\sphericalangle AMA'$), dessen Hälfte FMB als Außenwinkel des Dreiecks AMB gleich

$$\frac{1}{2}\Delta\varphi + \frac{1}{2}\Delta\vartheta$$

ist.

Ist $\Delta\varphi + \Delta\vartheta \neq 0$, so ist $\Delta\varphi + \Delta\vartheta$ der resultierende Drehwinkel.

Ist aber $\Delta\varphi + \Delta\vartheta = 0$, so ist die Strecke $B'B$, die dann gleich und gleichgerichtet mit AA' ist, die Translationsstrecke.

Vertauschen wir nun die beiden Drehungen, und ist A'' der Punkt, der bei der Drehung um B nach A kommt, während B bei der zweiten Drehung um A nach B'' rückt, so wird die ganze Figur spiegelbildlich zu der alten (siehe Fig. 188), und somit liegt der neue Drehpol M'' spiegelbildlich zu dem alten M bezüglich der Strecke AB, was auch schon aus der oben angegebenen Regel hervorgeht, da jetzt $-\frac{\Delta\varphi}{2}$ an B, $+\frac{\Delta\vartheta}{2}$ an A anzutragen ist.

Drehungen um verschiedene Pole sind also nicht vertauschbar: verändert man die Reihenfolge, so liegt der Drehpol spiegelbildlich zu dem alten bezüglich der Verbindungsgeraden der beiden gegebenen Drehpole, während der Drehwinkel nach Sinn und Größe derselbe bleibt.

§ 42. Der Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand bei der ebenen Bewegung eines starren Körpers.

222. Übergang zu unendlich kleinen Verschiebungen. Die Überlegungen des vorigen Paragraphen bleiben natürlich richtig, wenn wir uns die Lagenänderungen, d. h. die Verschiebungsstrecke $\Delta\bar{c}$ und den Drehwinkel $\Delta\vartheta$ beliebig klein denken.

Nehmen wir also einen starren Körper bei einer ebenen Bewegung und betrachten zwei benachbarte Lagen zu den Zeiten t und $t + dt$, so können wir die zugehörige unendlich kleine Lagenänderung erzeugen durch die Verschiebung $d\bar{c}$ eines willkürlich herausgegriffenen Punktes C des Körpers und eine Drehung um diesen Punkt durch den unendlich kleinen Winkel $d\vartheta$.

Wie drückt sich durch $d\bar c$ und $d\vartheta$ die unendlich kleine Verschiebung $d\bar r$ irgend eines Punktes P des Körpers aus, wenn wir nur Glieder erster Ordnung ($d\bar c$, $d\vartheta$ erster Ordnung unendlich klein) beibehalten?

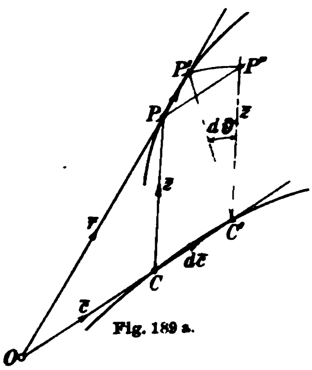


Fig. 189 a.

Es möge zunächst P in derselben Bewegungsebene wie C liegen und auch der feste Bezugspunkt O der Vektoren $\bar c$ und $\bar r$ sei in dieser Ebene enthalten. Nach den Sätzen des vorigen Paragraphen ist die Verschiebung $d\bar r = PP'$ des Punktes P gleich der Verschiebung $PP'' = CC' = d\bar c$ des Punktes C vermehrt um die Verschiebung $P''P'$, welcher eine Drehbewegung um C durch den Winkel $d\vartheta$ entspricht. Also

$$d\bar r = d\bar c + P''P'.$$

Um nun $\overline{P''P'}$ durch $d\vartheta$ auszudrücken, ist es vorteilhaft, einen Vektor $d\bar\vartheta$ in folgender Weise einzuführen:

a) es stehe $d\bar\vartheta$ senkrecht auf der Bewegungsebene und sei so gerichtet, daß von ihm aus gesehen die Bewegung linksherum stattfindet,

b) es sei die Größe von $d\bar\vartheta$ gleich der von $d\vartheta$. Wir behaupten, daß dann bis auf Größen höherer Ordnung

$$\overline{P''P'} = \overline{d\bar\vartheta\,\bar z}$$

ist, wo $\bar z = \bar r - \bar c$ den Vektor $\overline{CP}$ bedeutet.

Beweis: Da ein Vektor durch Richtung, Richtungssinn und Größe eindeutig bestimmt ist, genügt es, die Übereinstimmung dieser drei Stücke für $\overline{P''P'}$ und $\overline{d\bar\vartheta\,\bar z}$ nachzuweisen:

a) beide Vektoren stehen in der Grenze senkrecht auf dem Radius $\bar z$ des Kreises um C', sowie senkrecht auf $\overline{d\vartheta}$, d. h. sie liegen beide in der Bewegungsebene.

b) Erfolgt die Bewegung von vorne (d. h. von $d\bar\vartheta$ aus gesehen) links herum, so ist $\overline{P''P'}$ nach links bezüglich $\bar z$ gerichtet, dasselbe gilt für das äußere Produkt $\overline{d\bar\vartheta\,\bar z}$.

c) Die Größe von $P''P'$ ist $|z \cdot d\vartheta|$, das gleiche gilt für $\overline{d\bar\vartheta\,\bar z}$, weil $\overline{d\vartheta}$ und $\bar z$ senkrecht aufeinander stehen.

Damit ist der Beweis geliefert und wir haben damit die wichtige, auf Euler zurückgehende Formel gefunden:

$$d\bar r = d\bar c + \overline{d\bar\vartheta(r - c)}.$$

Man erkennt nun leicht, daß die Formel auch noch gilt, wenn die Punkte O, C und P nicht in einer Bewegungsebene liegen. Zunächst ist sie von O ganz unabhängig, da die einzelnen Größen $d\bar{z}$, $d\bar{c}$, $\overline{d\vartheta}$, $r -$ $= \bar{z}$ dies sind und sich natürlich die Verschiebung eines Punktes durch $d\bar{c}$ und $\overline{d\vartheta}$ unabhängig von O muß ausdrücken lassen.

Sei nun P' die Projektion von P auf die Bewegungsebene von C, so haben P und P' gleichzeitig dieselbe Verschiebung. Sei $\overline{OP'} = \bar{z}'$, so ist also sicher

$$d\bar{r} = d\bar{c} + \overline{d\vartheta z'}.$$

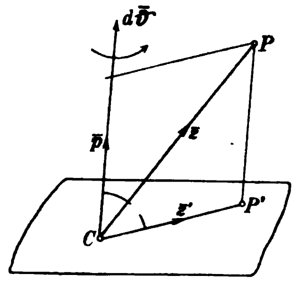


Fig. 189 b.

Nun kann man aber $\bar{z}$ in zwei Komponenten zerlegen

$$\bar{z} = \bar{z}' + \bar{p},$$

wo $\bar{p}$ in der sogenannten Drehachse liegt, d. h. in der Achse durch C senkrecht zur Bewegungsebene, in der auch $d\vartheta$ liegt.

Deshalb ist

$$d\vartheta p = 0$$

und

$$d\vartheta z = \overline{d\vartheta z'}.$$

Also gilt auch bei beliebiger Lage von P die Eulersche Formel

$$d\bar{z} = d\bar{c} + \overline{d\vartheta(r - c)}.$$

Ruht der Punkt C, so ist

$$d\bar{z} = \overline{d\vartheta(r - c)},$$

wodurch eine reine Drehung um C (eine Kreisbewegung) dargestellt wird, so daß die Eulersche Formel direkt die Zerlegung der allgemeinen Bewegung in eine Translation und eine Rotation darstellt.

223. Eulers Formel für die Geschwindigkeit. Dividiert man die Eulersche Formel der vorstehenden Nummer durch das zugehörige Zeitelement dt und setzt

$$\frac{d\bar{\vartheta}}{dt} = \bar{\omega}$$

— man nennt diesen Vektor, der in der Drehachse liegt, die Winkelgeschwindigkeit — so erhält man eine ebenfalls auf Euler zurückgehende Formel, welche exakt ist und gestattet, die Geschwindigkeit irgend eines Körperpunktes durch die Geschwindigkeit $\bar{c}$ eines nach Belieben herausgegriffenen Punktes C und die Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ auszudrücken, nämlich

$$\bar{v} = \bar{c} + \overline{\omega(r - c)}.$$

Man beachte, daß die Winkelgeschwindigkeit, ebenso wie es der Winkel $d\vartheta$ selbst war, von der Wahl des Punktes C unabhängig ist.

In rechtwinkligen Komponenten lautet die Formel, wenn man wie in Nr. 219 die z Achse senkrecht zur Bewegungsebene nimmt

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dc_x}{dt} - \omega(y - c_y),$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dc_y}{dt} + \omega(x - c_x),$$

$$\frac{dz}{dt} = 0,$$

weil ω die Komponenten 0, 0, ω hat (siehe Anhang II, 1).

Aufgabe 101: Man leite die vorstehende Komponentenform der Eulerschen Gleichung aus der Koordinatendarstellung für $\bar{r}$ als Funktion von c_x, c_y, ϑ am Schlusse der Nr. 219 ab.

224. Das Momentanzentrum der ebenen Bewegung. Überträgt man die Ergebnisse von Nr. 220 auf unendlich kleine Bewegungen, so folgt:

Wenn nicht die Winkelgeschwindigkeit ω null ist, so gibt es zu jeder Zeit einen und nur einen Punkt, der augenblicklich in Ruhe ist, d. h. keine Geschwindigkeit hat. Wir nennen diesen Punkt das Momentanzentrum der Bewegung. Was die Geschwindigkeit angeht, so kann die Bewegung augenblicklich als Kreisbewegung um das Momentanzentrum aufgefaßt werden.

Denn nach Nr. 220 läßt sich die Bewegung in der Zeit dt als reine Drehung um den Drehpol darstellen: die Grenzlage des Drehpols für $dt = 0$ ist natürlich das Momentanzentrum.

Aus der Definition des Momentanzentrums ergeben sich die folgenden Sätze, welche bei seiner Konstruktion vielfache Anwendung finden:

Kennt man die Geschwindigkeitsrichtung eines Punktes P, so liegt das Momentanzentrum auf einer Senkrechten zu dieser Richtung durch den Punkt P.

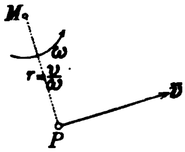


Fig. 190.

Kennt man außerdem noch Größe und Sinn von $\bar{v}$ und die Winkelgeschwindigkeit ω, so liegt bei positivem ω das Momentanzentrum M links von $\bar{v}$ und zwar so weit, daß MP gleich $\frac{v}{\omega}$ ist.

In der Vektorsprache heißt dieses Resultat, wenn $\bar{r}_0$ den Vektor nach dem Momentanzentrum, $\bar{c}$ den des Punktes P bedeutet,

$$\overline{\bar{r}_0 - \bar{c}} = \frac{1}{\omega^2}\,\overline{\omega v}.$$

Dieses Resultat kann auch durch Rechnung aus der Eulerschen Formel gefunden werden, wenn man bedenkt, daß $\bar{v} = 0$ wird für $\bar{r} = \bar{r}_0$. Es ist also ($\bar{v}$ statt $\bar{c}$ gesetzt)

$$0 = \bar{v} + \overline{\omega(\bar{r}_0 - \bar{c})},$$

äußere Multiplikation mit $\overline{\omega}$ und Beachtung der Entwicklungsformel (siehe Anhang I) ergibt

$$0 = \overline{\omega v} + \omega(\omega(r_0 - c)) = \overline{\omega v} - \omega^2 r_0 \quad c,$$

da, falls $C = P$ und M in einer Ebene liegen,

$$r_0 - c \cdot \overline{\omega} = 0$$

ist. Aus dieser Gleichung folgt dann sofort das obige Resultat.

In rechtwinkligen Koordinaten heißt es:

$$x_0 = c_x - \frac{1}{\omega} \frac{dc_y}{dt},$$

$$y_0 = c_y + \frac{1}{\omega} \frac{dc_x}{dt},$$

oder mit Elimination der Zeit

$$x_0 = c_x - \frac{dc_y}{d\vartheta},$$

$$y_0 = c_y + \frac{dc_x}{d\vartheta},$$

Natürlich ergeben sich diese Formeln auch direkt aus der Koordinatendarstellung von Nr. 223. Eigentlich spräche man besser von Momentanachse, da stets eine Achse senkrecht zur Bewegungsebene in Ruhe bleibt.

225. Beispiele. 1. Rollt ein Körper mit einer Zylinderfläche, ohne zu gleiten, auf einer anderen, parallelen Zylinderfläche, so ist natürlich die augenblickliche gemeinsame Erzeugende Momentanachse. Denn daß die gemeinsame Achse momentan keine Geschwindigkeit habe, ist Definition des Begriffes: Rollen ohne Gleiten.

2. Betrachten wir die Lenkstange CK (Pleuel- oder Schubstange) eines sogenannten Schubkurbelgetriebes, wie es in Fig. 191 skizziert ist: Der Kurbelarm OC dreht sich um eine feste Achse durch O, Kolben und Kolbenstange KS sind so geführt, daß sie eine Translation ausführen, der Kreuzkopfzapfen K bewegt sich dabei auf einer Geraden durch O, Kurbelzapfen C und Kreuzkopfzapfen K sind Zapfengelenke.

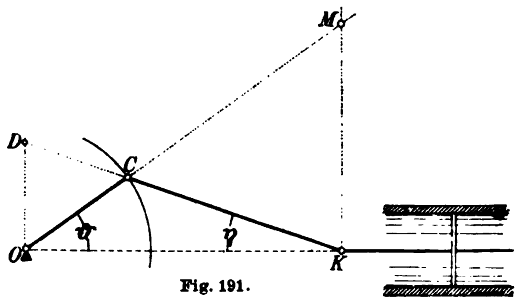


Fig. 191.

Während nun O das dauernde Momentanzentrum für die Kurbel ist, und das des Kolbens im Unendlichen liegt, findet man das Momentanzentrum M der Lenkstange auf der Verlängerung von OC und senkrecht zu OK, wenn man bedenkt, daß die Bewegungsrichtungen der Punkte C und K senkrecht zu OC, bzw. parallel zu OK sind.

Aufgaben: 102. Man konstruiere das Momentanzentrum für die Stange AB der Kurbelschwinge, für welche O, O' feste Drehachsen der Kurbeln OA und $O'B$ sind.

103. Wo liegt das Momentanzentrum für den Stab AB, dessen Enden auf zwei zueinander senkrechten Geraden gleiten können? (Fig. 193.)

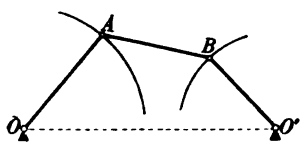


Fig. 192.

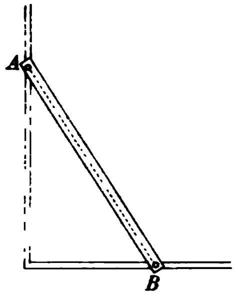


Fig. 193.

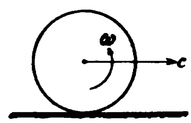


Fig. 194.

104. Eine Walze vom Radius r rolle, ohne zu gleiten, auf einer ebenen Fläche mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Warum hat die Mittelachse die Geschwindigkeit ωr parallel zur Ebene? Man zeige, daß allgemein, wenn die Mittelachse die Geschwindigkeit c besitzt, der Berührungspunkt die Geschwindigkeit $c + r\omega$ hat, wenn c nach rechts, ω linksherum positiv gezählt wird. (Fig. 194.)

226. Die Polbahnen. Im allgemeinen wird im Laufe der Bewegung das Momentanzentrum weder ein fester Punkt im Körper noch im Raume sein, sondern in beiden je eine Kurve beschreiben, die wir Polbahnen nennen wollen: speziell mag die Bahn im Raume Spurkurve (Poloide, Polhodie), die Bahn im Körper Polkurve (Serpoloide, Herpolhodie) heißen. Wie verhalten sich beide zueinander?

Zunächst einmal haben sie sicher in jedem Augenblick einen Punkt gemeinsam, nämlich das augenblickliche Momentanzentrum.

Dann berühren sich beide, weil durch Drehung der Polkurve um einen unendlich kleinen Winkel ein unendlich benachbarter Punkt mit einem Punkte der Spurkurve zur Deckung kommt, was nicht möglich wäre, wenn beide Kurven einen von Null verschiedenen Winkel miteinander bilden würden. (Eine Ausnahme könnte nur eintreten, wenn ein Punkt der Polbahnen eine endliche Zeit lang Momentanzentrum wäre. Dann könnten auch beide Bahnen Ecken haben).

Endlich hat der Berührungspunkt augenblicklich keine Geschwindigkeit.

Also rollt bei der Bewegung die Polkurve auf der Spurkurve ab ohne zu gleiten.

Jede ebene Bewegung, die keine reine Translation ist und auch nicht dauernd um eine feste Achse stattfindet, kann als reine Rollbewegung aufgefaßt werden.

Beispiel: Bei dem Stab, der mit seinen Enden auf zwei zueinander senkrechten Geraden gleitet (vgl. Aufgabe 103, Nr. 225), erkennt man leicht, daß beide Polbahnen Kreise sind: der bewegliche Kreis hat den halben Radius wie der Spurkreis und rollt in diesem ab.

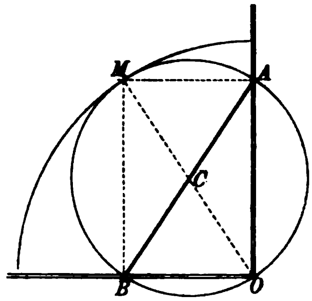


Fig. 195.

Denn einmal hat das Momentanzentrum M von dem festen Punkte O die konstante Entfernung l gleich der Länge des Stabes, dann aber von dem Mittelpunkte C des Stabes die konstante Entfernung $\frac{l}{2}$.

Läßt man also einen Kreis in einem doppelt so großen Kreise abrollen, so beschreibt jeder Punkt seiner Peripherie einen Durchmesser.

Bildet man beide Kreise als Zahnräder aus, so hat man ein Mittel, eine rotierende Bewegung in eine hin- und hergehende zu verwandeln. Man wendet diesen Mechanismus z. B. bei Druckerpressen an.

Aufgabe 105: Man zeichne beim Schubkurbelgetriebe (siehe Nr. 225) die Spurkurve, durch punktweise Konstruktion des Momentanzentrums für gewisse Werte des Kurbelwinkels ϑ $\left(\text{etwa } \vartheta = 0, \frac{\pi}{12}, 2\frac{\pi}{12}, 3\frac{\pi}{12} \text{ usw.}\right)$. Man überlege sich auch, wie man die algebraische Gleichung dieser Kurve in rechtwinkligen Koordinaten aufstellen kann.

227. Gleichungen der Polbahnen. Um allgemein die Gleichungen der Spurkurve zu finden, nehme man die Gleichungen aus Nr. 224 für das Momentanzentrum

$$x_0 = c_x - \frac{dc_y}{d\vartheta},$$
$$y_0 = c_y + \frac{dc_x}{d\vartheta}.$$

Kennt man nur die Bewegung so weit, daß man c_x, c_y, ϑ als Funktionen irgend eines Parameters (z. B. der Zeit t) angeben kann, so hat man in den vorstehenden Gleichungen schon die Gleichungen der Spurkurve in Parameterform. Eliminiert man den Parameter, so erhält man die Gleichung zwischen den Koordinaten x_0, y_0.

Um auch die Gleichung der Polkurve aufzustellen, muß man erst noch Koordinaten im bewegten Körper einführen. Wählt man C als Anfangspunkt, den Strahl durch C, der mit der x-Achse den Winkel ϑ einschließt, als a-Achse, so berechnen sich die Koordinaten a_0, b_0 des Momentanzentrums aus x_0, y_0 nach den bekannten Koordinatentransformationsformeln

$$a_0 = (x_0 - c_x)\cos\vartheta - (y_0 - c_y)\sin\vartheta,$$
$$b_0 = (x_0 - c_x)\sin\vartheta + (y_0 - c_y)\cos\vartheta.$$

Deshalb lautet die **Gleichung der Polkurve** in Parameterform

$$a_0 = -\cos\vartheta \cdot \frac{dc_y}{d\vartheta} - \sin\vartheta \cdot \frac{dc_x}{d\vartheta},$$

$$b_0 = -\sin\vartheta \cdot \frac{dc_y}{d\vartheta} + \cos\vartheta \cdot \frac{dc_x}{d\vartheta}.$$

Beispiel: Für das Schubkurbelgetriebe nehmen wir als Punkt C den Kurbelzapfen, als Strahl den Strahl CK, der mit der x-Achse (OK) den Winkel $-\eta$ einschließt, wobei η mit dem Kurbelwinkel ϑ in der leicht zu erkennenden Beziehung steht

$$\sin\eta = \lambda \sin\vartheta,$$

wobei $\lambda = \frac{r}{l}$ (r Kurbelarm OC, l Schubstange CK) das sogenannte Schubstangenverhältnis ist.

Als Parameter nehmen wir ϑ.

Dann ist

$$c_x = r\cos\vartheta,$$

$$c_y = r\sin\vartheta.$$

In den obenstehenden Formeln ist natürlich statt ϑ überall $-\eta$ setzen, so daß wir gemäß

$$d\eta = \frac{\lambda\cos\vartheta}{\cos\eta}\, d\vartheta$$

erhalten

$$x_0 = r\cos\vartheta + r\cos\vartheta \cdot \frac{\cos\eta}{\lambda\cos\vartheta} = r\cos\vartheta + l\cos\eta,$$

$$y_0 = r\sin\vartheta + r\sin\vartheta \cdot \frac{\cos\eta}{\lambda\cos\vartheta} = r\sin\vartheta + l\sin\vartheta \cdot \frac{\cos\eta}{\cos\vartheta}.$$

Von der Richtigkeit dieser Formeln überzeugt man sich auch leicht aus der Anschauung.

Die Polkurve dagegen hat die Darstellung

$$a_0 = \cos\eta \cdot r\cos\vartheta \cdot \frac{\cos\eta}{\lambda\cos\vartheta} + \sin\eta \cdot r\sin\vartheta \cdot \frac{\cos\eta}{\lambda\cos\vartheta},$$

$$b_0 = -\sin\eta \cdot r\cos\vartheta \cdot \frac{\cos\eta}{\lambda\cos\vartheta} + \cos\eta \cdot r\sin\vartheta \cdot \frac{\cos\eta}{\lambda\cos\vartheta},$$

oder

$$a_0 = l\,\frac{\cos(\eta-\vartheta)}{\cos\vartheta}\cos\eta,$$

$$b_0 = l\,\frac{\sin(\vartheta-\eta)}{\cos\vartheta}\cos\eta.$$

Auch diese Formeln kann man leicht aus der geometrischen Konstruktion des Momentanzentrums ableiten.

Aufgaben: 106. 1. In ähnlicher Weise behandele man das Beispiel von Nr. 226.

107. 2. Der Schwerpunkt eines Körpers falle nach dem Galileischen Fallgesetz herab. Dabei drehe sich der Körper mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine horizontale Achse durch den Schwerpunkt. Man berechne für diese Bewegung Spurkurve und Polkurve.

Bei einer solchen einfachen Aufgabe bedarf es nicht des Formelapparates dieser Nummer; man kann das Momentanzentrum leicht aus der Anschauung finden. Für die Bestimmung der Spurkurve empfehlen sich dann rechtwinklige Koordinaten, für die der Polkurve Polarkoordinaten.

228. Relativität der Bewegung. Die reziproke Bewegung. Für die reine Kinematik kann es nur Relativbewegung geben, d. h. es hat nur Sinn von Bewegung zu reden, wenn ich angebe, wogegen sich der Körper bewegt oder welches das ruhende Koordinatensystem ist. Wenn ich nun die Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene betrachte, so kann ich dieselbe Bewegung auch als Bewegung der Ebene relativ zur Figur ansehen. Um sich das deutlicher zu machen, denke man sich mit der Figur noch einmal eine ganze Ebene verbunden, welche die Grundebene deckt, umgekehrt in die Grundebene irgendeine Figur gezeichnet und betrachte nun bei der Bewegung diese letztere von der mit der ersten Figur fest verbundenen Ebene aus. Diese wird jetzt zu ruhen scheinen, die andere in Bewegung begriffen zu sein.

Man nennt die Bewegung der Grundebene relativ zu der ursprünglich in Bewegung gedachten Figur die „reziproke Bewegung" der ursprünglichen.

Geht man von der ursprünglichen zur reziproken Bewegung über, so bleibt natürlich das Momentanzentrum dasselbe, Spurkurve und Polkurve vertauschen dagegen ihre Bedeutung.

Von diesem Umstand kann man Gebrauch machen, um durch Zeichnen die Polkurve zu finden.

Wir lösen diese Aufgabe für das Schubkurbelgetriebe, indem wir um sie eine mit der Pleuelstange fest verbundene Ebene denken, in die wir zeichnen.

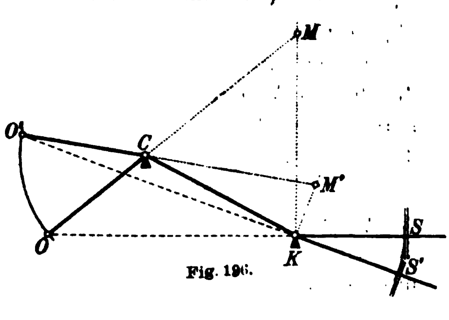


Fig. 196.

C und K sind jetzt feste Punkte, O bewegt sich im Kreise um C, der Kolben KS so um K, daß die Verlängerung von KS stets durch O hindurchgeht. Führt man nun für verschiedene Lagen des Kurbelsystems die früher besprochene Konstruktion des Momentanzentrums aus (siehe Nr. 225), so erhält man ebenso viele Punkte der Polkurve.

229. Relative Bewegung mehrerer ebener Figuren gegeneinander. Wir haben schon früher einmal von der Relativbewegung gesprochen (siehe § 6). Relativ zu einem selbst bewegten starren Körper bewege sich ein Punkt, der einem zweiten starren Körper angehören möge, mit der Relativgeschwindigkeit $\bar{v}_r$. Denkt man sich denselben Punkt mit dem erstgenannten starren Körper fest verbunden, so habe er die Geschwindigkeit $\bar{v}_f$ (Führungsgeschwindigkeit). Dann ist, wie früher gezeigt wurde, die absolute Geschwindigkeit d. h. die Geschwindigkeit gegen den als ruhend gedachten Körper (Grundebene):

$$\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_f.$$

Wählen wir nun in beiden Körpern denselben Punkt C aus, so ist nach der Eulerschen Formel (Nr. 223)

$$\bar{v}_r = \bar{\dot{c}}_r + \overline{\omega_r (r - c)}$$

und ebenso

$$\bar{v}_f = \bar{\dot{c}}_f + \overline{\omega_f (r - c)}.$$

Addieren wir beide Formeln so erhalten wir:

$$\bar{v} = (\bar{\dot{c}}_r + \bar{\dot{c}}_f) + \overline{(\omega_r + \omega_f)(r - c)},$$

woraus wir erkennen,

daß man nicht nur die Translationsgeschwindigkeit der Absolutbewegung durch Addition der Translationsgeschwindigkeiten von Relativ- und Führungsbewegung erhält, sondern daß man in analoger Weise auch die Winkelgeschwindigkeiten zu behandeln hat.

Übrigens dürfte dieser Satz wohl auch anschaulich klar sein.

Er gestattet nun, die Zusammensetzung der Führungs- und der Relativbewegung als das Resultat zweier hintereinander ausgeführten Bewegungen aufzufassen, denn verschiebt man erst einen Punkt C nach C', dreht dann um C' den Körper durch einen Winkel $\Delta_1\vartheta$, verschiebt dann abermals C' nach C'' und dreht endlich den Körper um C'' durch den Winkel $\Delta_2\vartheta$, so ist Resultat offenbar dasselbe, als hätte man gleich C nach C'' verschoben und dann den Körper um C'' durch den Winkel $\Delta_1\vartheta + \Delta_2\vartheta$ gedreht.

Wir dürfen also auf die Zusammensetzung von Relativ- und Führungsgeschwindigkeiten unsere früheren Sätze aus Nr. 221 anwenden, die wir aber noch für unendlich kleine Bewegungen (Geschwindigkeit) modifizieren müssen.

230. Zusammensetzung unendlichkleiner Bewegungen. Es ist nur noch ein Wort zu der Zusammensetzung unendlichkleiner Drehbewegungen um verschiedene Punkte zu sagen. Lassen wir in Nr. 221 die Drehwinkel $\Delta\vartheta$ und $\Delta\varphi$ unendlich klein werden, aber so, daß ihr Verhältnis einer bestimmten, von Null verschiedenen Grenze zustrebt:

$$\lim \frac{\varDelta \vartheta}{\varDelta \varphi} = \frac{d\vartheta}{d\varphi},$$

so rückt der resultierende Drehpol M mit M' zusammen auf die Gerade AB an eine Stelle M_0. Um die Stelle M_0 zu finden, beachten wir, daß

$$MA : MB = \sin \frac{\varDelta \varphi}{2} : \sin \frac{\varDelta \vartheta}{2}$$

ist. Daraus aber wird beim Grenzübergang

$$M_0 A : M_0 B = \left| \frac{d\varphi}{d\vartheta} \right|.$$

Außerdem erkennt man, daß M_0 zwischen AB liegt, wenn $d\vartheta$ und $d\varphi$ gleichsinnig sind, anderenfalls liegt M_0 außerhalb AB.

Sei

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_2, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_1,$$

und wenden wir unser Resultat auf die in der vorigen Nummer vorgetragene Auffassung der Relativbewegung an, so erhalten wir:

Bewegt sich ein Körper um das Momentanzentrum A mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 und relativ zu ihm ein zweiter Körper um das relative Momentanzentrum B mit der Winkelgeschwindigkeit ω_2, so hat der zweite Körper die absolute Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 + \omega_2$; das Momentanzentrum seiner Absolutbewegung liegt auf der Geraden AB und teilt die Strecke AB im umgekehrten Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten, innerlich, wenn ω_1 und ω_2 dasselbe Zeichen haben, sonst äußerlich.

In diesem Satze erkennen wir einen Teil eines später (Nr. 264) allgemein zu beweisenden Satzes:

Unendlichkleine Drehungen eines starren Körpers setzen sich so zusammen wie Kräfte, sind also insbesondere vertauschbar.

Aus unserem Satze folgt sofort der folgende, häufig angewendete Satz:

Die Momentanzentra dreier relativ zueinander in derselben Ebene bewegter Körper liegen in einer Geraden.

Denn man kann stets den einen Körper als ruhend, den zweiten als den führenden Körper ansehen; das Momentanzentrum des dritten gegen den zweiten ist dann das Momentanzentrum der Relativbewegung, das des dritten gegen den ersten das der Absolutbewegung, endlich das des ersten gegen den zweiten das der Führungsbewegung.

Aufgaben: 108. Man beweise, daß D (siehe Fig. 191 S. 351) das Momentanzentrum der Bewegung des Kolbens gegen die Kurbel ist, indem man vier Körper ins Auge faßt: die Kurbel, die Lenkstange, den Kolben und die Grundebene und

nun den vorstehenden Satz einmal anwendet auf Kurbel, Kolben und Grundebene, dann auf Kurbel, Kolben und Lenkstange.

109. Man suche nach derselben Methode den relativen Drehpol der beiden Kurbeln der Schwinge (siehe Aufgabe 102 in Nr. 225).

110. Man mache das gezeichnete statisch bestimmte Fachwerk dadurch beweglich, daß man den Stab 3 fortläßt. *O* sei fest, *O'* nur auf horizontaler Unterlage gestützt. Man konstruiere zuerst das Momentanzentrum von 5, 6, 7 — diese werden als ein starres System dasselbe Momentanzentrum haben — indem man beachtet, daß man 2, 6 für sich allein als Kurbelsystem auffassen kann, dann das Momentanzentrum von 4, indem man den vorstehenden Satz einmal auf die Grundebene, sowie die Stäbe 1, 4 ein zweites Mal auf die Grundebene und die Stäbe 4, 7 anwendet.

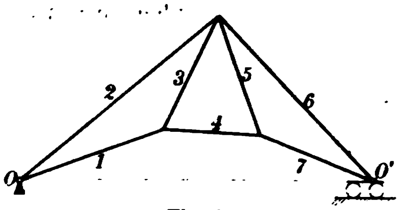


Fig. 197.

Diese Aufgabe ist fundamental für die kinematische Theorie der Fachwerke, nämlich für die Konstrukion der sogenannten „Verschiebungspläne".

231. Anwendung auf die Theorie der Zahnräder. Betrachten wir zwei Räder, die sich um die Achsen O und O' drehen. Ihr relatives Momentanzentrum liegt dann stets auf OO' und teilt diese Strecke im umgekehrten Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten. Soll dieses Verhältnis konstant sein, so hat auch das relative Momentanzentrum im Raume eine feste Lage, beschreibt also in den Körpern je einen Kreis. Soll die Abhängigkeit der Bewegung bei den Rädern durch Zähne aufrecht erhalten werden, so nennt man die eben genannten Kreise die Teilkreise der Räder.

Diese müssen als relative Polbahnen bei der beabsichtigten Bewegung aufeinander rollen, ohne zu gleiten. Dementsprechend müssen die Zähne konstruiert sein.

Betrachten wir also ein Zahnprofil des ersten Rades, so muß das mit ihm in Eingriff stehende Zahnprofil des zweiten Rades die Eigenschaft haben, bei der Bewegung stets das erstere zu berühren. Um also zu einem Zahnprofil das entsprechende zu konstruieren, kann man so verfahren:

Man denke sich das eine Rad ruhend, das andere auf ihm rollend, sodaß sich die Teilkreise berühren ohne zu gleiten. Man zeichnet dabei die Kurvenschar, die man durch die Bewegung eines mit dem zweiten Rade festverbundenen Zahnprofils erhält, welche also die verschiedenen relativen Lagen dieses Profils zum ersten Rade angibt. Die Einhüllende dieser Kurvenschar liefert dann das entsprechende Zahnprofil im ersten Rade.

Diese Methode ist einfach, aber einseitig und darum wenig zweckmäßig.

Vorzuziehen ist die sogenannte Methode der Hilfspolbahnen. Denken wir uns noch ein drittes Rad, das so umläuft, daß die relativen

Momentanzentra aller drei Räder beständig zusammenfallen, daß also die drei Teilkreise sich beständig berühren. Nehmen wir dann in dem dritten Rad ein Zahnprofil willkürlich an, und konstruieren in jedem der beiden anderen die zugehörigen Profile, so sind auch diese beiden einander entsprechend.

Zum Beweise dieses Satzes dient ein Hilfssatz: Die gemeinsame Normale einer beweglichen Kurve und der Einhüllenden der durch ihre Bewegung erzeugten Kurvenschar, geht durch das Momentanzentrum. Und umgekehrt trifft ein Lot aus dem Momentanzentrum die bewegliche Kurve im allgemeinen wenigstens gerade in ihrem augenblicklichen Berührungspunkte mit der Einhüllenden.

Der erste Teil des Satzes ist klar: denn der augenblickliche Berührungspunkt gleitet ja an der Einhüllenden entlang, also liegt das Momentanzentrum auf der Normalen, denn es ist ja auf der Senkrechten zur Bewegungsrichtung eines Punktes zu suchen.

Die Umkehrung ist klar, wenn es nur ein Lot aus dem Momentanzentrum auf die Kurve gibt. Daher ist der Satz jedenfalls im allgemeinen richtig. Bei mehreren Loten muß man eventuell auswählen.

Aus dem Hilfssatze folgt aber der vorstehende Hauptsatz sogleich; denn fällen wir aus dem gemeinsamen Momentanzentrum ein Lot auf das dritte Zahnprofil, so trifft es dieses sowohl in dem augenblicklichen Berührungspunkt mit dem zweiten als auch in dem Berührungspunkte mit dem ersten Zahn und somit stehen auch diese beiden untereinander in Berührung.

232. Weitere Bemerkungen über Zahnräder. Das Hilfsprofil im dritten Rade bleibt ganz willkürlich: man kann statt seiner auch einen Punkt nehmen. Tut man das, so erhält man die sogenannte Zykloidenverzahnung, denn der Punkt beschreibt in dem einen Rade eine Epizykloide, in dem anderen eine Hypozykloide.

Nimmt man hingegen den dritten Teilkreis unendlichgroß, d. h. läßt man eine Gerade auf beiden Kreisen mit abrollen und betrachtet einen Punkt dieser Geraden als Hilfsprofil, so beschreibt er in beiden Rädern eine Evolvente: man kommt so zur Evolventenverzahnung.

Weitere Details gehören nicht hierher, es muß auf die Vorlesungen resp. Lehrbücher über Kinematik oder Maschinenelemente verwiesen werden.

Besonders sei das Werk von F. Reuleaux: „Theoretische Kinematik" genannt, das die im Anfange des 19. Jahrhunderts von Ampère begründete spezielle „Kinematik" zu einem gewissen Abschluß brachte. Reuleaux bearbeitete das Gebiet systematisch, stellte klare Definitionen wie Elementenpaar, kinematische Kette, Mechanismus usw. an die Spitze und übte lange Zeit einen herrschenden Einfluß auf die Technik aus. Dieser mußte bedenklich werden, als die rein kinematische Betrachtung der Mechanismen die kinetische in den Hintergrund drängte und das Kräftespiel außer acht ließ. Daher die neuerliche Abkehr von Reuleaux, die vielleicht wiederum zu weit geht. Grashof hat die Reuleauxschen Lehren ergänzt und im zweiten Bande seiner Theoret. Maschinenlehre (1883) kurz dargestellt.

Von neueren Arbeiten über Zahnräder seien die von M. Disteli und F. Schilling in der Zeitschr. f. Math. u. Phys. genannt.

Weitere Literaturangaben in Nr. 235.

233. Der Beschleunigungszustand eines ebenen Systems. Aus der Eulerschen Formel für die Geschwindigkeit

$$\bar{v} = \dot{\bar{c}} + \overline{\omega(r - c)} \tag{1}$$

erhalten wir durch Differentiation

$$\bar{w} = \ddot{\bar{c}} + \overline{\dot{\omega}(r - c)} + \overline{\omega(\dot{r} - \dot{c})}$$

oder, indem wir $\overline{\dot{r} - \dot{c}}$ vermittels der Eulerschen Formel selbst eliminieren,

$$\bar{w} = \ddot{\bar{c}} + \overline{\dot{\omega}(r - c)} + \overline{\omega(\omega(r - c))}. \tag{I}$$

Der neue Vektor $\dot{\bar{\omega}}$ heißt die Winkelbeschleunigung. Ist C ein fester Punkt, so bleiben nur die beiden letzten Glieder stehen und zwar ungeändert. Diese müssen also die Beschleunigung bei der reinen Kreisbewegung ausdrücken. Tatsächlich steht nun auch erstens $\overline{\dot{\omega}(r - c)}$ auf dem Radius $r = r - c$ senkrecht und hat die Größe $z \cdot \dot{\omega}$, zweitens ist, falls C und P in einer Bewegungsebene liegen, d. h. $\bar{z} = \bar{r} - \bar{c}$ auf $\bar{\omega}$ senkrecht steht,

$$\overline{\omega(\overline{\omega(r - c)})} = -\omega^2 \overline{r - c},$$

also zentripetal gerichtet und von der Größe $z\omega^2$.

Die allgemeine Beschleunigung setzt sich also zusammen aus der Beschleunigung der Kreisbewegung um den gewählten Punkt C und der Beschleunigung $\ddot{\bar{c}}$ eben dieses Punktes.

Es gibt auch stets einen Punkt mit der Beschleunigung Null, den sogenannten Beschleunigungspol. Denn bei der Kreisbewegung bilden alle Beschleunigungsvektoren einen festen Winkel mit den Radien, dessen trigonometrische Tangente $\frac{\omega^2}{\dot{\omega}}$ ist, ihre absolute Größe wächst mit der Entfernung vom Mittelpunkt. Also wird bei der Kreisbewegung die Beschleunigung an einer Stelle gleich einem beliebig vorgeschriebenen Vektor, also an einer Stelle gleich $-\ddot{\bar{c}}$, so daß der Punkt dieser Stelle die Gesamtbeschleunigung Null besitzt.

234.[1] **Wählen wir speziell für C das Momentanzentrum,** so interessiert es, für das Momentanzentrum $\ddot{\bar{c}}$, das keineswegs im allgemeinen Null sein wird, zu bestimmen.

1) Diese Nummer kann der Anfänger überschlagen.

Aus

$$\bar v = \overline{\omega (r - r_0)}, \tag{2}$$

wo $\bar r_0$ den Vektor des Momentanzentrums bedeutet, folgt

$$\bar w = \overline{\dot\omega (r - r_0)} + \overline{\omega v} - \overline{\omega \dot r_0}$$

oder

$$\bar w = \overline{\dot\omega (r - r_0)} + \overline{\omega (\overline{\omega (r - r_0)})} - \overline{\omega \dot r_0}\,.$$

Ein Vergleich mit der obigen allgemeinen Formel gibt als Beschleunigung des Momentanzentrums:

$$\bar w_0 = - \overline{\omega \dot r_0}\,. \tag{II}$$

wo $\dot r_0$ passend als **Fortlaufsgeschwindigkeit** des Momentanzentrums längs der Spurkurve bezeichnet wird. Denn $\dot{\bar r}_0$ ist keineswegs die Geschwindigkeit des Momentanzentrums — die ist ja Null — sondern eben jene Fortlaufsgeschwindigkeit, da wir, weil wir differentiiert haben, die Formel (2) dauernd auf das Momentanzentrum beziehen müssen.

Nun muß sich aber die Fortlaufsgeschwindigkeit $\dot{\bar r}_0$ ausdrücken lassen, wenn wir die Polbahnen und $\bar\omega$ kennen. Die Richtung fällt in die Tangente der Spurbahn, die Größe ist $\frac{ds}{dt}$, wenn ds die Länge des Bogenelementes bis zu den beiden Punkten der Spurkurve bzw. Polkurve bedeutet, die nach der Zeit dt zusammenfallen.

Sind $d\chi$ und $d\psi$ die zugehörigen Kontingenzwinkel der beiden Kurven, beide bei Drehung der Tangenten linksherum positiv gerechnet, so sind die Krümmungsradien, wenn wir sie einmal ausnahmsweise bei Krümmung links herum positiv, sonst negativ rechnen,

$$\varrho = \frac{ds}{d\chi} \text{ für die Spurkurve,}$$

$$r = \frac{ds}{d\psi} \text{ für die Polkurve,}$$

also

und

$$\left.\begin{aligned} d\chi &= \frac{1}{\varrho}\, ds \\ d\psi &= \frac{1}{r}\, ds. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Andererseits ist der Drehwinkel des beweglichen Körpers

$$d\vartheta = d\chi - d\psi, \tag{4}$$

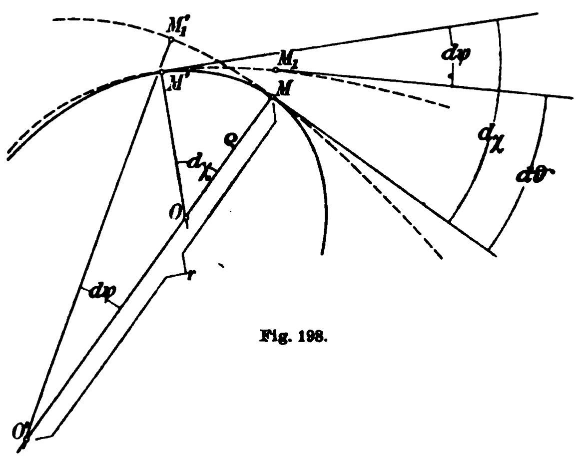


Fig. 198.

denn die Nachbartangente der Polkurve muß sich um $d\psi$ zurückdrehen, um in die Lage der alten gemeinsamen Tangente zu gelangen, dann um $d\chi$ vorwärts (links herum) um in ihre neue Lage, nämlich die Nachbartangente der Spurkurve zu gelangen. Nun ist aber die Polkurve mit dem bewegten Körper fest verbunden, also ist $d\vartheta$ der Drehwinkel des bewegten Körpers.

Aus (3) und (4) zusammen folgt

$$\omega = \frac{1}{\varrho}\, \dot r_0 - \frac{1}{r}\, \dot r_0\,,$$

also

$$\dot{r}_1 = \omega \frac{r \cdot \varrho}{r - \varrho}. \tag{III}$$

Man sieht, daß das Momentenzentrum eine unendliche Fortgangsgeschwindigkeit hat, wenn beide Polbahnen gleiche und gleichsinnige Krümmung besitzen. Der Wert der Beschleunigung, welche das Momentanzentrum besitzt, berechnet sich nach (II) und (III) zu

$$\omega^2 \left| \frac{r\varrho}{r - \varrho} \right|,$$

der Richtung nach steht sie auf der Spurkurve senkrecht und zwar nach rechts im Sinne der Fortlaufsgeschwindigkeit des Momentanzentrums, wenn die Drehung links herum erfolgt (folgt aus (II)). Dieser Sinn aber ergibt sich aus (III): Setzt man auf der Spurkurve willkürlich einen Sinn fest, so hat die Fortlaufsgeschwindigkeit $\dot{r}_0$ denselben Sinn, wenn $\omega \frac{r\varrho}{r - \varrho}$ positiv ist, wobei die Krümmungsradien positiv zu zählen sind, wenn die Krümmung im festgesetzten Sinne der Kurven linksherum erfolgt.

Aufgaben: 111. Man diskutiere nach den Ergebnissen dieser beiden letzten Nummern die Beschleunigung für den Mittelpunkt einer Walze, welche auf einer horizontalen Ebene rollt und zeige das allerdings von vornherein zu erwartende Ergebnis, daß sie der Ebene parallel und gleich $r\dot{\omega}$ ist, wenn r den Radius der Walze bedeutet.

112. Auf einer ruhenden Walze vom Radius ϱ rollt parallel eine Walze vom Radius r, so daß augenblicklich beide Achsen senkrecht übereinander liegen. Für welche Punkte der Vertikalen ist die vertikale Beschleunigungskomponente nach oben, für welche nach unten gerichtet? ($\omega \neq 0$).

235. Schlußbemerkung und Literatur. Im vorstehenden Paragraphen haben wir aus der sogenannten geometrischen Kinematik der ebenen Bewegung des Körpers nur so viel gebracht, als wir unbedingt für die Kinetik brauchen. Es fehlt insbesondere die ganze Theorie der Gelenkmechanismen, abgesehen von den wenigen Andeutungen über Zahnräder und Kurbelgetriebe. Es ist noch eine ganze Disziplin für sich: die Konstruktion und Theorie solcher Mechanismen, die dazu dienen, gewisse Bewegungen in andere umzusetzen. Es muß also diesbezüglich auf die Literatur verwiesen werden.

Wir haben schon in Nr. 232 die Werke von Reuleaux und Grashof hervorgehoben.

Weiter seien die beiden französischen Werke geringeren Umfangs genannt:

G. Königs: Leçons de cinématique,

H. Poincaré: Cinématique et mechanismes.

Eine gute Darstellung der Kinematik enthalten dann noch die folgenden Werke und Lehrbücher über Mechanik: vor allem das schon in der Einleitung genannte:

Thomson und Tait: Treatise on natural philosophy,

dann die ebenfalls schon genannten Lehrbücher von Schell, Gray, Marcolongo-Timerding, Webster und Heun.

Weitere Literaturangaben und eine Übersicht über den ganzen Gegenstand findet man in dem Encyklopädieartikel IV, 3: Schoenflies und Grübler: Kinematik.

§ 43. Kinetik der ebenen Bewegung des starren Körpers.

236. Die drei Bewegungsgleichungen. Da der starre Körper bei ebener Bewegung drei Grade der Freiheit hat, so werden wir auch drei Bewegungsgleichungen brauchen, und diese liefern uns sofort Schwerpunkts- und Momentensatz.

Der Schwerpunktssatz

$$m\bar{w}^* = \Sigma \bar{k},$$

wo auf der rechten Seite die äußeren Kräfte stehen, liefert uns für die Ebene zwei Gleichungen, die im allgemeinen, wenn wir nämlich die Kräfte vollständig kennen, die Bewegung des Schwerpunktes bestimmen.

Um nun die Bewegung um den Schwerpunkt zu behandeln, machen wir ihn zum Translationspunkt und wählen gleichzeitig die durch ihn hindurchgehende Drehachse zur Momentenachse.

Dann liefert sofort der Momentensatz nach Nr. 211

$$\frac{d}{dt} \mathop{\mathrm{S}} dm r^2 \omega = M,$$

wo M das Moment der äußeren Kräfte ist.

Da nun alle Punkte dasselbe ω haben und für den starren Körper das Trägheitsmoment

$$T \equiv \mathop{\mathrm{S}} dm r^2$$

konstant ist, wenn die Achse festbleibt, wie in unserem Falle, so gilt die Momentengleichung als dritte Gleichung

$$T\dot{\omega} = M.$$

Es gilt also dieselbe Gleichung für die Drehung um eine sich parallel bleibende Schwerachse wie um eine feste Drehachse.

237. Anfahren eines Zuges. Betrachten wir ein Paar von Triebrädern einer elektrischen Lokomotive. Das Eigengewicht nebst vertikaler Belastung sei L, Z die an der Achse ausgeübte Zugkraft des Räderpaares auf die Lokomotive, N der Normaldruck an der Schiene, R die Reibung, die den Charakter der Haftreibung hat, wenn kein Schleifen eintritt, was wir annehmen wollen, W sei das Widerstandsmoment der Zapfenreibung, M das vom Motor auf das Rad übertragene Moment. Wir wollen R nach vorn positiv rechnen. ω sei

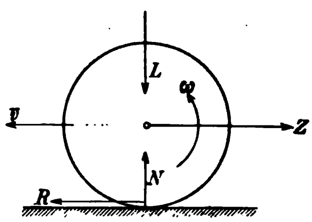


Fig. 199.

die Winkelgeschwindigkeit, so daß der Mittelpunkt — das Räderpaar sei zentriert — die Beschleunigung $r\dot{\omega}$ hat, wenn r den Radius der Räder bedeutet. Dann gibt der Schwerpunktssatz, angewendet auf das Räderpaar

$$mr\dot{\omega} = R - Z, \tag{1}$$

$$0 = L - N \tag{2}$$

und der Momentensatz, bezogen auf den Mittelpunkt,

$$T\dot{\omega} = M - W - Rr. \tag{3}$$

N, $\dot{\omega}$, R, Z sind die Unbekannten.

Um noch eine Gleichung zu erhalten, nehmen wir noch den Schwerpunktssatz für den ganzen Zug ohne die Triebräder hinzu, er lautet: da der ganze Zug ebenfalls die Beschleunigung $r\dot{\omega}$ erhält

$$m'' r\dot{\omega} = \Sigma Z - D$$

wo m'' die Masse des Zuges ohne die Triebräder, D den Widerstand des Zuges außerhalb der Triebräder bedeutet (Luftwiderstand und andere Reibungswiderstände) und sich die Summe Σ auf alle Triebräderpaare bezieht.

Es ist also

$$\Sigma Z = D + m'' r\dot{\omega}. \tag{4}$$

Nehmen wir diese Gleichung noch zu (1), (2), (3) hinzu, lösen zunächst (1) und (3) unter Elimination von R nach Z auf:

$$Z = \frac{M - W - (T + mr^2)\dot{\omega}}{r}$$

und setzen das in (4) ein:

$$\frac{\Sigma M - \Sigma W - \Sigma(T + mr^2)\dot{\omega}}{r} = D + m'' r\dot{\omega},$$

so erhalten wir

$$\dot{\omega} = \frac{\Sigma M - \Sigma W - r \cdot D}{m'' r^2 + \Sigma(T + mr^2)}. \tag{I}$$

Nunmehr können wir (1), (2), (3) nach N, R, Z auflösen und erhalten

$$\left.\begin{aligned} N &= L, \\ Z &= \frac{1}{r}(M - W - (T + mr^2)\dot{\omega}), \\ R &= \frac{1}{r}(M - W - T\dot{\omega}). \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

Bilden wir ΣR und setzen darin $\Sigma M - \Sigma W$ aus (I) ein, so erhalten wir

$$\Sigma R = D + (m'' + \Sigma m) r\dot{\omega},$$

den Schwerpunktssatz für den ganzen Eisenbahnzug. Man sieht daraus, daß ΣR jedenfalls bei der Anfahrt positiv sein muß, was wir schon früher einmal vorwegnahmen. Und wenn wir der Wirklichkeit entsprechend M für ein Triebräderpaar wenigstens beim Anfahren so groß nehmen, daß $Z > 0$ wird, daß es also wirklich zieht, so muß für ein solches

$$M > W + (T + mr^2)\dot{\omega}$$

sein, also nach (II)

$$R > mr\dot{\omega} > 0.$$

Bei einem wirklichen Triebrad ist also beim Anfahren die Reibung nach vorn gerichtet.

Die Bedingung

$$|R \leqq fN,$$

also

$$M - W - T\dot{\omega} \leqq fL \cdot r$$

gibt die Bedingung dafür, daß kein Schlüpfen eintritt.

Betrachten wir noch etwas den Gesamtwiderstand D. Er setzt sich im wesentlichen außer aus dem Luftwiderstand V noch aus der Haftreibung R' zwischen den Laufrädern und den Schienen zusammen:

$$D = V + \Sigma R'.$$

Betrachten wir nun ein Laufrad, so können wir für dieses unsere Gleichungen (1), (2), (3) anschreiben, nur haben wir R mit $-R'$ zu vertauschen (wir rechnen R' nach rückwärts positiv) und $M = 0$ zu setzen. Wir erhalten dann

$$Z' = -\frac{1}{r'}(W' + (T' + m'r'^2)\dot{\omega}),$$

$$R' = \frac{1}{r'}(W' + T'\dot{\omega}),$$

also

$$D = V + \sum \frac{1}{r'}(W' + T'\dot{\omega}). \tag{III}$$

V ist dabei der Luftwiderstand des Zuges, W' das gesamte Widerstandsmoment, das auf ein Laufrad wirkt (hauptsächlich Zapfenreibung, dann noch die später zu besprechende Rollreibung, siehe Nr. 242), $\dot{\omega}$ ist also eigentlich aus (I) und (III) zu berechnen, doch wird man meist die Glieder $T'\dot{\omega}$ als relativ klein fortlassen dürfen, ebenso wie die Glieder T gegen $(m'' + \Sigma m)r^2$, wo $m'' + \Sigma m$ die ganze Masse des Zuges ist.

Ohne Vernachlässigung ergibt sich als Schlußformel für die Beschleunigung w aus (I) und (III)

$$w \equiv r\dot{\omega} = r\,\frac{\Sigma M - \Sigma W - r\Gamma - \frac{r}{r'}\Sigma W'}{m'' + \Sigma m\, r^2 - \Sigma T + \frac{r}{r'}\,\Sigma T'} \tag{IV}$$

(M treibende Momente, W Widerstandsmomente an den Triebrädern, W' an den Laufrädern, r, r' deren Radien, T, T' deren Trägheitsmomente, $m'' + \Sigma m$ die Gesamtmasse des Zuges, Γ der Luftwiderstand).

Man erkennt übrigens an der Formel (III), bzw. (IV), daß die hemmende Wirkung der Widerstandsmomente W' um so kleiner wird, je größer r' ist. ***Darum bieten große Laufräder so erheblich weniger Widerstand als kleine.***

238. Ein Rotationskörper rolle eine schiefe Ebene herab, unter Mitwirkung der Reibung.

Es sind drei Fälle denkbar: 1. es findet reines Rollen statt ohne Gleiten, 2. der Berührungspunkt hat eine Geschwindigkeit abwärts, 3. er hat eine Geschwindigkeit aufwärts.

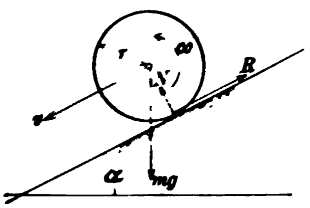


Fig. 200.

Hat der Mittelpunkt, der zugleich Schwerpunkt sei, parallel zur schiefen Ebene die Geschwindigkeit v, während die Winkelgeschwindigkeit ω sei, so sind die drei Fälle durch $v - r\omega = 0$, $v - r\omega > 0$, $v - r\omega < 0$ charakterisiert.

Wir werden nun die Aufgabe so behandeln, daß wir die drei Fälle der Reihe nach behandeln und zusehen, wann sie möglich sind; am Schlusse wird sich dann zeigen, daß sich die Fälle bei Zugrundelegung der Coulombschen Reibungsgesetze gegenseitig so begrenzen, daß immer ein ganz bestimmter Zustand allein eintritt.

1. Reines Rollen:

$$v - r\omega = 0.$$

Die Reibung ist Haftreibung. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$m r\dot{\omega} = m g \sin\alpha - R,$$

$$T\dot{\omega} = r R,$$

$$0 = m g \cos\alpha - N.$$

Daraus berechnen sich die Unbekannten R, $\dot{\omega}$, N als

$$N = m g \cos\alpha,$$

$$\dot{\omega} = g \sin\alpha \, \frac{m r}{T + m r^2} \quad (\text{also } w = r\dot{\omega} < g \sin\alpha\,!)$$

$$R = m g \sin\alpha \, \frac{T}{T + m r^2},$$

Die Bedingung

$$|R| < f \cdot N$$

ergibt

$$\operatorname{tg}\alpha < f \cdot \frac{\sigma^2 + r^2}{\sigma^2}, \tag{I}$$

wenn σ den Trägheitsradius des Körpers um die Schwerachse bedeutet.

Nur wenn die Bedingung (I) erfüllt ist, kann das reine Rollen bestehen bleiben.

2. $$v - r\omega > 0,$$

dann ist $R = fN = fmg\cos\alpha$ und nach oben gerichtet. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$m\frac{dv}{dt} = mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha,$$

$$T\frac{d\omega}{dt} = rR = rmg\cos\alpha f,$$

also

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\alpha - fg\cos\alpha,$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{rmg\cos\alpha f}{T}.$$

Um zu untersuchen, ob der vorausgesetzte Zustand andauert, untersuchen wir die Änderung von $v - r\omega$, dieselbe ist

$$\frac{d}{dt}(v - r\omega) = \frac{dv}{dt} - r\frac{d\omega}{dt},$$

was nach obigem gleich ist

$$g\sin\alpha - fg\cos\alpha\frac{T + mr^2}{T}.$$

Je nachdem dieser konstante Ausdruck positiv oder negativ ist, wird der Zustand erhalten bleiben (denn das positive $v - r\omega$ wächst noch weiter) oder nicht, denn eine konstante abnehmende Größe wird endlich einmal Null.

Die in Frage kommende Ungleichheit ist aber die umgekehrte wie (I).

Ist (I) erfüllt, so wird das Abwärtsgleiten aufhören müssen, sonst dagegen sich verstärkt fortsetzen.

3. $$v - r\omega < 0.$$

An der vorhergehenden Betrachtung ändert sich nur das Vorzeichen von R (bzw. f). Also erhalten wir

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\alpha + fg\cos\alpha,$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{rmg\cos\alpha f}{T}$$

und daraus

$$\frac{d}{dt}(v - r\omega) = g\sin\alpha + fg\cos\alpha\frac{T + mr^2}{T} > 0.$$

Also muß dieser Zustand sicher einmal aufhören, $v - r\omega$ muß Null oder positiv werden.

Nun ist eine volle Diskussion möglich: Daß der Berührungspunkt aufwärts gleitet, ist auf die Dauer unmöglich: das Gleiten vermindert sich, bis reines Rollen eintritt. Ist dieses eingetreten, oder war dies von Anfang an der Fall, so kann es bestehen bleiben, wenn (I) erfüllt ist, und es bleibt auch bestehen, da gerade in diesem Falle ein Abwärtsgleiten auf die Dauer unmöglich ist. Ist dagegen das Gegenteil von (I) erfüllt, so wird in allen Fällen schließlich ein Abwärtsgleiten des Berührungspunktes eintreten müssen.

239. Aufgaben: 113. Eine Walze auf horizontalem Boden werde durch eine horizontale Kraft H im Abstande h vom Boden ins Rollen gebracht. Wie groß muß h sein, damit reines Rollen eintritt, auch wenn keine Reibung wirkt? In welchem Intervall darf h liegen, wenn Reibung wirkt, aber wiederum reines Rollen einsetzen soll?

114. Ein Stab, auf einen horizontalen glatten Boden und an eine vertikale glatte Wand gestützt, gleite herab. Wie fällt der Stab unter Wirkung der Schwerkraft herab? d. h. man stelle die Differentialgleichung der Bewegung für den Winkel ϑ des Stabes gegen den Boden auf. Wie ändert sich diese Gleichung, wenn man Reibung berücksichtigt?

Anleitung: Man stelle Schwerpunkts- und Momentensatz auf, in denen an Unbekannten die Normaldrucke, ϑ und die Koordinaten x, y des Schwerpunktes vorkommen. Letztere kann man durch ϑ und konstante, als gegeben zu betrachtende Größen ausdrücken. Indem man dann die Normaldrucke eliminiert, erhält man die eine gesuchte Gleichung für ϑ.

115. Ein Stab stütze sich mit dem einen Ende auf einen glatten Boden und werde dann losgelassen. Wie fällt er herab? Wie ändert sich das Resultat, wenn Reibung hinzutritt? Kann dann das eine Ende festbleiben?

116. Eine Platte sei um eine horizontale Achse drehbar. Zu Anfang werde die Platte horizontal gehalten und im Abstande a von der Achse ein Gewicht G' aufgesetzt. Dann werde das System losgelassen. Es kann nun sein, daß sich schon gleich zu Anfang der Bewegung das aufgesetzte Gewicht abhebt. Wann wird das eintreten? (Trägheitsmoment, Gewicht und Schwerpunktsabstand der Platte seien gegeben.) Wenn aber das Gewicht auf der Platte bleibt, so wird es anfangs durch die Reibung am Gleiten gehindert werden. Für welchen Winkel wird das Gewicht anfangen, herabzugleiten?

Anleitung: Die erste Frage kann man in doppelter Weise lösen: Entweder geht man davon aus, das Gewicht bleibe auf der Platte und behandelt dann Platte und Zusatzgewicht getrennt, jedes für sich, unter Einführung des Normaldrucks N, der positiv sein muß, wenn das Gewicht sich nicht abheben soll (NB. man kann auch das Zusatzgewicht für sich nehmen und dann für Platte und Gewicht zusammen den Momentensatz anwenden), oder man geht davon aus, daß sich beide trennen und daß dann die freie Beschleunigung g des Zusatzgewichtes kleiner sein muß als die vertikale Beschleunigung des Punktes der Platte, wo G' aufsitzt. Beide Annahmen müssen sich natürlich im Resultat ausschließen. (Man wird in beiden Fällen eine Ungleichung für a erhalten.)

Um die zweite Frage zu beantworten, nimmt man am besten Platte und Gewicht als einen Körper zusammen, bestimmt nach dem Momentensatze die gemeinsame Bewegung, berechnet dann nach dem Schwerpunktssatze für den Zusatzkörper G' allein die erforderlichen N und R und sieht zu, wie lange $R < fN$ erfüllt ist.

Man kann dann auch, nachdem Gleiten eingetreten ist, noch sehr leicht die weitere Bewegung des Systems verfolgen.

240. Wahl eines anderen Bezugspunktes. Oft kann es vorteilhafter sein, statt des Schwerpunktes einen anderen Bezugspunkt zu wählen. Der Momentensatz in der ursprünglichen Form, wonach in bezug auf jede Achse das Moment der Massenbeschleunigungen gleich dem Moment der äußeren Kräfte ist, bleibt natürlich bestehen.

Nun war aber ferner nach Nr. 114 das Moment irgend welcher Vektoren in bezug auf einen Punkt O' gleich dem Moment in bezug auf O vermehrt um das Moment eines in O angreifenden Vektors, der gleich der Summe der betrachteten Vektoren ist. Diesen Satz wenden wir auf das Moment der Massenbeschleunigung an. In unserem Falle sind die betrachteten Vektoren die $dm\bar{w}$, ihre Summe ist $S\, dm\bar{w} = m\bar{w}^*$.

Bei ebener Bewegung können wir nun O und O' in der Schwerpunktsebene annehmen und erhalten somit, daß das Moment der Massenbeschleunigungen in bezug auf die Drehachse durch O' gleich ist

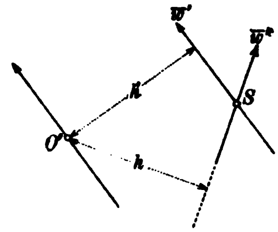


Fig. 201.

$$T_s\dot{\omega} \pm mh|\bar{w}^*|,$$

wo sich T_s auf die Achse durch den Schwerpunkt bezieht, h der Hebelarm des im Schwerpunkt angreifend zu denkenden Beschleunigungsvektors $\bar{w}^*$ des Schwerpunktes ist und das Zeichen $\pm$ zu nehmen ist, je nachdem $\bar{w}^*$ links oder rechts herum bezüglich O' zeigt.

Also lautet die Momentengleichung für die ebene Bewegung bezüglich irgendeines Punktes O'

$$T_s\dot{\omega} \pm mh\,|\bar{w}^*| = M', \tag{I}$$

wo M' das Moment der äußeren Kräfte in bezug auf die Achse durch O' bedeutet.

Habe nun O' selber die Beschleunigung $\bar{w}'$, so ist nach Nr. 233

$$\bar{w}^* = \bar{w}' + \dot{\omega}\,\overline{\overline{(r^* - r')}} - \omega^2\overline{(r^* - r')}.$$

Statt des Momentes von $\bar{w}^*$ können wir auch die Momente eines jeden der drei Bestandteile bilden. Um das Moment des ersteren zu bilden, hat man $\bar{w}'$ nach S zu bringen und dann das Moment bezüglich O' zu bilden: $\pm mh'|\bar{w}'|$.

$\dot{\omega}\,\overline{\overline{(r^* - r')}}$ hat das Moment $s^2\dot{\omega}$, wenn s die Länge des Vektors $\overline{O'S} = \overline{r^* - r'}$ ist,

$-\omega^2\overline{(r^* - r')}$ dagegen hat kein Moment, da dieser Vektor durch O' hindurchgeht.

Nun ist aber $T_s + ms^2 = T'$, wo T' das Trägheitsmoment bezüglich der Achse durch O' ist (siehe Nr. 196) und *somit nimmt der Momentensatz bezüglich O' auch die Form an:*

$$T'\dot{\omega} \pm mh'|\bar{w}'| = M'. \tag{II}$$

Ist O' ein dauernd fester Punkt, so ist $\bar{w}' = 0$ und wir erhalten die alte Formel für die *Drehung um eine feste Achse*

$$T'\dot{\omega} = M'.$$

Ist aber O' nur vorübergehend in Ruhe, d. h. Momentanzentrum, so war

$$\bar{w}' = -\omega \bar{\dot{r}}_0 ,$$

wo $\bar{\dot{r}}_0$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Momentanzentrums war und der Größe nach gleich

$$\omega \frac{r\varrho}{r-\varrho}$$

war (siehe Nr. 234).

Demnach ist in bezug auf das Momentanzentrum

$$T'\dot{\omega} \pm h' m \omega^2 \frac{r\varrho}{r-\varrho} = M'$$

die Momentengleichung (siehe Fig. 202).

Ist die Spurkurve beispielshalber eine Gerade, so ist $\varrho = \infty$ und die Gleichung lautet

$$T'\dot{\omega} \pm h' m \omega^2 r = M'.$$

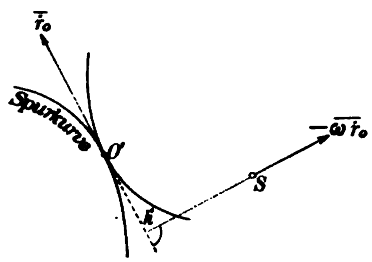


Fig. 202.

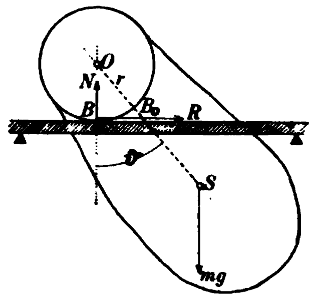


Fig. 203.

241. Das Rollpendel ist ein Körper, der mit einem zylinderförmigen Teil auf einer festen horizontalen Unterlage rollt, ohne zu gleiten, aber exzentrisch ist und so unter Wirkung der Schwerkraft Schwingungen ausführt, wenn er aus der Gleichgewichtslage gebracht wird.

Vom Luftwiderstand sehen wir ab, sodaß wir an Kräften das Gewicht mg, Normaldruck und Reibung haben. Letztere beide sind unbekannte Reaktionskräfte. Damit wir nun gleich eine reine Bewegungsgleichung bekommen, in welcher die Unbekannten N und R nicht vorkommen, empfiehlt es sich, das Momentanzentrum B zum Bezugspunkt zu machen.

Ist s die Entfernung des Schwerpunktes S vom Mittelpunkte der als Kreiszylinder gedachten Walze und ϑ der momentane Ausschlagwinkel, so ist (bei positivem $\omega = \dot{\vartheta}$) $\bar{\dot{r}}$ nach links $-\overline{\omega \dot{r}_0}$ nach oben gerichtet und gleich $\omega^2 r$, wenn r den Radius des Zylinders bedeutet. Das bleibt auch bei negativem ω. Ferner ist $h' = s \sin\vartheta$.

Und also erhalten wir als Bewegungsgleichung nach der Schlußgleichung der vorigen Nummer

$$T_B \dot{\omega} + s \cdot \sin\vartheta \cdot m\omega^2 r = -mgs \cdot \sin\vartheta .$$

Dabei ist T_B veränderlich, nämlich gleich

$$\begin{aligned} T_B &= T_s + BS^2 m \\ &= T_s + (r^2 + s^2 - 2rs\cos\vartheta)m . \end{aligned}$$

Wenn wir nun aber die Schwingungen als sehr klein voraussetzen, und bei Gliedern erster Ordnung stehen bleiben, so dürfen wir 1 statt $\cos\vartheta$ setzen und das Glied mit $\sin\vartheta\cdot\omega^2$ als von dritter Ordnung ganz weglassen. Es bleibt also, da

$$T_s + (r^2 + s^2 - 2rs)m = T_s + (r-s)^2 m = T_{B_0}$$

ist (B_0 Berührungspunkt in der Ruhelage),

$$T_{B_0}\dot{\omega} = -mgs\cdot\vartheta.$$

Das ist die gewöhnliche Pendelgleichung, nur daß sich s und T_{B_0} auf zwei verschiedene Achsen beziehen. Die Dauer einer vollen Schwingung ist also

$$\tau_0 = 2\pi\sqrt{\frac{T_{B_0}}{mgs}}.$$

(vgl. Nr. 195).

Auch für das Schneidenpendel hat die Theorie des Rollpendels Bedeutung, insofern als sich auch ein Schneidenpendel streng genommen nicht um eine feste Achse dreht, sondern sich mit einer Fläche aufstützt. Für kleine Schwingungen wird man diese Fläche angenähert durch eine Kreiszylinderfläche ersetzen können. (Für eine feine Theorie der Wage ist dies nicht ohne Belang: siehe W. Felgentraeger, Abhandl. der Normaleichungskommission 4 (1903), p. 157. Das einschlägige Buch desselben Verfassers nannten wir schon in Nr. 142, ebenso den Encyklopädieartikel IV, 7 von Furtwängler, Mechanik physikalischer Apparate).

Aufgabe 117: Man behandele das Rollpendel nach der Methode von Nr. 286 ff.

Umgekehrt behandle man die Aufgaben 113, 114 aus Nr. 239 nach der Methode von Nr. 240.

242. Über die Rollreibung. Lassen wir ein kreisförmiges, zentriertes Rad auf horizontaler Bahn laufen, so würden die bisher besprochenen Kräfte, welche von der Unterlage auf das Rad ausgeübt werden, nämlich Normaldruck und Haftreibung, ergeben, daß das Rad unaufhörlich weiterrollte. Denn in bezug auf den Berührungspunkt hätte keine Kraft, weder N noch R noch G, ein Moment, auch h' (siehe Nr. 240) wäre Null und es folgte

$$T\dot{\omega} = 0,$$

$$\omega = \text{const.}$$

Die Erfahrung aber lehrt, daß das Rad zur Ruhe kommt und der Luftwiderstand ist zu gering, um die Erscheinung völlig zu erklären.

Es muß also noch ein Widerstandsmoment da sein, das von der Unterlage ausgeht, und wir wollen versuchen, uns das Auftreten desselben aus dem Umstande klarzumachen, daß Rad und Unterlage in Wahrheit keine starren Körper, sondern deformierbar sind. Auf diese Ursache leitet uns die Beobachtung, daß der Widerstand bei weichen, nachgiebigen Körpern wesentlich größer ist als bei festen. (Man vergleiche weichen Boden und harte Stahlschienen).

Beim Rollen wird das Rad eine Abplattung, die Schiene (Unterlage) eine Vertiefung erfahren. Es werden also die Teile der Unterlage vor der tiefsten Berührungsstelle ausgedehnt und mithin nach vorne geschoben, umgekehrt die entsprechenden Teile des Radumfanges komprimiert. Es ist mithin unvermeidlich, daß vorne Rad und Schiene gegeneinander gleiten, wodurch Gleitreibung entsteht, die auf das Rad nach vorne wirkt und also ein bremsendes Moment auf den Mittelpunkt des Rades ausübt.

Osborne Reynolds hat auf diese Weise zuerst die Entstehung des Rollwiderstandes erklärt und die verschiedene Verschiebung von Rad und Unterlage an elastischem Material (Gummi) sichtbar gemacht (Papers I, pag. 110—133). Es ist aber noch ein anderer Grund zur Entstehung eines Widerstandsmomentes vorhanden: Die Berührungsflächenstücke vorne sind im Sinne der Rotation gedreht, infolgedessen muß der Normaldruck vorne vor dem Mittelpunkt des Rades vorbeigehen und somit ebenfalls ein Widerstandsmoment ausüben.

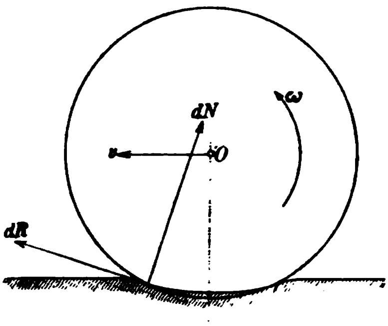


Fig. 204.

Hinter der tiefsten Berührungsstelle wird nun allerdings alles ähnlich sein und wie man leicht einsieht, werden dort die erzeugten Momente einen beschleunigenden Einfluß haben. Aber wegen der unvollkommenen Elastizität des Materials erfolgt die Wiederherstellung des alten Zustandes bei geringeren Druckkräften, also wird die Wirkung hinten schwächer sein als vorne und ein Widerstandsmoment übrig bleiben.

Dieses Moment, bezogen auf den idealen Berührungspunkt des nun wieder als starr angesehenen, rollenden Körpers mit seiner Unterlage, wollen wir schreiben

$$M = N\lambda,$$

wo λ — eine Länge — der Radius oder Hebelarm der Rollreibung heiße. Die Theorie der deformierten Körper ist noch weit entfernt, eine Bestimmung von λ zu liefern, man ist auf Versuche angewiesen.

Leider sind auch diese erst sehr spärlich vorhanden, man rechnet bei Eisenbahnrädern auf Schienen vielfach mit $\lambda = 0{,}5$ mm.

In der Ruhelage ist die Rollreibung selbstverständlich fähig, das Eintreten der Rollbewegung bis zu einem gewissen Grade zu verhindern. Sie hat also dann den Charakter der Haftreibung, sie ist ein Reaktionsmoment, also unbekannt, jedoch kleiner als $N\lambda_0$, wo λ_0 den Radius der Rollreibung in der Ruhe bedeutet.

243. Beispiele. 1. Ein Räderpaar rolle ohne zu gleiten eine schiefe Ebene herab: Da das Gewicht den Hebelarm $r \sin \alpha$ hat, so lautet der Momentensatz in bezug auf den Berührungspunkt B

$$T\dot{\omega} = G r \sin \alpha - N\lambda,$$

wo

$$N = G \cos \alpha .$$

(Das Räderpaar sei zentriert!)

Man sieht, daß gleichförmiges Rollen möglich ist: $\dot{\omega} = 0$, wenn

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda}{r}$$

ist. Man hat so ein Mittel, λ experimentell zu bestimmen.

Auch sieht man wieder, daß große Räder leichter rollen als kleine.

2. Will man die Rollreibung bei dem in Nr. 237 behandelten Eisenbahnzuge mit berücksichtigen, so hat man ihr Moment λN einfach in die Widerstandsmomente W resp. W' mit aufzunehmen.

3. Die Momentengleichung des Rollpendels aus Nr. 241 verändert sich (bei kleiner Schwingung) offenbar in

$$T_{B_0}\dot{\omega} = - mgs \cdot \sin \vartheta \pm N\lambda,$$

wobei $\pm$, je nachdem ω negativ oder positiv ist.

Dabei ist nun N aus dem Schwerpunktssatze zu bestimmen:

$$m\ddot{y}^* = mg - N,$$

wobei $\ddot{y}^*$, die abwärts gerichtete Beschleunigungskomponente des Schwerpunktes, nach Nr. 233

$$- s \cdot \cos \vartheta\, \omega^2 - s\dot{\omega} \sin \vartheta$$

ist. Bei kleinen Schwingungen nun kann man ruhig

$$N = mg$$

setzen, weil $\ddot{y}^*$ klein von zweiter Ordnung ist, außerdem bei den verwendeten Materialien (Stahl, harte Steine) λ sehr klein gegen die sonst vorhandenen Längen sein wird.

Somit lautet die Bewegungsgleichung angenähert

$$T_{B_0}\ddot{\vartheta} = - mgs \cdot \vartheta \pm \lambda mg .$$

Das ist aber genau dieselbe Differentialgleichung, auf die wir in der Aufgabe der Schwingung mit Reibung (siehe Nr. 64) stießen. Die Integration ist also ebenfalls die gleiche.

§ 44. Energiegleichung der ebenen Bewegung.

244. Kinetische Energie und Arbeit bei einem um eine feste Achse rotierenden starren Körper. Allgemein war die kinetische Energie eines Systems definiert durch

$$E = \frac{1}{2} \mathfrak{S}\, dm v^2.$$

Rotiert nun ein starrer Körper um eine feste Achse, so ist

$$v = r\omega$$

und also

$$E = \frac{1}{2} \omega^2 T. \tag{I}$$

Die Arbeit eines Kräftepaares an einem um eine Achse senkrecht zu dessen Ebene rotierenden starren Körper haben wir schon früher einmal berechnet zu (siehe Nr. 149)

$$dA = M d\vartheta, \tag{II}$$

die Leistung also zu

$$L = M\omega. \tag{II'}$$

Differentiieren wir (I) nach der Zeit, so erhalten wir mit Berücksichtigung der Bewegungsgleichung

$$T\dot{\omega} = M,$$

$$\frac{dE}{dt} = \omega\dot{\omega} T = \omega M = L$$

oder nach Integration

$$E - E_0 = \int dA = \int M d\vartheta. \tag{III}$$

wo rechts lediglich die Arbeit der eingeprägten Kräfte steht.

Der Energiesatz lautet also für einen starren Körper, der sich um eine feste Achse dreht:

Die Änderung der kinetischen Energie ist gleich der Arbeit der eingeprägten Kräfte und diese berechnet sich als das Produkt aus dem Moment in bezug auf die Drehachse und dem Drehwinkel.

Haben die eingeprägten Kräfte ein Potential U (siehe Nr. 89), so ist natürlich

$$\int dA = - U + \text{const.}$$

und der Energiesatz lautet

$$\frac{1}{2} T\omega^2 + U = h. \tag{III'}$$

Den allgemeinen Energiesatz der ebenen Bewegung werden wir sogleich in der nächsten Nummer kennen lernen. Man beachte hier bereits die Analogie von

ω, T, M, E und L bei der Drehbewegung mit

v, m, k, E und L bei der Translation.

Aufgabe 118: Welche Arbeit ist erforderlich, um eine Walze von 2 m Länge, 1 m Durchmesser und dem spezifischen Gewicht 8 in eine solche Rotation zu versetzen, daß sie 100 Touren pro Minute macht?

Für eine solche Walze ist $T = \frac{1}{2}\mu l r^4 \pi$ (siehe Nr. 256).

Beispiel: Betrachten wir noch einmal das physikalische Pendel (siehe Nr. 195). Die Schwerkraft hat ein Potential, dasselbe ist gleich Gewicht mal Höhe oder gleich

$$U = -mgs \cdot \cos\vartheta.$$

Also lautet der Energiesatz in diesem Falle

$$E + U = h$$

oder

$$\frac{1}{2} T \dot{\vartheta}^2 - mgs \cos\vartheta = h.$$

Ein Vergleich dieser Formel mit der des mathematischen Pendels (siehe Nr. 90) zeigt wieder die formale Identität beider, man braucht nur wieder

$$l = \frac{T}{ms}$$

zu setzen.

245. Energiegleichung für die allgemeine ebene Bewegung. Man kann auch leicht auf elementarem Wege die kinetische Energie eines starren Körpers bei allgemeiner ebener Bewegung ausrechnen.

Sei M das Momentanzentrum, s die Entfernung des Schwerpunktes von M, so ist die kinetische Energie, weil die Bewegung eine bloße Drehung um M ist

$$E = \frac{1}{2} T_M \omega^2.$$

Nun war aber (siehe Nr. 196)

$$T_M = T_S + ms^2,$$

wo sich T_S auf den Schwerpunkt bezieht; und da $v^* = s\omega$ die Geschwindigkeit des Schwerpunktes ist, so wird

$$E = \frac{1}{2} T_S \omega^2 + \frac{1}{2} m v^{*2}.$$

Wählt man den Schwerpunkt zum Translationspunkt, so ist die gesamte kinetische Energie gleich der Summe aus der Energie der Translationsbewegung und der Energie der Rotationsbewegung.

Für einen anderen Translationspunkt ist dieser Satz aber nicht immer richtig (siehe Nr. 270).

Dagegen gilt ein analoger Satz für die Arbeit bzw. Leistung immer.

Es ist die Arbeit der Kräfte

$$dA = \mathfrak{S}\, d\bar{k} \cdot d\bar{r}.$$

Nun war aber nach der Eulerschen Formel

$$d\bar{r} = d\bar{c} + \bar{d\vartheta}(r - c)$$

also ist

$$dA = d\bar{c} \cdot \mathfrak{S}\, d\bar{k} + \mathfrak{S}\, d\bar{k} \cdot \bar{d\vartheta}(r - c)$$

oder wegen

$$\mathfrak{S}\, d\bar{k} = \bar{K} \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}(r - c)\, dk = \bar{M}$$

und wegen der Vertauschungsformel (siehe Anhang I 6)

$$dA = \bar{K} \cdot d\bar{c} + \bar{M} \cdot d\bar{\vartheta}.$$

Die gesamte Arbeit ist also immer gleich der Summe aus der Arbeit der resultierenden Kraft und aus derjenigen des resultierenden Kräftepaares. Erstere ist das innere Produkt aus der resultierenden Kraft und der (unendlich kleinen) Translationsstrecke, letztere das innere Produkt aus dem Moment und dem (unendlich kleinen) Drehwinkel. Als Bezugspunkt für den Momentenvektor ist dabei der Translationspunkt zu nehmen.

Haben wir ein ebenes Problem der Art, daß auch die Kräfte sich auf solche in der Schwerpunktsebene reduzieren lassen, so steht $\bar{M}$ auf der Ebene senkrecht und es ist $\bar{M} \cdot d\bar{\vartheta} = M d\vartheta$, wobei M und ϑ im selben Sinne zu zählen sind. Nehmen wir noch den Schwerpunkt als Translationspunkt, so ist dann

$$dA = \bar{K} \cdot d\bar{r}^* + M d\vartheta$$

und die Leistung

$$L = \bar{K} \cdot \bar{v}^* + M\omega.$$

Differentiieren wir nun die Formel für E nach der Zeit, so erhalten wir

$$\frac{dE}{dt} = T_S \omega \dot{\omega} + m \bar{v}^* \cdot \bar{w}^*$$

oder wegen der Bewegungsgleichungen:

$$T_S \dot{\omega} = M \quad \text{und} \quad m \bar{w}^* = \bar{K},$$

$$\frac{dE}{dt} = M\omega + \bar{K} \cdot \bar{v}^* = L = \frac{dA}{dt}.$$

Integrieren wir, so bekommen wir den Energiesatz für die ebene Bewegung des starren Körpers:

$$E - E_0 = A:$$

Die Änderung der kinetischen Energie in einer gewissen Zeit ist gleich der während dieser Zeit von den äußeren Kräften geleisteten Arbeit.

246. Anwendungen des Energiesatzes. 1. Auf das Rollpendel ohne Widerstände. (Vgl. Nr. 241.) Der Schwerpunkt hat die Geschwindigkeitskomponenten

$$\begin{array}{ll} -a\omega + s\omega\cos\vartheta & \text{horizontal} \\ s\omega\sin\vartheta & \text{vertikal.} \end{array}$$

Folglich ist die kinetische Energie

$$E = \frac{1}{2} m[(-a + s\cos\vartheta)^2 + s^2\sin^2\vartheta]\,\omega^2 + \frac{1}{2} T_S\omega^2,$$

$$= \frac{1}{2}\,\omega^2 T_B \quad (B \text{ der augenblickliche Berührungspunkt}),$$

da

$$T_B = T_S + m\cdot BS^2 = T_S + m(a^2 + s^2 - 2as\cos\vartheta).$$

Man hätte das Resultat natürlich auch sofort hinschreiben können, da ja B Momentanzentrum ist. Von den äußeren Kräften hat die Schwerkraft ein Potential: dasselbe ist wie stets

$$mgz^* = -mgs\cdot\cos\vartheta,$$

da $z^* = -s\cos\vartheta$, die Höhe des Schwerpunktes über der festen Horizontalen durch die Rollenmitte ist.

Haftreibung und Normaldruck leisten keine Arbeit, da ihr Angriffspunkt keine Geschwindigkeit hat. Von Rollreibung und Luftwiderstand sehen wir ab. Also lautet der Energiesatz

$$\frac{1}{2}\,\omega^2 T_B - mgs\cdot\cos\vartheta = h, \tag{1}$$

daraus folgt durch Auflösung nach $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$ und Trennung der Variablen

$$t = \int_0^\vartheta \sqrt{\frac{\frac{1}{2}T_B}{h + mgs\cdot\cos\vartheta}}\,d\vartheta,$$

wenn wir $t = 0$ für $\vartheta = 0$ festsetzen. Dabei ist zu beachten, daß nach Obigem T_B eine Funktion von ϑ ist.

Das Problem läßt sich also auf eine Quadratur zurückführen.

Die frühere Annäherung bei kleinen Schwingungen läßt sich jetzt auf folgende Weise erreichen: Sind ω und ϑ klein erster Ordnung, so ist nach Gleichung (1) $h \doteq -mgs\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2\right)$, wo α den kleinen maximalen Ausschlagwinkel bedeutet.

Indem wir nun in dem Integral für t im Nenner unendlich kleine Größen erster Ordnung beibehalten — der ganze Nenner wird von selbst unendlich klein erster Ordnung — im Zähler dagegen Größen zweiter Ordnung gegen das endliche T_{B_0} vernachlässigen, vereinfacht sich das Integral für t zu

$$t = \sqrt{\frac{T_{B_0}}{mgs}} \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}} = \sqrt{\frac{T_{B_0}}{mgs}} \cdot \arcsin \frac{\vartheta}{\alpha} \,.$$

Woraus man erschließt:

$$\vartheta = \alpha \sin\left(\sqrt{\frac{mgs}{T_{B_0}}} \cdot t\right),$$

das frühere Resultat bei Voraussetzung kleiner Schwingungen.

2. Auf die Dampfmaschine. Die ursprüngliche, elementare Theorie derselben sieht das Gestänge als masselos an, so daß nur dem Schwungrad eine nennenswerte kinetische Energie zukommt. Da das Schwungrad zentriert ist, können wir auch in erster Linie von der Gewichtswirkung absehen und es bleiben als äußere Kräfte der Dampfdruck, der als Tangentialdruck

$$T = P \frac{\sin(\vartheta + \eta)}{\cos \eta}$$

auf den Kurbelkreis übertragen wird (siehe Nr. 155)[1]) und das Widerstandsmoment W der Arbeitsmaschine. Von Reibung und Luftwiderstand wollen wir absehen. Die Lagerdrucke der Welle leisten keine Arbeit, weil sie senkrecht zur Lagerfläche, also auch senkrecht auf der Bewegung ihrer Angriffspunkte stehen und somit lautet der Energiesatz für das Schwungrad

$$\frac{1}{2} T \omega^2 = \int r T d\vartheta - \int W d\vartheta + h \,.$$

Kennen wir aus Diagrammen T und W als Funktionen des Kolbenweges x und damit auch als Funktionen von ϑ, so können wir

$$U = -\int_0^{\vartheta} r T d\vartheta + \int_0^{\vartheta} W d\vartheta$$

berechnen und erhalten

$$\frac{1}{2} T \omega^2 = - U(\vartheta) + h \,,$$

1) Wir dürfen diese statische Überlegung hier anwenden, weil eben das Gestänge keine Masse hat. Die Bewegung eines masselosen Systems zu untersuchen, ist immer eine rein statische Aufgabe, da alle mechanischen Gleichungen für $m = 0$ in statische übergehen.

woraus sich ergibt

$$\omega = \sqrt{\frac{2h - 2U(\vartheta)}{T}},$$

$$t = \int_0^{\vartheta} d\vartheta \sqrt{\frac{T}{2h - 2U(\vartheta)}}.$$

Damit ist auch diese Aufgabe auf Quadraturen zurückgeführt.

Weiteres über das Problem der Schwungradberechnung und die Bestimmung von h siehe Nr. 321.

Aufgabe 118: Man führe in ähnlicher Weise, wie es beim Rollpendel geschehen ist, die Bestimmung der Fallbewegung eines an eine glatte vertikale Wand und auf einen glatten horizontalen Boden sich aufstützenden Stabes auf Quadraturen zurück. Man beachte, daß die Normaldrucke an den beiden Stützstellen keine Arbeit leisten. Warum?

Kapitel X.

Räumliche Bewegung des starren Körpers.

§ 45. Massengeometrie des starren Körpers.

247. Trägheits- und Deviationsmomente. Beide haben wir bereits früher definiert (siehe Nr. 194 und 198).

Unter dem Trägheitsmoment eines Körpers in bezug auf eine Achse verstanden wir

$$T = \mathrm{S}\, dm r^2,$$

wo r die Abstände der Massenelemente dm von der Achse bedeuten.

Setzen wir

$$T = m\sigma^2,$$

wo m die Gesamtmasse bedeutet, so ist der Dimension wegen σ eine Strecke, die wir den Trägheitsradius nennen.

Wir kennen auch bereits den Satz über parallele Achsen: Sind g und g' zwei Geraden, von denen g durch den Schwerpunkt geht, T und T' die bezüglichen Trägheitsmomente, so ist

$$T' = T + ma^2,$$

wenn a den Abstand beider Achsen bedeutet, oder

$$\sigma'^2 = \sigma^2 + a^2.$$

Das Deviationsmoment in bezug auf die beiden rechtwinkligen Achsen x, y aber war

$$D_{x,y} = \mathrm{S}\, dm\, xy.$$

Es ist zu beachten, daß wir durch die drei Trägheitsmomente T_x, T_y, T_z in bezug auf drei orthogonale Achsen x, y, z und die drei **Deviations**-momente $D_{x,y}$, $D_{y,z}$, $D_{x,z}$ alle sogenannten Momente zweiter Ordnung in bezug auf diese Achsen ausdrücken können: es **sind** dies die sämtlichen linearen Kombinationen von $\mathfrak{S}\,dm\,x^2$, $\mathfrak{S}\,dm\,y^2$, $\mathfrak{S}\,dm\,z^2$, $\mathfrak{S}\,dm\,xy$, $\mathfrak{S}\,dm\,xz$, $\mathfrak{S}\,dm\,yz$. Die letzten drei sind direkt die Deviationsmomente, die drei ersten lassen sich durch die Trägheitsmomente ausdrücken. Denn da

$$T_x = \mathfrak{S}\,dm(y^2 + z^2)$$

ist — $\sqrt{y^2 + z^2}$ ist ja der Abstand eines Punktes von der x-Achse —, so ist

$$\mathfrak{S}\,dm\,x^2 = \frac{1}{2}(T_y + T_z - T_x)$$

usw. Daraus folgt noch $T_y + T_z > T_x$ usw.

248. Das Trägheitsellipsoid. Wir wollen jetzt zeigen, wie man Trägheits- und Deviationsmomente für alle orthogonalen Achsensysteme eines Körpers durch die entsprechenden sechs Größen für ein einziges Achsensystem linear ausdrücken kann.

Betrachten wir ein zweites Achsensystem $x'y'z'$ mit demselben Anfangspunkte O, so ist bekanntlich

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y' &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ z' &= a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

wo $a_1 \ldots$ die neun Richtungskosinus bedeuten. Folglich ist

$$\begin{aligned} T_{x'} = \mathfrak{S}\,dm(y'^2 + z'^2) &= (a_2^2 + a_3^2)\,\mathfrak{S}\,dm\,x^2 \\ &+ (b_2^2 + b_3^2)\,\mathfrak{S}\,dm\,y^2 + (c_2^2 + c_3^2)\,\mathfrak{S}\,dm\,z^2 \\ &+ 2(a_2 b_2 + a_3 b_3)\,\mathfrak{S}\,dm\,xy + 2(b_2 c_2 + b_3 c_3)\,\mathfrak{S}\,dm\,yz \\ &+ 2(c_2 a_2 + c_3 a_3)\,\mathfrak{S}\,dm\,zx, \end{aligned}$$

oder nach der vorhergehenden Nummer

$$\begin{aligned} T_{x'} = \frac{1}{2}\,& T_x(b_2^2 + b_3^2 + c_2^2 + c_3^2 - a_2^2 - a_3^2) \\ + & \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ + & \;2(a_2 b_2 + a_3 b_3) D_{x,y} + \cdots. \end{aligned}$$

Zieht man nun noch die bekannten Formeln hinzu

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \quad \text{usw.}$$

und

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1 \quad \text{usw.},$$

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1 \quad \text{usw.},$$

so erhält man

$$T_{x'} = a_1^2 T_x + b_1^2 T_y^2 + c_1^2 T_z^2 - 2a_1 b_1 D_{xy} - 2b_1 c_1 D_{yz} - 2c_1 a_1 D_{zx} \qquad \text{(I)}$$

In solcher Weise drückt sich das Trägheitsmoment für die Achse mit den Richtungskosinus a_1, b_1, c_1 durch die Trägheits- und Deviationsmomente für das ursprüngliche Achsensystem aus.

Ganz analoge Formeln gelten natürlich für $T_{y'}$, $T_{z'}$, man braucht nur die Indizes zu vertauschen.

Auch jedes Deviationsmoment in bezug auf die neuen Achsen läßt sich durch die alten ausdrücken:

$$\begin{aligned} D_{x'y'} &= \mathsf{S}\, dm\, x'y' = a_1 a_2 \mathsf{S}\, dm\, x^2 + b_1 b_2 \mathsf{S}\, dm\, y^2 \\ &\quad + c_1 c_2 \mathsf{S}\, dm\, z^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \mathsf{S}\, dm\, xy + \cdots \\ &= \frac{1}{2} T_x(-a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) + \cdots \\ &\quad + (a_1 b_2 + a_2 b_1) D_{xy} + (a_1 c_2 + a_2 c_1) D_{xz} + (c_1 b_2 + b_1 c_2) D_{yz}, \end{aligned}$$

oder, da $b_1 b_2 + c_1 c_2 = -a_1 a_2$ ist usw.

$$\begin{aligned} D_{x'y'} = &- T_x a_1 a_2 - T_y b_1 b_2 - T_z c_1 c_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) D_{xy} \\ &+ (a_1 c_2 + a_2 c_1) D_{xz} + (c_1 b_2 + c_2 b_1) D_{yz}. \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

Die Formeln für $D_{z'y'}$ und $D_{z'x'}$ sind natürlich analog.

Man kann sich von den wichtigen Formeln (I) und (II) leicht eine geometrische Vorstellung machen. Betrachten wir die Fläche zweiten Grades, die in bezug auf das erste Koordinatensystem durch die Gleichung

$$T_x x^2 + T_y y^2 + T_z z^2 - 2D_{xy} xy - 2D_{yz} yz - 2D_{zx} zx = \text{const.} \qquad \text{(III)}$$

gegeben ist.

Transformiert man diese Gleichung auf das neue Koordinatensystem, indem man die Auflösungen von (1)

$$x = a_1 x' + a_2 y' + a_3 z' \quad \text{usw.}$$

einsetzt, so erhält man, wie man sofort einsieht, die Gleichung

$$T_{x'} x'^2 + T_{y'} y'^2 + T_{z'} z'^2 - 2D_{x'y'} x'y' - 2D_{y'z'} y'z' - 2D_{z'x'} z'x' = \text{const.}$$

woraus man sieht, daß die betrachtete Fläche zweiten Grades unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems der Gesamtheit der Trägheits- und Deviationsmomente an der betreffenden Stelle zugeordnet ist, d. h.: Stellt man die analoge Gleichung für ein anderes Koordinatensystem auf, so bekommt man dieselbe Fläche zweiten Grades.

Die Formeln I, II sind auch aus der analytischen Geometrie als die Transformationsformeln der Flächen zweiten Grades bekannt.

Jedem Punkte des Körpers gehört eine bestimmte Mittelpunktsfläche zweiten Grades zu, deren sechs Konstante die drei Trägheitsmomente und die drei (negativen) Deviationsmomente sind (Gleichung (III)).

Man nennt diese Fläche, die, wie wir sehen werden, ein Ellipsoid ist, das Poinsotsche Trägheitsellipsoid.

Indem wir die Konstante der rechten Seite noch frei lassen, behalten wir die Möglichkeit, unter allen ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoiden eines auszuwählen.

249. Die Bedeutung des Trägheitsellipsoides ist leicht zu erkennen: Tragen wir auf jedem Strahl durch den betrachteten Punkt eine Strecke r auf, welche dem Trägheitsradius des Strahls umgekehrt proportional ist, d. h. setzen wir

$$r = \frac{\lambda^2}{\sigma},$$

wo λ irgend eine feste Strecke ist, welche den Maßstab bestimmt, so hat der so bestimmte Punkt die Koordinaten

$$x = \frac{\lambda^2}{\sigma} a_1; \quad y = \frac{\lambda^2}{\sigma} b_1; \quad z = \frac{\lambda^2}{\sigma} c_1, \tag{1}$$

wenn a_1, b_1, c_1 die Richtungskosinus der Strahls sind.

Machen wir nun die herausgegriffene Achse zur x'-Achse eines neuen Koordinatensystems, so besteht Gleichung (I) der vorigen Nummer, die sich aber mit

$$T_{x'} = m\sigma^2$$

und der obigen Substitution (1) so schreiben läßt

$$x^2 T_x + y^2 T_y + z^2 T_z - 2xyD_{xy} - 2yzD_{yz} - 2zxD_{zx} = \lambda^4 m = \text{const.}$$

Das ist aber genau die Gleichung (III) des Trägheitsellipsoides und wir haben den Satz:

Trägt man auf den Achsen durch einen Punkt in einem beliebigen Maßstabe den reziproken Wert des entsprechenden Trägheitsradius auf, so erfüllen die so erhaltenen Punkte die Oberfläche des Poinsotschen Trägheitsellipsoids.

Daß die Fläche ein Ellipsoid ist, erkennt man daraus, daß σ nie null, r also nie ∞ wird.

Jedes Ellipsoid hat bekanntlich drei Hauptachsen, die zueinander orthogonal sind und für welche seine Gleichung lautet

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = \text{const.}$$

Für die Hauptachsen verschwinden also die Deviationsmomente, jeder Körper hat durch jeden Punkt drei solche Hauptachsen.

Die Trägheitsmomente A, B, C um diese Achsen heißen die Hauptträgheitsmomente.

Daß Symmetrieachsen des Körpers Hauptachsen sind, wurde schon früher gezeigt (siehe Nr. 218, dort auch die Bedeutung der Hauptachsen als freie Achsen).

250. Die Trägheitsdyade. Leiten wir aus der Funktion

$$2F(\bar{r}) \equiv T_x x^2 + T_y y^2 + T_z z^2 - 2D_{xy}xy - 2D_{yz}yz - 2D_{zx}zx$$

den Vektor

$$\bar{J} = \frac{d}{d\bar{r}} F(\bar{r})$$

ab, d. h. den Vektor mit den Komponenten

$$\left.\begin{aligned} J_x &= \frac{\partial F}{\partial x} = \phantom{-D_{xy}y +}\ T_x x - D_{xy} y - D_{xz} z \\ J_y &= \frac{\partial F}{\partial y} = - D_{xy} y + \ T_y y - D_{yz} z \\ J_z &= \frac{\partial F}{\partial z} = - D_{zx} x - D_{yz} y + \ T_z z \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

so steht dieser Vektor bekanntlich auf der Fläche $F(\bar{r}) = \text{const.}$, d. h. auf dem Trägheitsellipsoid im Punkte x, y, z senkrecht (vgl. Nr. 88, auch Anhang II und IV).

Durch die Formeln (1) wird also jedem Vektor $\bar{r}$ ein Vektor $\bar{J}$ eindeutig und linear zugeordnet, das Koeffizientenschema wird durch die Trägheitsmomente in der Diagonalen und die negativen Deviationsmomente gebildet. Das Schema ist symmetrisch.

Nach unserer früheren allgemeinen Definition (siehe Nr. 205) haben wir also den Inbegriff von Trägheits- und negativen Deviationsmomenten an einer Stelle als eine Dyade zu bezeichnen: die Trägheitsdyade. Sie ist symmetrisch.

Um die Größe von $\bar{J}$ geometrisch zu finden, beachte man folgendes.

Multipliziert man die Gleichungen (I) der Reihe nach mit x, y, z und addiert sie, so erhält man

$$\bar{J} \cdot \bar{r} = 2F = 2h,$$

wenn h die willkürliche Konstante bedeutet. Betrachtet man andererseits das Lot $i = OJ$ von dem Mittelpunkte O der Fläche $F = h$ auf die Tangentialebene im Ende von $\bar{r}$, so ist

$$i = |\bar{r} \cdot \cos(\bar{r}, \bar{J})),$$

also

$$\bar{J} \cdot \bar{r} = J \cdot i$$

Vergleicht man beide Ausdrücke für $\bar{J} \cdot \bar{r}$, so erhält man

$$J = \frac{2h}{i}.$$

$\bar{J}$ fällt somit dem reziproken Werte und der Richtung nach mit dem Lote zusammen, das man vom Mittelpunkte auf die Tangentialebene des Ellipsoides im Durchstoßpunkte mit $\bar{r}$ fällen kann.

251. Die Spannungsfläche. Man sieht leicht ein, daß man jeder symmetrischen Dyade eine Mittelpunktsfläche zweiten Grades zuordnen kann (siehe Anhang IV).

So nennt man die durch

$$2H(\bar{r}) \equiv X_x x^2 + Y_y y^2 + Z_z z^2 + 2X_y xy + 2Y_z yz + 2Z_x zx = \text{const.}$$

gegebene Fläche die Spannungsfläche (vgl. Nr. 204).

Will man zu einer Richtung $x : y : z$ die Spannung haben, so hat man zu bilden

$$\bar{\sigma}_\nu = \frac{1}{r} \frac{dH}{d\bar{r}},$$

wo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, was ja mit den Formeln (III) aus Nr. 205 übereinstimmt.

Man sieht, daß $\bar{\sigma}$ stets senkrecht auf der Tangentialebene in dem Punkte P der Spannungsfläche steht, der durch den Strahl von der Normalrichtung des Flächenelementes auf der Fläche getroffen wird.

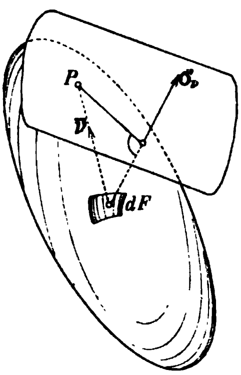


Fig. 205.

Die Spannungsfläche braucht aber kein Ellipsoid zu sein. Da beider Analogie von Trägheitsdyade und Spannungsdyade dem T das X_x, d. h. die Normalkomponente der Spannung entsprach, so ist bei *der Spannungsfläche der Radiusvektor der Wurzel aus der Normalspannung des betreffenden Flächenelementes umgekehrt proportional.* Ist X_x negativ, so ist der betreffende Schnittpunkt P imaginär.

Wendet man die Formel am Schlusse von 250 auf die Spannungsfläche an, so erhält man

$$|\bar{\sigma}_\nu| = \frac{1}{r} J = \frac{2h}{ir}.$$

252. Übergang zu beliebigen orthogonalen Koordinatensystemen. Durch die Formeln von Nr. 248 und den Satz über parallele Achsen können wir leicht die Trägheitsmomente um beliebige Achsen algebraisch berechnen, wenn wir nur die Trägheitsmomente und Deviationsmomente für irgend ein Achsensystem durch irgend einen Punkt kennen. Wir wollen die Resultate nur noch für die Deviationsmomente ergänzen und zwar erübrigt sich der Übergang zu parallelen Achsen.

Habe das neue, dem alten parallele System $O'x'y'z'$ einen Anfangspunkt mit den Koordinaten a, b, c, so ist

$$\begin{aligned} D_{x'y'} &= \mathfrak{S}\, dm\, x'y' = \mathfrak{S}\, dm(x-a)(y-b) \\ &= \mathfrak{S}\, dm\, xy - a\,\mathfrak{S}\, dm\, y - b\,\mathfrak{S}\, dm\, x + ab\,\mathfrak{S}\, dm \\ &= D_{xy} - ay^*m - bx^*m + abm\,. \end{aligned}$$

War der alte Anfangspunkt der Schwerpunkt, so sind x^* und y^* Null und man erhält

$$D_{x'y'} = D_{xy} + ab \cdot m\,.$$

Daraus folgt noch, daß sich bei Verschiebung des Koordinatensystems aus dem Schwerpunkte längs einer Achse die Deviationsmomente nicht ändern, da von den Koordinaten a, b, c wenigstens zwei Null sind.

253. Spezialisierung für die Ebene. Häufig braucht man die Trägheitsmomente von geometrischen Figuren, d. h. von Körpern, für welche die spezifische Masse 1 ist, und zwar besonders von ausgearteten, nämlich ebenen Figuren.

Legen wir bei einer ebenen Figur die z-Achse senkrecht zur Ebene, den Anfangspunkt in die Ebene, so ist $z = 0$ und daher

$$D_{xz} = 0, \quad D_{yz} = 0.$$

Es bleibt also nur noch ein Deviationsmoment D_{xy}, das wir kurz D nennen wollen.

Ferner ist

$$T_x = \mathfrak{S}\, dm\, y^2, \quad T_y = \mathfrak{S}\, dm\, x^2, \quad T_z = \mathfrak{S}\, dm(x^2 + y^2).$$

Daher

$$T_z = T_x + T_y\,.$$

T_z heißt in diesem Falle auch das polare Trägheitsmoment der ebenen Figur.

Aus den Formeln (I) und (II) von Nr. 248 wird, da

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos\alpha\,, & b_1 &= \sin\alpha\,, & c_1 &= 0, \\ a_2 &= -\sin\alpha\,, & b_2 &= \cos\alpha\,, & c_2 &= 0, \\ a_3 &= 0, & b_3 &= 0, & c_3 &= 1, \end{aligned}$$

— α ist der Winkel der x'-Achse gegen die x-Achse —

$$T_{x'} = \cos^2\alpha\, T_x + \sin^2\alpha\, T_y - 2\cos\alpha\sin\alpha\, D, \tag{I'}$$

$$D' = (T_x - T_y)\sin\alpha\cos\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)D. \tag{II'}$$

Das Trägheitsellipsoid hat die Besonderheit, daß eine Hauptachse mit der z-Achse zusammenfällt; nur sein Schnitt mit der xy-Ebene hat Interesse: die sogenannte **Trägheitsellipse**, deren Gleichung lautet

$$T_x x^2 + T_y y^2 - 2Dxy = \text{const.} = \lambda^4 m. \qquad \text{(III)}$$

254. Die Culmannsche Trägheitsellipse. Der Radiusvektor der Trägheitsellipse ist umgekehrt proportional dem zugehörigen Trägheitsradius (siehe Nr. 249). Nun läßt sich aber auch leicht eine Strecke angeben, die dem Trägheitsradius direkt proportional ist.

Ziehen wir nämlich zu der betrachteten Achse die parallelen Tangenten an die Ellipse und betrachten den normalen Abstand h der Tangenten von der Achse, so behaupten wir, daß h dem σ direkt proportional ist.

Zum Beweise betrachten wir das der Ellipse umschriebene Parallelogramm aus den beiden Tangenten und den zu ihnen konjugierten. Der Inhalt dieses Parallelogramms ist $4rh$.

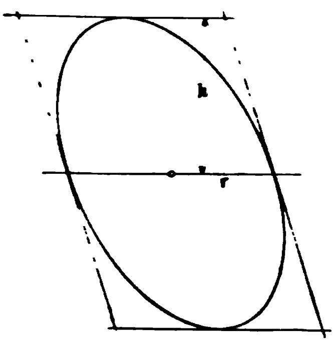


Fig. 206.

Andererseits ist er gleich $4ab$, wenn a, b die halben Hauptachsen sind. Denn alle umschriebenen Parallelogramme aus konjugierten Tangentenpaaren sind einander gleich. Faßt man nämlich die Ellipse als Parallelprojektion eines Kreises auf, so gehen die in Rede stehenden Parallelogramme aus den dem Kreise umschriebenen Quadraten hervor. Diese sind aber untereinander gleich, also sind es auch jene, da sich bei der Parallelprojektion der Inhalt einer Figur mit dem festen Faktor des Kosinus eines Winkels multipliziert.

Es ist also

$$rh = ab,$$

und da

$$r = \frac{\lambda^2}{\sigma}$$

war,

$$h = \sigma \cdot \frac{ab}{\lambda^2},$$

d. h. proportional dem Trägheitsradius, wie behauptet wurde. Seien σ_a, σ_b die Hauptträgheitsradien, so ist

$$\sigma_a = \frac{\lambda^2}{a},$$

$$\sigma_b = \frac{\lambda^2}{b},$$

also

$$ab = \frac{\lambda^4}{\sigma_a \cdot \sigma_b}$$

und

$$h = \sigma \cdot \frac{\lambda^2}{\sigma_a \cdot \sigma_b}.$$

Wählen wir nun den noch willkürlichen Maßstab λ, so daß

$$\lambda^2 = \sigma_a \cdot \sigma_b$$

ist, womit wir freilich von Punkt zu Punkt einen verschiedenen Maßstab einführen, so ist direkt

$$h = \sigma.$$

Die so normierte Trägheitsellipse pflegt man nach Culmann zu benennen. Man kann sie auch so definieren:

Zieht man durch einen Punkt zu jeder Achse im Abstande des zugehörigen Trägheitsradius Parallele, so umhüllen diese die Culmannsche Trägheitsellipse.

Da unter parallelen Achsen der Trägheitsradius für die Achse durch den Schwerpunkt am kleinsten ist (vgl. Nr. 247), so ist auch die Culmannsche Ellipse für den Schwerpunkt am kleinsten, man nennt diese die Zentralellipse.

Alle Culmannschen Ellipsen enthalten den Schwerpunkt im Innern.

Beweis: Zunächst einmal erkennt man leicht, daß jede Ellipse mit der Zentralellipse ein Tangentenpaar gemeinsam hat, nämlich dasjenige, das der Verbindung der beiden Mittelpunkte parallel ist. Das folgt daraus, daß ja ein Trägheitsradius einer Achse zugehört, nicht einem Punkte, es gehört also zur Achse durch die beiden Mittelpunkte ein Trägheitsradius.

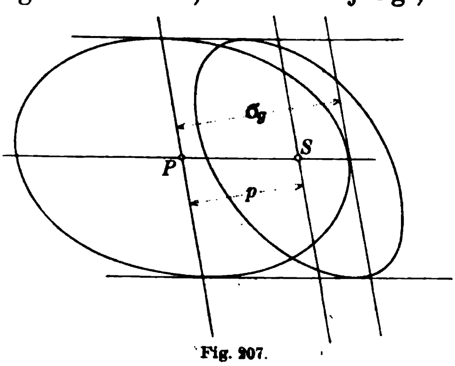


Fig. 207.

Sei S der Schwerpunkt, P ein anderer Punkt. Betrachten wir die zu SP für die Ellipse um P konjugierte Achse g und die zu ihr Parallele g' durch S. Dann ist, wenn p den Abstand von g und g' bedeutet, nach Nr. 247

$$\sigma_g^2 = \sigma_{g'}^2 + p^2,$$

also

$$\sigma_g > p.$$

Das zu g parallele Tangentenpaar an die Ellipse um P schließt also g' ein, und da andererseits die Berührungspunkte auf PS liegen, so liegt S im Innern der Ellipse um P.

255. Die Mohrschen Trägheitskreise. Ist die Zentralellipse nicht schon selbst ein Kreis, so wird beim Fortgang aus dem Schwerpunkt in Richtung der kleinen Achse die Ellipse erstens die alten Achsenrichtungen beibehalten (siehe Nr. 252), zweitens die Länge der großen Achse beibehalten (siehe in der vorigen Nummer die Bemerkung über gemeinsame Tangenten), drittens immer breiter werden (siehe ebenfalls die vorhergehende Nummer). Es muß also Punkte O und O' zu beiden Seiten der Zentralellipse geben, für welche die Ellipse je ein Kreis wird. Diese Kreise benennen wir nach Mohr, der ihre praktische Bedeutung zuerst erkannt hat.

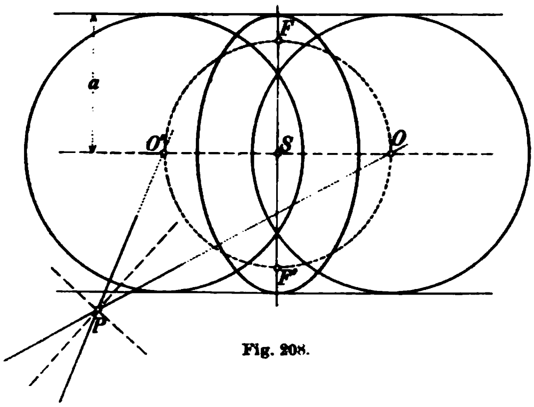


Fig. 208.

Wo liegen ihre Mittelpunkte O und O'?

Ist die Entfernung vom Schwerpunkt S gleich p, so ist einmal nach dem Satz über parallele Achsen der Trägheitsradius um eine zu OS senkrechte Achse $\sqrt{p^2 + b^2}$, wenn b den kleinen Halbmesser der Zentralellipse bedeutet, andererseits gleich a, da ja für S alle Trägheitsradien einander gleich sind (die Ellipse ist ja ein Kreis!) und der Trägheitsradius um OS gleich a, gleich der halben großen Achse der Zentralellipse ist. Also ist

$$\sqrt{p^2 + b^2} = a \quad \text{oder}$$

$$p = \sqrt{a^2 - b^2} = e,$$

d. h. gleich der geometrischen Exzentrizität der Ellipse.

Man erhält also die Mittelpunkte der Mohrschen Kreise, wenn man die Brennpunkte der Zentralellipse um 90° herumdreht. Die Radien der Mohrschen Kreise sind gleich den halben großen Achsen der Zentralellipse.

Mit Hilfe der Mohrschen Kreise kann man nun leicht die folgenden Aufgaben lösen:

1. Für irgendeinen Punkt P die Hauptachsen der zugehörenden Ellipse zu finden.

Lösung: Man halbiere die beiden Winkel, welche die Geraden PO und PO' miteinander einschließen (siehe Fig. 208).

Beweis: Zu PO und PO' gehören die gleichen Trägheitsradien, nämlich a, also liegen PO und PO' für die Ellipse um P symmetrisch zu den Hauptachsen, also halbieren diese die Winkel, welche PO und PO' einschließen.

Sollten O, O' und S zusammenfallen, so sind PS und die Orthogonale Hauptachsen, wie man nach Nr. 252 leicht einsieht.

2. Man finde für irgendeine Gerade g den Trägheitsradius σ.

Analyse: Man ziehe durch S, O, O' zu g die Parallelen g', g_1, g_1'; die bezüglichen Abstände seien p, $p-h$, $p+h$.

Dann ist nach dem Satz über parallele Achsen erstens

$$\sigma^2 = \sigma'^2 + p^2,$$

zweitens

$$a^2 = \sigma'^2 + h^2,$$

denn a ist ja auch der Trägheitsradius für g_1 und g_1'. Also

$$\sigma^2 = a^2 + p^2 - h^2.$$

Danach gibt Mohr folgende Konstruktion:

Man nehme einen Schnittpunkt T von g' mit einem der Mohrschen Kreise, etwa dem um O, und verbinde ihn mit dem Fußpunkt F des Lotes von O auf die gegebene Gerade g. Dann ist $FT = \sigma$ der gesuchte Trägheitsradius (siehe Fig. 209). Denn es ist

$$\begin{aligned} TF^2 &= TH^2 + HF^2, \\ &= TO^2 - OH^2 + HF^2, \\ &= a^2 - h^2 + p^2. \end{aligned}$$

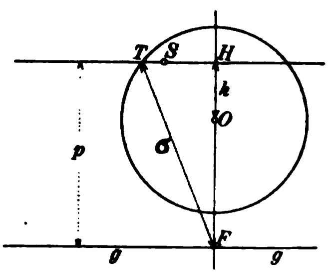


Fig. 209.

3. Man bestimme für irgendein Achsensystem xy durch irgendeinen Punkt P das Deviationsmoment D.

Man ziehe durch S das parallele Koordinatensystem $Sx'y'$. In bezug auf dieses habe P die Koordinaten a, b, O die Koordinaten $a'\,b'$. Dann ist nach Nr. 252

$$D = D' + abm,$$
$$0 = D' + a'b'm,$$

denn für O sind ja alle Derivationsmomente Null. Also ist

$$D = (ab - a'b')m.$$

256. Die Berechnung einiger geometrischer Trägheitsmomente ist eigentlich eine Aufgabe der Integralrechnung und gehört nicht hierher. Nur beispielsweise sollen einige wenige Aufgaben dieser Art behandelt werden. Weitere Formeln findet man in der „Hütte“ und ähnlichen Taschenbüchern.

1. Trägheitsmoment eines Rechtecks um eine Symmetrieachse durch den Schwerpunkt. Man teile das Rechteck in Streifen parallel

der Achse von der Fläche $b\,dx$ und dem Abstande x von der Achse. Dann ist (mit $\mu = 1$)

$$T = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dx \cdot b \cdot x^2 = \frac{1}{12} b l^3$$

und wegen $m = F = bl$

$$\sigma = \frac{l}{\sqrt{12}}.$$

Das polare Trägheitsmoment ergibt sich damit sofort zu

$$T_p = \frac{1}{12} bl(l^2 + b^2) = \frac{1}{12} bl \cdot d^2,$$

$$\sigma_p = \frac{1}{\sqrt{12}} d,$$

wenn d die Diagonale bedeutet.

2. Das polare Trägheitsmoment eines Kreises in bezug auf den Mittelpunkt ergibt sich sofort, wenn man den Kreis in konzentrische Kreisringe vom Radius x und von der Breite dx teilt, zu

$$T_p = \int_0^r 2\pi x\, dx \cdot x^2 = \frac{\pi}{2} r^4,$$

also

$$\sigma_p = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Daraus folgt sofort das Trägheitsmoment um eine Achse in der Ebene durch den Mittelpunkt, da hier $T_x = T_y$ und die Summe beider gleich T_p ist,

$$T_x = T_y = \frac{\pi}{4} r^4,$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{1}{2} r.$$

3. Das Trägheitsmoment einer Ellipse um eine Hauptachse ergibt sich sofort aus der des Kreises, wenn man beachtet, daß man eine Ellipse aus einem Kreise durch Verkürzung paralleler Sehnen im Verhältnisse $\frac{b}{a}$ erhalten kann. Danach ist das Trägheitsmoment um die kürzere Achse $(a > b)$

$$T_b = \frac{\pi}{4} ba^3,$$

das um die längere

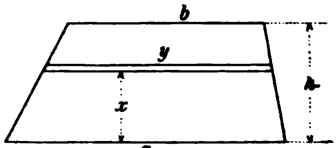
$$T_a = \frac{\pi}{4} ab^3.$$

4. Das Trägheitsmoment eines **Trapezes** um die Grundlinie ist

$$T = \int_0^h y\,dx \cdot x^2.$$

Nun ist aber y sicher eine lineare Funktion von x, weil man y und x als Koordinaten einer Geraden in bezug auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem ansehen kann:

$$y = \alpha x + \beta.$$



a
Fig. 210.

Da aber $y = a$ für $x = 0$ und $y = b$ für $x = h$, so ist

$$\beta = a \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{b-a}{h}.$$

Setzt man diese Werte in das obige Integral für T ein, so erhält man

$$T = \frac{1}{4}\alpha h^4 + \frac{1}{3}\beta h^3 = \frac{3b+a}{12}h^3.$$

Da $m = F = \frac{1}{2}h(a+b)$, so ist

$$\sigma = h\sqrt{\frac{3b+a}{6(a+b)}}.$$

Um den Trägheitsradius σ' um eine parallele Achse durch den Schwerpunkt zu erhalten, erinnere man sich, daß dieser den Abstand

$$p = \frac{1}{3}h\frac{a+2b}{a+b}$$

von der Grundlinie hatte (siehe Nr. 53).

Demnach ist

$$\sigma'^2 = \sigma^2 - p^2 = h^2\frac{a^2+b^2+4ab}{18(a+b)^2}.$$

Das Dreieck ist natürlich in den vorstehenden Formeln mit enthalten.

Aufgabe 119: Man beweise, daß das Trägheitsmoment der **Kugel** um einen Durchmesser $\frac{8}{15}\pi R^5$, also $\sigma = \sqrt{\frac{2}{5}}R$ ist. Anleitung: Man zerschneide die Kugel in Scheiben senkrecht zum gewählten Durchmesser. Für jede solche Kreisscheibe kennt man bereits das Trägheitsmoment.

257. Graphische Bestimmung von Trägheitsmomenten ebener Figuren. Wir behandeln zunächst die folgende Hilfsaufgabe:

In einer Ebene seien eine Reihe von Punkten mit den Massen $m_1 \ldots m_n$ und den Abständen $x_1 \ldots x_n$ von einer Achse in der Ebene gegeben. Man bestimme das Trägheitsmoment

$$T = \sum m_\nu x_\nu^2$$

auf graphischem Wege.

Zu dem Zwecke fassen wir die m_ν als Kräfte auf, welche der Achse parallel gerichtet sind, und schreiben, das Moment zweiter Ordnung in eine doppelte Momentbildung erster Ordnung zerlegend,

$$T = \sum_\nu x_\nu \cdot (x_\nu m_\nu).$$

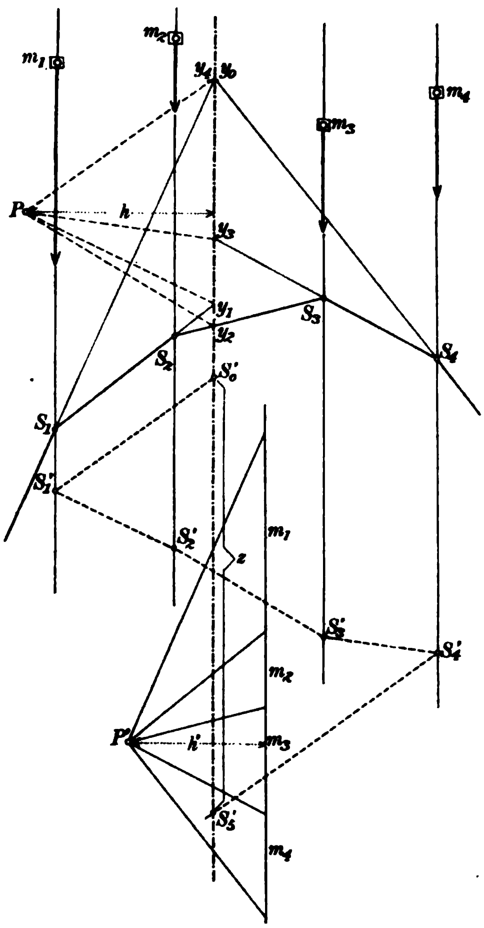


Fig. 211.

$x_\nu m_\nu$ ist nun das Moment erster Ordnung der Kraft m_ν in bezug auf die Achse, es ist nach Nr. 160 gleich $h' y_\nu$, wenn wir zu den Kräften m_ν ein Poleck und ein Seileck zeichnen, h' die Poldistanz bedeutet und y_ν den Abschnitt der beiden zu m_ν gehörenden Seilstrahlen auf der Achse. Also

$$x_\nu m_\nu = h' y_\nu \quad \text{und}$$

$$T = h' \sum x_\nu y_\nu.$$

Um nun diese Summation vorzunehmen, kann man in zweifacher Weise vorgehen:

Erste Methode: Man fasse die y_ν als neue Kräfte auf, welche man an den alten Angriffspunkten der m_ν wiederum der Achse parallel wirken lasse. Dann ist $x_\nu y_\nu$ deren Moment und $\Sigma x_\nu y_\nu$ das Gesamtmoment, das man nach Nr. 160 sofort findet, wenn man ein neues Kräftepolygon und ein neues Seilpolygon zeichnet, und zwar ist

$$\sum x_\nu y_\nu = h'' z,$$

wenn h'' die neue Poldistanz, z den Abschnitt bedeutet, welchen der erste und der letzte Seilstrahl, die ja der Resultierenden zugehören, auf der Achse begrenzen.

Somit ist

$$T = h' h'' z.$$

Das Zeichnen des neuen Polecks kann man sich ersparen, da man ja die y_ν schon als Abschnitte auf der Achse vor sich hat.

Siehe die Durchführung der Figur, in der speziell die Schwerachse als Momentenachse genommen ist.

Zweite Methode: Es ist $y_\nu x_\nu$ der doppelte Inhalt des Dreiecks Δ_ν, das von den beiden zu m_ν gehörenden Seilstrahlen und der Achse eingeschlossen wird, denn es ist y_ν seine Basis, x_ν seine Höhe. Also ist $\Sigma x_\nu y_\nu$ die doppelte Summe aller dieser Dreiecke, welche aber alle zusammen gerade das Polygon $Y_0 S_1 S_2 S_3 S_4 Y_4$ ausmachen, welches von dem Seileck und dem Stück der Achse gebildet wird, das der erste und der letzte Seilstrahl auf ihr ausschneiden. Sei J der Inhalt dieser Figur, so ist

$$T = 2h'J.$$

Hat man also ein Planimeter zur Hand oder vermag man sonst genau genug den Inhalt der Figur J zu bestimmen (etwa durch Auszählung der Quadrate, falls man auf mm-Papier zeichnet), so erspart man die Zeichnung eines zweiten Seilecks und Polecks. Was den Maßstab angeht, so ist noch zu bemerken, daß h' im Kräftemaßstab, J resp. z und h'' im Längenmaßstab zu nehmen sind.

258. Fortsetzung. Sei nun eine kontinuierlich ausgedehnte ebene Figur gegeben, deren Trägheitsmoment um eine Achse bestimmt werden soll, so teilen wir sie in unendlich schmale Streifen parallel zur Achse und nehmen den Inhalt dm eines jeden Streifens als Kraft. Da

$$T = \int dm\, x^2$$

ist, so entspricht die neue Aufgabe der Hilfsaufgabe der vorigen Nummer, nur daß wir es jetzt mit unendlich vielen, unendlich kleinen Kräften zu tun haben. Im Prinzip bleiben die Lösungsmethoden dieselben, nur erhalten wir stetige Seilkurven statt der Polygone (vgl. Nr. 137).

Um die Aufgabe praktisch zu lösen, wird man die Figur in eine endliche Anzahl schmaler Streifen teilen und den Inhalt eines jeden Streifens in einer mittleren Linie dieses Streifens etwa seiner Schwerachse angreifen lassen.

Dadurch wird freilich ein Fehler begangen. Denn wenn der Streifen nicht unendlich schmal ist, sondern sein Trägheitsradius in bezug auf seine Schwerachse σ_ν ist, so haben wir nicht

$$\sum m_\nu x_\nu^2$$

zu bilden, sondern

$$\int dm\, x^2 = \sum m_\nu \sigma_\nu'^2 = \sum m_\nu (x_\nu^2 + \sigma_\nu^2),$$

wenn σ_ν' den Trägheitsradius des ν^{ten} Streifens in bezug auf die ausgewählte Achse bedeutet.

Bei feiner Teilung wird σ_ν klein und der Fehler also gering sein. Will man ihn ohne wesentliche Komplikation verbessern, so verfährt man folgendermaßen: Man setzt

$$T = \sum m_\nu (x_\nu^2 + \sigma_\nu^2) = \sum m_\nu x_\nu x_\nu' = \sum x_\nu'(x_\nu m_\nu) = \sum x_\nu' y_\nu,$$

wo

$$x_\nu' = \frac{x_\nu^2 + \sigma_\nu^2}{x_\nu}$$

ist und verfährt nun wie in der vorhergehenden Nummer bei Methode 1, nur daß man das zweitemal die Kräfte y_ν in den Abständen x_ν' statt abermals x_ν angreifen läßt.

Die x_ν' aber kann man sich leicht in folgender Weise konstruieren:

Man trägt auf der Schwerachse des Streifens $\sigma_\nu = FX$ vom Fußpunkte F des Lotes OF zwischen Achse und Schwerachse des Streifens auf und zieht zu OX die Senkrechte, welche die Verlängerung von OF in F' schneide. Dann ist F' der neue Angriffspunkt, d. h. $OF' = x_\nu'$. Bekannte Sätze über das rechtwinklige Dreieck zeigen, daß in der Tat

$$OF' = x_\nu' = \frac{x_\nu^2 + \sigma_\nu^2}{x_\nu}$$

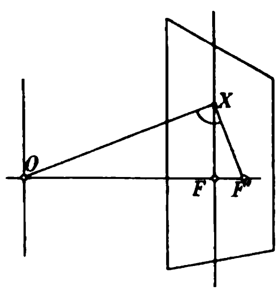


Fig. 212.

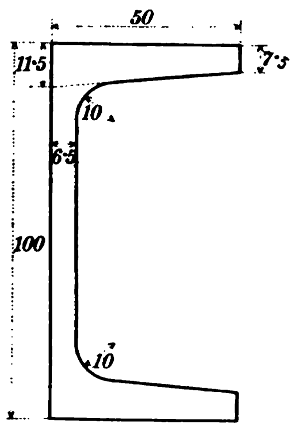


Fig. 213.

ist. Bei der praktischen Ausführung wird man oft die Streifen durch Trapeze ersetzen können und dann bei der Korrektur die Ergebnisse von Nr. 256 und 53 anwenden, falls die vorher angegebene Korrektur wirklich nötig sein sollte.

Aufgabe 120: Man bestimme auf die vorstehend geschilderte Methode graphisch das Trägheitsmoment eines U-Eisens (siehe Figur 213) um die Schwerpunktsachse, die man ja leicht gleichzeitig mittels des ersten Seilpolygons finden kann (siehe Nr. 138).

259. Experimentelle Bestimmung von Trägheitsmomenten. Die rechnerischen und graphischen Methoden setzen voraus, daß man die Massenverteilung im Körper genau kenne. Ist dies nicht der Fall und hat man bereits fertige Stücke vor sich, so wendet man zur Bestimmung ihrer Trägheitsmomente am besten experimentelle Methoden an.

Kennt man die Schwerpunktslage des Körpers, so lasse man ihn um eine exzentrische Achse, die man etwa auf Schneiden horizontal lagert, Schwingungen ausführen. Aus der Schwingungsdauer τ_0 berechnet man dann sofort T in bezug auf die Drehachse nach den Formeln (siehe Nr. 195)

$$\tau_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

$$l = \frac{T}{ms},$$

wo s den Schwerpunktsabstand von der Achse bedeutet.

Ist jedoch s nicht bekannt, so verfahre man folgendermaßen: Man konstruiere sich ein Zusatzgewicht m' mit bekanntem s' und T', das man auf die Achse aufkeilen kann.

Dann macht man zwei Versuche: einmal ohne das Zusatzgewicht, wodurch man eine Gleichung

$$\left(\frac{\tau_0}{2\pi}\right)^2 = \frac{T}{mgs} \tag{1}$$

für die Unbekannten T und s erhält, dann mit dem Zusatzgewicht, woraus die zweite Gleichung

$$\left(\frac{\tau_0'}{2\pi}\right)^2 = \frac{T + T'}{mgs + m'gs'} \tag{2}$$

folgt.

Man hat dann zwei lineare Gleichungen, aus denen man T und s berechnen kann, wenn die Determinante nicht verschwindet. Man sieht sofort, daß dieser Ausnahmefall nur eintritt, wenn $\tau_0 = \tau_0'$ und infolgedessen

$$\frac{T}{mgs} = \frac{T'}{mgs'}$$

ist, wenn also der Zusatzkörper allein ebenso schwingen würde wie der alte Körper allein. Das wird man also durch passende Wahl das Zusatzkörpers zu vermeiden haben.

Es ist auch möglich, T und s dadurch zu bestimmen, daß man den Körper um zwei verschiedene parallele Achsen schwingen läßt (Methode von E. Brauer).

Um feine Exzentrizitäten zu messen, lasse man den Körper um die Achse rotieren, welche man horizontal auf die eine Schale einer Wage lagert. Im Gleichgewicht balanziere man die Wage aus.

Wenn dann der Körper schnell rotiert, so wird er infolge der Exzentrizität eine bemerkenswerte Reaktionskraft $m s \omega^2$ auf die Wagschale ausüben, deren Richtung mit umläuft und die also die Wage in Schwingungen versetzen muß. Um die Wirkung stark zu machen, wird man Resonanz zu erzeugen suchen, d. h. ω so wählen, daß auf eine Umdrehung eine natürliche Schwingung kommt, und um dann noch ω groß wählen zu können, wird man eine Wage mit sehr schneller Schwingung nehmen müssen.

Um Deviationsmomente zu messen, wird man ganz ähnlich verfahren, nur daß man den rotierenden Körper nicht auf eine einzelne Wagschale, sondern auf den Wagebalken mit der Rotationsachse quer zur Wageachse montiert dementsprechend, daß ein Deviationsmoment ein Kräftepaar $D\omega^2$ erzeugt, das dann den Wagebalken in Schwingungen versetzt.

Die Theorie der Apparate wollen wir später (siehe Nr. 311 und 331) besprechen.

Literatur zu § 45. Als Lehrbuch vor allem Routh, Dynamik, Bd. I, Kap. I. Dann Übersicht: Enzyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. IV, 4; G. Jung, Geometrie der Massen. Auch in vielen Lehrbüchern der Elastizitäts- und Festigkeitslehre findet sich eine ausführliche Darstellung der Theorie der Trägheitsmomente ebener Figuren und der zugehörigen graphischen Konstruktionen.

§ 46. Geometrische Kinematik des starren Körpers.

260. Allgemeines. Der im Raume frei bewegliche starre Körper hat sechs Freiheitsgrade, d. h. man braucht sechs unabhängige Stücke, um seine allgemeine Lage eindeutig festlegen zu können.

Das erkennt man leicht so: Um einen herausgegriffenen Punkt C des Körpers zu fixieren, bedarf es dreier Stücke, etwa der drei rechtwinkligen Koordinaten des Punktes: c_x, c_y, c_z. Dann wähle man einen im Körper festen Strahl durch C. Um seine Lage anzugeben, brauchen wir noch zwei Stücke: etwa den Polwinkel ϑ des Strahls mit einer festen Richtung, z. B. der z-Achse eines ruhenden Koordinatensystems ($0 \leqq \vartheta \leqq \pi$) und den Azimutwinkel φ, welchen die Knotenlinie, d. h. die Senkrechte zum gewählten Strahl und zur z-Achse — diese Senkrechte so gerichtet, daß von ihr aus gesehen der Strahl zur Linken, die z-Achse zur Rechten liegt — mit einer festen Richtung senkrecht zur z-Achse, etwa der x-Achse einschließt ($0 \leqq \varphi < 2\pi$). Dabei werde φ so gezählt, daß wachsendes φ von der x-Achse zur y-Ache des rechtshändigen Systems führt. Liegen so C und der Strahl durch C eindeutig fest, so bleibt noch eine Bewegungsfreiheit des Körpers übrig: man kann ihn noch um den aus-gewählten Strahl drehen. Also bedarf es noch einer sechsten Koordinate. als solche wählen wir den Winkel ψ, welchen eine im Körper feste, zum ersten Strahl (z'-Achse) senkrechte Richtung (x'-Achse) mit der Knotenlinie einscßließt, diesen Winkel von der z'-Achse aus gesehen links herum positiv gezählt ($0 \leq \psi < 2\pi$).

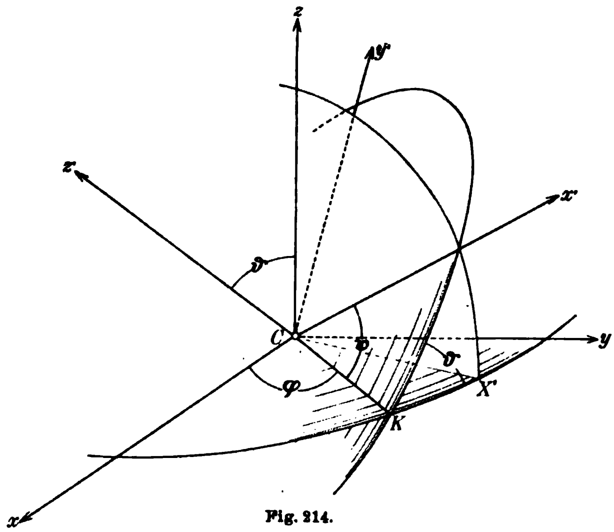


Fig. 214.

Die Beziehung zwischen Lage und Koordinaten ist offenbar im allgemeinen eineindeutig, nur bei $\vartheta = 0$ verliert die Knotenlinie ihre Bedeutung, desgleichen φ und ψ einzeln genommen, wogegen $\varphi + \psi$ seine Bedeutung behält.

Es ist deshalb für manche Zwecke nützlich, statt ψ den Winkel $\varphi + \psi$, die sogenannte „Länge" der x'-Achse einzuführen.

Die Winkel φ, ψ, ϑ werden nach Euler benannt.

Man erkennt nun leicht wieder, wie in der Ebene, daß für die Überführbarkeit einer Figur in eine andere durch starre Bewegung Kongruenz im engeren Sinne, d. h. Gleichheit aller Winkel und Strecken sowie Übereinstimmung des Umlaufssinnes notwendig und hinreichend ist.

Um das einzusehen, geht man davon aus, daß man jedes Dreieck $O O' O''$ in jedes kongruente überführen kann. Um nun einen vierten Punkt X mit zu führen, genügt es im allgemeinen nicht, die Strecken OX, $O'X$, $O''X$ zu geben, denn die drei Kugeln um O, O', O'' mit den Radien OX, $O'X$, $O''X$ schneiden sich in zwei Punkten: X und X', die nur ausnahmsweise zusammenfallen. Im allgemeinen liegen X und X' spiegelbildlich zueinander bezüglich der Ebene $O O' O''$. Es wird aber das Dreieck $O O' O''$ von dem einen Punkte aus links umfahren, von dem andern Punkte aus rechts umfahren erscheinen (bei Festhaltung der Reihenfolge $O O' O''$), so daß von den Punkten X und X' erst durch Angabe des Umlaufssinnes einer eindeutig

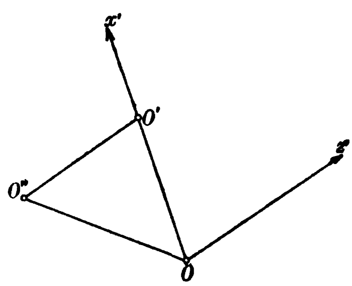


Fig. 215.

sein wird. Und daß nun durch das Dreieck $OO'O''$ die Lage desfestgelegt ganzen Körpers eindeutig bestimmt ist, erkennt man leicht: man braucht ja nur etwa O zum Punkte C, den Strahl OO' zur x'-Achse zu wählen und dann die z'-Achse senkrecht zu $OO'O''$ so zu zeichnen, daß der Umlaufssinn von $OO'O''$ von ihr aus gesehen links herum geht. Mit der z'- und x'-Achse liegt aber auch die y'-Achse eindeutig fest und damit der ganze Körper.

261. Darstellung der Koordinaten durch die Eulerschen Winkel. Bekanntlich drücken sich die Koordinaten eines Punktes x, y, z in bezug auf das im Raum feste Koordinatensystem durch x', y', z', die Koordinaten in bezug auf das im Körper feste System folgendermaßen aus:

$$x = c_x + x' \cdot (x', x) + y' \cdot (y', x) + z' \cdot (z' x),$$

$$y = c_y + x' \cdot (x', y) + y' \cdot (y', y) + z' \cdot (z', y),$$

$$z = c_z + x' \cdot (x', z) + y' \cdot (y', z) + z' \cdot (z', z),$$

wo (x', x) usw., die Richtungskosinus des einen Koordinatensystems gegen das andere, eindeutige Funktionen der Eulerschen Winkel ϑ, φ, ψ sein müssen. Die vorstehenden Gleichungen haben die Form $\bar{r} = \bar{c} + \varphi(\bar{a}, \vartheta, \varphi, \psi)$,

wo $\bar{c}$ den Vektor OC, $\bar{a}$ einen von der Zeit unabhängigen Vektor, nämlich den Vektor CX, bedeutet, bezogen auf das bewegliche System C, x', y', z'.

$\bar{a}$ individualisiert die Punkte des Körpers, verändert sich aber mit der Zeit nicht, wir nennen ihn den Grundvektor,

$\bar{c}, \vartheta, \varphi, \psi$ sind Systemkoordinaten, sie hängen nicht von der Wahl des einzelnen Punktes ab, dagegen wohl von der Zeit t.

Um nun die Richtungskosinus durch ϑ, φ, ψ auszudrücken, kann man so vorgehen:

Man lege um C, wohin man das feste System x, y, z parallel verschoben habe, eine Kugel und wende nun auf das sphärische Dreieck x, x', K den Kosinussatz an: man erhält sofort

$$(x', x) = \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\vartheta,$$

da ja ϑ der Winkel zwischen der xy- und der $x'y'$-Ebene ist. Ebenso findet man aus dem Dreieck xKy'

$$(x, y') = \cos\varphi \cos\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\varphi \sin\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) \cos\vartheta$$

oder

$$(x, y') = -\cos\varphi \sin\psi - \sin\varphi \cos\psi \cos\vartheta,$$

aus dem Dreieck yKy'

$$(y, y') = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta$$

und aus yKx'

$$(y, x') = \cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\varphi\cos\vartheta.$$

Um (z, x') zu finden, lege man durch z und x' einen größten Kreis, welcher die Grundebene xy in X' treffe. Das Dreieck $Kx'X'$ hat bei X' einen rechten Winkel, während $\sin(x', X') = (x', z)$ ist. Der Sinussatz für das Dreieck $Kx'X'$ gibt sofort

$$(x', z) = \sin\psi\sin\vartheta.$$

Analag findet man

$$(y', z) = \sin\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right)\sin\vartheta = \cos\psi\sin\vartheta.$$

Dasselbe Verfahren mache man mit der z'- und y-Achse. Man erhält

$$(y, z') = -\cos\varphi\sin\vartheta,$$

ebenso

$$(x, z') = \sin\varphi\sin\vartheta.$$

Ebenso ist ohne weiteres klar, daß

$$(z, z') = \cos\vartheta.$$

Wir stellen die Resultate in einer Tabelle zusammen:

	x'	y'	z'
x	$\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta$	$-\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta$	$\sin\varphi\sin\vartheta$
y	$\cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\varphi\cos\vartheta$	$-\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta$	$-\cos\varphi\sin\vartheta$
z	$\sin\psi\sin\vartheta$	$\cos\psi\sin\vartheta$	$\cos\vartheta$

Eine sehr hübsche Darstellung der sphärischen Trigonometrie findet man in dem kleinen Buche von G. Hessenberg, „Trigonometrie“ in der Sammlung Göschen.

262. Endliche Lagenänderungen des starren Körpers. Genau so wie in der Ebene erkennt man leicht, daß man jede endliche Lagenänderung eines starren Körpers durch eine Translation, durch welche der willkürlich herausgegriffene Punkt C in seine richtige neue Lage kommt, und eine Drehung um C erzeugen kann.

Wir wollen uns nun zunächst davon vergewissern, daß bei Drehung um einen festbleibenden Punkt C zugleich auch immer eine Gerade in ihrer alten Lage bleibt, daß man also die Drehung um einen festen Punkt immer ersetzen kann durch Drehung um eine bestimmte Achse, die Drehachse, Oder:

Haben zwei kongruente und gleichsinnige Figuren einen Punkt gemein, so haben sie auch eine Gerade gemein.

Zu dem Zweck schlagen wir um C eine Kugel und betrachten die Schnittfigur des Körpers mit der Kugel. Diese Figur wird auf der Kugel kongruent und gleichsinnig transformiert. Nun gelten auf der Kugel genau dieselben Sätze über kongruente und gleichsinnige Figuren wie in der Ebene: man kann also den Satz der Ebene, daß es immer einen Punkt gibt, der in der neuen Lage mit seiner Stelle in der alten Lage zusammenfällt, auf die Kugel übertragen. Der einzige Unterschied ist nur der, daß dieser Punkt stets ins Endliche fällt, da es reelle unendlich ferne Punkte auf der Kugel nicht gibt.

Also gibt es auf der Kugel einen und nur einen Punkt M, der mit seiner alten Lage in Deckung bleibt: dasselbe gilt natürlich für die Achse CM, w. z. b. w.

Wählen wir nun einen andern als den Punkt C zum Translationspunkt, so ändert sich die Translation, dagegen wollen wir sehen, daß die Rotation insofern die alte bleibt, als die Drehachse parallel und Größe und Sinn des Drehwinkels dieselben bleiben. Zu dem Zwecke fragen wir nach den Graden, die überhaupt bei der Bewegung sich selbst parallel und gleichgerichtet[1]) bleiben. Das sind nun offenbar, wenn die Drehung keine volle Umwendung war, was wir ausschließen können, da eine volle Umwendung so gut wie gar keine Drehung ist, nur die Parallelen zur Drehachse. Denn bliebe noch eine andere Gerade sich selbst parallel und gleichsinnig, so müßte es auch die gemeinsame Senkrechte dieser Geraden und der Drehachse tun; es bliebe also ein im Körper festes Koordinatensystem sich selbst parallel und damit auch der Körper: er hätte sich gar nicht gedreht. Nun ist jede mögliche Drehachse eine Gerade, die sich selbst gleichgerichtet bleibt, also muß es eine Parallele zur ursprünglichen Drehachse sein.

Daß nun auch die Drehwinkel nach Sinn und Größe die alten bleiben, beweist man ebenso wie den entsprechenden Satz in der Ebene.

Man kann aber nicht, wie in der Ebene, jede Bewegung auf eine bloße Rotation oder auf eine bloße Rotation zurückführen. Denn beides sind ebene Bewegungen. Dagegen gelingt die Zurückführung auf eine sogenannte Schraubenbewegung:

Jede räumliche Bewegung läßt sich auf eine Schraubenbewegung zurückführen, d. h. auf eine Drehung und auf eine Verschiebung in Richtung der Drehachse.

Zum Beweise dieses Satzes zerlegen wir die Translation bei Wahl eines beliebigen Punktes C in eine Verschiebung parallel und eine

1) Wir geben den Geraden auch einen Pfeilsinn.

solche senkrecht zur Richtung der Drehachse (diese Richtung steht a priori fest nach dem vorigen Satze!). Die Verschiebung senkrecht zur Richtung der Drehachse bildet nun zusammen mit der Drehung eine ebene Bewegung, die man auf eine bloße Drehung zurückführen kann: also bleiben nur diese Drehung und die Translation parallel der Drehachse, w. z. b. w.

Man verdankt diese Sätze den gleichzeitigen und unabhängigen Untersuchungen von Möbius, Chasles und Giorgini im ersten Drittel des 19. Jahrhunderts, die analogen Sätze für die Ebene stammen meist schon von Poinsot.

263. Übergang zu unendlich kleinen Bewegungen. Wenden wir die Resultate der vorigen Nummer auf die Lagenänderung an, welche der Körper bei einer Bewegung in der Zeit dt erfährt, so setzt sich diese Lagenänderung aus der Verschiebung $d\bar{c}$ des gewählten Punktes C und einer Drehung um den Punkt C um eine bestimmte, durch ihn gehende Achse durch einen kleinen Winkel $d\chi$ zusammen. Letztere Bewegung ist aber eine ebene Bewegung: man kann daher sofort das Resultat aus Nr. 222 übertragen, wonach der Anteil der Drehbewegung an der Verschiebung irgendeines Punktes $\overline{d\chi(r-c)}$ ist, wenn wir einen Vektor $d\bar{\chi}$ konstruieren, der in der augenblicklichen Drehachse liegt, so daß von ihm aus gesehen die Drehung links herum erfolgt, und dessen Größe $d\chi$ ist.

Also erhalten wir die Eulersche Formel

$$d\bar{r} = d\bar{c} + \overline{d\chi(r-c)}$$

als auch für den Raum gültig.

Definieren wir den Vektor der Winkelgeschwindigkeit durch

$$\bar{\omega} = \frac{d\bar{\chi}}{dt},$$

so erhalten wir als

Ausdruck der Geschwindigkeit irgendeines Punktes

$$\bar{v} = \bar{\dot{c}} + \overline{\omega(r-c)}.$$

In Koordinaten

$$v_1 = \dot{c}_1 + \omega_2(r_3 - c_3) - \omega_3(r_2 - c_2),$$

usw.

Man beachte aber, daß es im Gegensatz zur Ebene keinen Winkelvektor $\bar{\chi}$ gibt, dessen Differential $d\bar{\chi}$ wäre und der dazu dienen könnte, zusammen mit $\bar{c}$ die Lage des Systems anzugeben. D. h. man kann keine Funktion $\bar{\chi}$ der Eulerschen Winkel ϑ, φ, ψ bestimmen, so daß

$$\frac{d\bar{\chi}}{dt} = \omega$$

wäre. Darüber noch einiges später (siehe Nr. 265).

264. Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen. Führen wir nacheinander zwei unendlich kleine Drehungen um verschiedene Achsen durch einen festen Punkt C aus: die erste führe $\bar{r}$ in $\bar{r}_1 = \bar{r} + d\bar{r}_1$, die zweite $\bar{r}_1$ in $\bar{r}_2 = \bar{r}_1 + d\bar{r}_2$ über. Welches ist das Gesamtresultat?

Es ist

$$d\bar{r}_1 = \overline{d\chi_1(\bar{r} - \bar{c})},$$
$$d\bar{r}_2 = \overline{d\chi_2(\bar{r}_1 - \bar{c})},$$
$$= \overline{d\chi_2(\bar{r} - \bar{c})} + \overline{d\chi_2 d\bar{r}_1}.$$

Also ist das Gesamtresultat, wenn wir $\overline{d\chi_2 dr_1}$ als Glied zweiter Ordnung fortlassen,

$$d\bar{r} \equiv d\bar{r}_1 + d\bar{r}_2 = \overline{(d\bar{\chi}_1 + d\bar{\chi}_2)(\bar{r} - \bar{c})},$$

d. h. es ist eine Drehung, deren Achse und Drehwinkel durch

$$d\bar{\chi}_1 + d\bar{\chi}_2$$

gegeben ist.

1. *Es setzen sich also die Drehvektoren $d\bar{\chi}$ um Achsen durch einen Punkt zu der resultierenden Drehung wie Vektoren zusammen.*

Außerdem sind die Drehvektoren $d\bar{\chi}$ sogenannte „linienflüchtige" Vektoren, d. h. sie gehören nur einer Achse, nicht aber einem Punkt der Achse zu. Mit anderen Worten:

2. *Man darf die Vektoren $d\bar{\chi}$ längs ihrer Achse verschieben.*

3. *Endlich sind unendlich kleine Bewegungen miteinander vertauschbar:*

Denn aus

$$d\bar{r}_1 = d\bar{c}_1 + \overline{d\chi_1(\bar{r} - \bar{c}_1)}$$

und

$$d\bar{r}_2 = d\bar{c}_2 + \overline{d\chi_2(\bar{r}_1 - \bar{c}_2)},$$

wo $\bar{r}_1 = \bar{r} + d\bar{r}_1$, folgt sofort mit Vernachlässigung von Gliedern zweiter Ordnung die resultierende Verschiebung

$$d\bar{r} \equiv d\bar{r}_1 + d\bar{r}_2 = d\bar{c}_1 + d\bar{c}_2 - \overline{d\chi_1 c_1} - \overline{d\chi_2 c_2} + \overline{(d\bar{\chi}_1 + d\bar{\chi}_2)\bar{r}}$$

eine Formel, die bei Vertauschung der Indizes (1) und (2) ungeändert bleibt. (Für endliche Bewegungen gilt diese Vertauschung nicht!)

Aus diesen drei Sätzen folgt aber, daß sich unendlich kleine Bewegungen genau so zusammensetzen wie Kräfte. Bei dieser Analogie entsprechen den Kräften die Drehvektoren $d\bar{\chi}$, den Kräftepaaren die Drehpaare, d. h. die Translationen.

Denn wir wissen ja schon, daß sich eine Translation stets als ein Drehpaar auffassen läßt (siehe Nr. 221). Der Kraftschraube entspricht die Bewegungsschraube, repräsentiert jene das allgemeinste Kräftesystem am starren Körper, so repräsentiert diese die allgemeinste Bewegungsform desselben. Von dieser Analogie rührt auch der Name Kraftschraube her.

Wie man ein Kräftesystem auch stets auf zwei Kräfte in konjugierten Graden zurückführen konnte (siehe § 27), von denen man eine willkürlich wählen durfte, nur nicht so, daß es eine Nullgerade war, so kann man die allgemeinste Bewegung auf zwei reine Drehungen um im allgemeinen windschiefe Achsen zurückführen.

Die Nullinien des Kraftsystems hatten die Eigenschaft, daß für sie das Moment der Kräfte verschwindet, die Nullinien des Bewegungssystems haben entsprechend die Eigenschaft, daß die Translation ihrer Punkte in ihrer eigenen Richtung Null ist.

Auf die Zusammensetzung endlicher Bewegungen, welche den Anlaß zur Schaffung der Quaternionentheorie, der Mutter der Vektoranalysis, gegeben hat, können wir hier nicht mehr eingehen. Wir verweisen auf die Literatur (siehe Nr. 134 von § 27, auch auf Nr. 235), besonders auf Heun, Kinematik, und Klein-Sommerfeld, Theorie des Kreisels, Bd. 1, ein Werk, das die ganze Theorie der räumlichen Bewegung des starren Körpers enthält, und das daher der Leser in erster Linie zur Hand nehmen möge, wenn er den Stoff dieses Kapitels gründlicher studieren will. Mit der Theorie der Schrauben (theory of screws) haben sich noch viele Autoren beschäftigt (siehe die Literaturangabe in Nr. 134).

265. Ausdruck des Drehvektors $d\bar{\chi}$ durch die Differentiale der Eulerschen Winkel. Eine Änderung $d\vartheta$ des Winkels ϑ bei festgehaltenem ψ, φ bedeutet eine Drehung um die Knotenlinie, eine Änderung von ψ eine Drehung um die z'-Achse, eine Änderung von φ eine Drehung um die z-Achse. Da durch φ, ψ, ϑ die Lage eindeutig bestimmt ist — bis auf eine Translation —, so muß eine gleichzeitige Drehung durch $d\vartheta$, $d\varphi$, $d\psi$ einer allgemeinen Drehung $d\bar{\chi}$ äquivalent sein (siehe Fig. 214).

Seien nun $\bar{x}$, $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\varepsilon}'$ Einheitsvektoren in der Knotenlinie, in der z-Achse und in der z'-Achse, so ist nach dem Satz von der vektoriellen Zusammensetzung der Drehungen

$$d\bar{\chi} = \bar{x}\, d\vartheta + \bar{\varepsilon}\, d\varphi + \bar{\varepsilon}'\, d\psi. \tag{1}$$

Zerlegen wir die Gleichung einmal nach dem ruhenden System x, y, z, so erhalten wir mit Berücksichtigung der Tabelle von Nr. 261

$$\left.\begin{aligned} d\chi_x &= \cos\varphi\, d\vartheta + \sin\varphi \sin\vartheta \cdot d\psi \\ d\chi_y &= \sin\varphi\, d\vartheta - \cos\varphi \sin\vartheta\, d\psi \\ d\chi_z &= d\varphi + \cos\vartheta \cdot d\psi. \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Aus diesen Formeln sieht man sofort, daß es keinen Winkel χ_z z. B. gibt. Denn dann müßte

$$\frac{\partial \chi_z}{\partial \varphi} = 1, \quad \frac{\partial \chi_z}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial \chi_z}{\partial \psi} = \cos\vartheta$$

sein, von denen die beiden letzten Gleichungen sich widersprechen. Man nennt deshalb ω und seine Komponenten **nichtholonome Geschwindigkeitsparameter** im Gegensatz zu $\dot\vartheta$, $\dot\varphi$, $\dot\psi$ z. B., die wirkliche Differentialquotienten von Koordinaten sind und die wir **holonome Geschwindigkeitsparameter** nennen wollen. Wohl ist gemäß

$$\omega = \bar{x}\dot\vartheta + \bar{\varepsilon}\dot\varphi + \bar{\varepsilon}'\dot\psi \tag{2}$$

ω eine homogene, lineare Kombination holonomer Geschwindigkeitsparameter.

Zerlegt man nach dem im Körper festen System $x'y'z'$, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} d\chi_{x'} &= \cos\psi d\vartheta + \sin\psi\sin\vartheta\cdot d\varphi \\ d\chi_{y'} &= -\sin\psi d\vartheta + \cos\psi\sin\vartheta d\varphi \\ d\chi_{z'} &= \cos\vartheta\cdot d\varphi + d\psi. \end{aligned}\right\} \tag{1''}$$

266. Anschauliche Darstellung der Bewegung. Betrachten wir zunächst die Bewegung um einen festen Punkt C, so wird im allgemeinen die Drehachse nicht fest sein, sondern im Raume sowohl wie im Körper Kegel beschreiben, die wir **Spurkegel** und **Polkegel** nennen wollen. Wie in der Ebene Spurkurve und Polkurve, so werden sich die beiden Kegel stets (längs einer Erzeugenden) berühren und aufeinander abrollen, ohne zu gleiten.

Sind zufällig beide Kegel Kreiskegel, so nennt man die Bewegung eine **Präzessionsbewegung**. Beispielsweise hat sich aus den unregelmäßigen Schwankungen, welche die Drehachse der Erde in dieser und im Weltraum vollführt, eine Präzessionsbewegung herausschälen und mechanisch erklären lassen, die den Hauptanteil der räumlichen Bewegung ausmacht (die sogenannte reguläre Präzession der Erde): der Spurkegel hat eine Öffnung von etwa $23\frac{1}{2}^\circ$, wohingegen der Polkegel sehr klein ist: der Radius seines Durchschnittes mit der Erde beträgt etwa 27 cm. Dementsprechend ist die Umlaufszeit des einen Kegels auf dem andern sehr groß: sie beträgt rund 26000 Jahre.

Diese reguläre Präzessionsbewegung bewirkt die Änderung des Polarsterns und das Vorrücken des sogenannten Frühlingspunktes, d. h. der Schnittlinie der Äquatorebene mit der Erdbahnebene (der sogenannten Ekliptik). Nehmen wir die xy-Ebene als Ekliptik, die z'-Achse als Erdachse, so ist in Figur 214 K der Frühlingspunkt, er läuft tatsächlich um, wenn sich die z'-Achse im Kreise um die z-Achse bewegt.

Der Drehpol schwankt auf der Erde in einem Gebiete von ca. 8 m Durchmesser unregelmäßig hin und her. Immerhin hat sich daraus noch eine zweite periodische Bewegung erkennen lassen: die Chandlersche Polbewegung mit der Periode von etwa 427 Tagen. Über ihre mechanische Erklärung siehe Klein-Sommerfeld, Bd. III.

Fassen wir nun die allgemeine räumliche Bewegung, d. h. eine Schraubenbewegung, ins Auge, so wird die Schraubenachse im allgemeinen auch nicht fest sein, sondern im Raume sowohl als im Körper eine Regelfläche beschreiben. Beide Regelflächen berühren sich in jedem Augenblicke längs einer Erzeugenden, der momentanen Schraubenachse; und da die Bewegung in einer Drehung um diese Erzeugende und einem Gleiten längs derselben besteht, so werden die beiden Regelflächen aufeinander abschroten, wie man sagt, d. h. es wird ein Rollen um die Erzeugende sein mit einem gleichzeitigen Gleiten längs derselben.

§ 47. Kinematik der Relativbewegung.

267. Zusammenhang der Geschwindigkeiten. Wir betrachten einen beweglichen Punkt P einmal vom absoluten Raum aus — sein Ortsvektor sei $\bar r$ —, dann von einem selbst bewegten Körper aus. C sei ein in diesem Körper fester Punkt, den Vektor CP bezeichnen wir mit $\bar s$. Unter der Relativgeschwindigkeit des Punktes P verstehen wir dann die Änderungsgeschwindigkeit des Vektors $\bar s$, so wie sie von einem mit dem bewegten Körper fest verbundenen System erscheint. Wir schreiben diese Relativgeschwindigkeit:

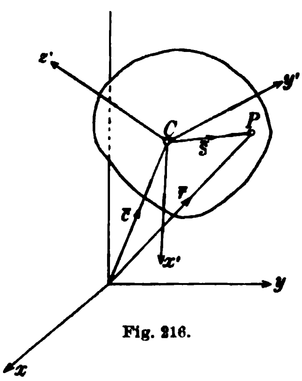


Fig. 216.

$$\bar v_r = \frac{\mathfrak{d}\bar s}{\mathfrak{d}t}.$$

Die Komponenten dieses Vektors nach den im Körper festen Achsen x', y', z' sind keine anderen als $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$. Mit dem deutschen Buchstaben $\mathfrak{d}$ zeigen wir nur an, daß bei der Differentiation des Vektors auf die Drehung des Koordinatensystems $x'y'z'$ keine Rücksicht genommen wird.

Unter Führungsgeschwindigkeit verstehen wir die Geschwindigkeit $\bar v_f$ desjenigen Punktes des führenden Körpers, der sich gerade an derselben Stelle wie P befindet; sie ist also nach der Eulerschen Formel

$$\bar v_f = \dot{\bar c} + \overline{\omega s} = \dot{\bar c} + \overline{\omega(r - c)}.$$

Wir haben nun früher schon (Nr. 29) das auch anschaulich einleuchtende Resultat bewiesen, daß die absolute Geschwindigkeit die geometrische Summe aus der relativen und der Führungsgeschwindigkeit ist:

$$\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_f$$

oder

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\mathfrak{d}\bar{s}}{\mathfrak{d}t} + \bar{\dot{c}} + \omega(\bar{r} - \bar{c}). \tag{I}$$

268. Absolute und relative Änderung eines Vektors. Wir können die Formel (I) der vorigen Nummer so schreiben:

$$\frac{d\bar{s}}{dt} = \frac{\mathfrak{d}s}{\mathfrak{d}t} + \bar{\omega}s, \tag{II}$$

weil

$$\bar{s} = \bar{r} - \bar{c}$$

ist. Die Formel (II) sagt aus, in welcher Beziehung die absolute und die relative Änderungsgeschwindigkeit ein und desselben Vektors $\bar{s}$ zu einander stehen. Diese Formel gilt für irgendeinen Vektor $\bar{J}$, es ist immer

$$\frac{d\bar{J}}{dt} = \frac{\mathfrak{d}J}{\mathfrak{d}t} + \omega J,$$

denn man kann ja durch den mit der Zeit veränderlichen Vektor $\bar{J}$ stets einen Punkt P definieren, indem man $\bar{J}$ von C aus abträgt und $\bar{J}$ als Ortsvektor für P auffaßt. Man sieht aus der Formel, daß für einen Vektor die Translation gar nichts ausmacht, natürlich, denn parallele, gleiche und gleichsinnige Vektoren gelten ja als gleich. Dagegen wird sich ein Vektor gegen ein sich selbst drehendes System ganz anders ändern als gegen ein ruhendes.

269. Die Beschleunigung. Wir wenden das Resultat der vorigen Nummer auf den Vektor der Relativgeschwindigkeit an und erhalten

$$\frac{d\bar{v}_r}{dt} = \frac{\mathfrak{d}\bar{v}_r}{\mathfrak{d}t} + \omega\bar{v}_r = \frac{\mathfrak{d}^2\bar{s}}{\mathfrak{d}t^2} + \omega\frac{\mathfrak{d}s}{\mathfrak{d}t}, \tag{1}$$

wobei natürlich

$$\bar{w}_r = \frac{\mathfrak{d}^2\bar{s}}{\mathfrak{d}t^2}$$

als Relativbeschleunigung zu bezeichnen ist. Andererseits folgt durch Differentiation der Formel aus Nr. 267

$$\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_f,$$

$$\bar{w} \equiv \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}_r}{dt} + \frac{d\bar{v}_f}{dt}. \tag{2}$$

Da

$$\bar{v}_f = \bar{\dot{c}} + \bar{\omega}(\bar{r} - \bar{c}) = \bar{\dot{c}} + \overline{\omega s}$$

war, ergibt sich

$$\frac{d\bar v_f}{dt} = \ddot{\bar c} + \dot\omega s + \omega \frac{ds}{dt}$$

$$= \ddot{\bar c} + \dot\omega s + \omega(\omega s) + \omega \frac{\mathfrak{d}s}{\mathfrak{d}t}.$$

Die drei ersten Glieder zusammen stellen die Beschleunigung desjenigen Körperpunktes dar (siehe Nr. 233[1])), der sich gerade an der Stelle von P befindet, sind also zusammen als Führungsbeschleunigung $\bar w_f$ zu bezeichnen, so daß

$$\frac{d\bar v_f}{dt} = \bar w_f + \overline{\omega \frac{\mathfrak{d}s}{\mathfrak{d}t}} \tag{3}$$

wird. Nehmen wir die Formeln (1), (2), (3) zusammen, so bekommen wir das **Resultat:**

$$\bar w = \bar w_r + \bar w_f + \bar w_c, \tag{III}$$

wo $\bar w_c$ eine Abkürzung für $2\omega v_r \equiv 2\overline{\omega \frac{\mathfrak{d}s}{\mathfrak{d}t}}$ ist und nach Coriolis benannt wird, der zuerst auf die Bedeutung dieses Gliedes aufmerksam gemacht hat.

Ausführlich heißt die Formel

$$\frac{d^2\bar r}{dt^2} = \frac{\mathfrak{d}^2\bar s}{\mathfrak{d}t^2} + \ddot{\bar c} + \overline{\dot\omega(r-c)} + \omega(\omega(r-c)) + 2\omega\frac{\mathfrak{d}s}{\mathfrak{d}t},$$

wobei $\bar s = r - c$ ist.

Beispiel: Bei der Erde liegt $\bar\omega$ in der Erdachse nach Norden, da sie sich von West nach Ost dreht. Infolgedessen liegt $\bar w_c$ stets senkrecht zu $\bar\omega$, d. h. stets in der Ebene des Parallelkreises. Die Coriolisbeschleunigung ist bei der Erde nur Null, wenn die Relativbewegung auf den Polarstern zu- oder von ihm weggerichtet ist, abgesehen von dem trivialen Falle der Ruhe. Bewegt sich ein Punkt auf dem Meridian nach Norden auf der nördlichen Halbkugel, so liegt $\bar w_c$ nach Westen und es ist

$$\bar w_c = 2\omega v_r \sin\beta,$$

wenn β die geographische Breite bedeutet.

Fällt ein Körper vertikal herab, so ist $\bar w_c$ ebenfalls nach Westen gerichtet, doch ist die Größe

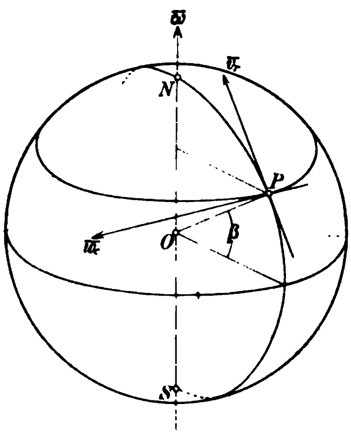


Fig. 217.

1) Die dortige Formel gilt deshalb auch für den Raum, weil die Eulersche Formel es tut.

$$2\omega\mathfrak{r}_r \cos\beta,$$

da $\frac{\pi}{2} - \beta$ der Winkel zwischen $\bar\omega$ und $\bar{\mathfrak{r}}_r$ ist.

Aufgaben: 120. Wie liegt $\mathfrak{r}_e$ und wie groß ist es, wenn sich ein Punkt auf der Erde von West nach Ost bewegt?

121. Man leite die Resultate von Nr. 31 aus den allgemeinen Resultaten dieses Paragraphen ab.

§ 48. Massenkinematik des starren Körpers.

270. Die kinetische Energie. Aufgabe dieses Paragraphen wird es sein, die Beziehung zwischen dem kinetisch wichtigen Impulsvektor $\bar J = \mathsf{S}\,dm\,r\,v$ und dem anschaulich klaren ω, dem Vektor der Winkelgeschwindigkeit herzustellen. Die Vermittlung wird die kinetische Energie übernehmen. Wir beschäftigen uns also zunächst mit ihr.

Die allgemeine Definition der kinetischen Energie eines beliebigen Systems war

$$E = \frac{1}{2}\mathsf{S}\,dm\,\bar v^2.$$

Nun war aber für den starren Körper nach der Eulerschen Formel (siehe Nr. 263)

$$\bar v = \bar c + \overline{\omega s}.$$

Setzen wir das in die allgemeine Formel für E ein, so erhalten wir

$$E = \frac{1}{2}\,m\bar c^2 + \mathsf{S}\,dm\,\bar c\cdot\overline{\omega s} + \frac{1}{2}\mathsf{S}\,dm\,\overline{\omega s}^2.$$

Das erste Glied werden wir als Energie der Translationsbewegung bezeichnen dürfen: E_t, denn es berechnet sich so, als wäre nur die Translation $\bar c$ da; das letzte Glied

$$E_r = \frac{1}{2}\mathsf{S}\,dm\,\overline{\omega s}^2$$

werden wir ebenso Rotationsenergie nennen dürfen. Das Mittelglied

$$\mathsf{S}\,dm\,\bar c\cdot\overline{\omega s}$$

enthält sowohl $\bar c$ als auch $\bar\omega$ und läßt sich vermöge

$$\mathsf{S}\,dm\,\bar s = m\,\bar s^*$$

auf die Form bringen

$$m\bar c\cdot\overline{\omega s^*}.$$

Es verschwindet u. a. in dem besonders wichtigen Falle, daß $\bar s^* = 0$ ist, d. h. daß wir den Schwerpunkt S zum Translationspunkt C wählen.

Machen wir den Schwerpunkt S zum Translationspunkt, was wir stets tun dürfen, so ist die gesamte kinetische Energie die Summe aus der Translationsenergie $\frac{1}{2} m\bar{v}^{*2}$ und der Rotationsenergie $\frac{1}{2}\mathrm{S}\, dm\, \overline{\omega s}^2$. Anderenfalls kommt noch das Glied $m\bar{c}\cdot\omega s^*$ hinzu.

Beschäftigen wir uns nun noch mit der Rotationsenergie

$$E_r = \frac{1}{2}\mathrm{S}\, dm\, \overline{\omega s}^2.$$

Man kann die Drehbewegung in jedem Augenblick, was die Geschwindigkeit angeht, als eine ebene Bewegung um eine bestimmte Achse auffassen (siehe Nr. 262); demnach ist nach Nr. 244

$$E_r = \frac{1}{2}\, T\omega^2, \tag{1}$$

wo T das Trägheitsmoment um die augenblickliche Drehachse bedeutet. Ist also diese nicht fest, so wird auch T variabel sein.

Nehmen wir nun irgendein Achsensystem $C_{x,y,z}$, so war nach Nr. 248, 249

$$\begin{aligned} T = T_x \cos^2\alpha + T_y \cos^2\beta + T_z \cos^2\gamma - 2D_{x,y}\cos\alpha\cos\beta \\ - 2D_{y,z}\cos\beta\cos\gamma - 2D_{z,x}\cos\alpha\cos\gamma, \end{aligned} \tag{2}$$

wenn α, β, γ die Richtungswinkel der Drehachse, also auch die von $\bar{\omega}$ sind, und da demnach $\bar{\omega}$ die Komponenten $\omega_x = \omega\cos\alpha$ usw. nach denselben Achsen hat, so ergibt sich aus (1) und (2)

$$E_r = \frac{1}{2}\left[T_x\omega_x^2 + T_y\omega_y^2 + T_z\omega_z^2 - 2D_{x,y}\omega_x\omega_y - 2D_{y,z}\omega_y\omega_z - 2D_{x,z}\omega_x\omega_z\right]. \tag{I}$$

Nimmt man als Achsen speziell die Hauptachsen mit den Hauptträgheitsmomenten A, B, C, so wird

$$E_r = \frac{1}{2}(A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2). \tag{I'}$$

Trägt man auf allen möglichen Achsen durch den Punkt C einen Vektor $\frac{1}{\sqrt{2E_r}}\bar{\omega}$ auf, so erfüllen die Endpunkte dieses Vektors eine Fläche mit der Gleichung

$$T_x x^2 + T_y y^2 + T_z z^2 - 2D_{x,y}xy - 2D_{y,z}yz - 2D_{z,x}zx = \text{const.}$$

und diese ist keine andere als das Trägheitsellipsoid.

Man erkennt dies sogleich als richtig, wenn man Gleichung (I) durch E_r dividiert, beachtet, daß der Vektor $\frac{1}{\sqrt{2E}}\omega$ die Komponenten

$x = \frac{1}{\sqrt{2 E_r}} \omega_x$ usw. hat und nun die entstehende Gleichung mit der des Trägheitsellipsoides (Nr. 248) vergleicht.

Aufgabe 122: Man leite die Gleichung (I) durch direkte Ausrechnung aus $E_r = \frac{1}{2} \mathfrak{S} dm \overline{\omega s}^2$ ab, indem man in diesen Ausdruck rechtwinklige Komponenten einführt.

271. Die Beziehung zwischen $\bar{J}$ und $\bar{\omega}$. Variieren wir in

$$E_r = \frac{1}{2} \mathfrak{S} dm \omega s^2,$$

$\bar{\omega}$ um $\delta \omega$, so wird

$$\delta E_r = \mathfrak{S} dm \omega s \cdot \delta \omega s$$

oder nach der Vertauschungsformel (siehe Anhang I, 6)

$$\delta E_r = \delta \bar{\omega} \cdot \mathfrak{S} dm s(\omega s). \tag{1}$$

Nun war aber, bezogen auf den Schwerpunkt oder einen festen Punkt

$$\bar{J} \doteq \mathfrak{S} dm s \bar{v},$$

wobei für $\bar{v}$ allein die Geschwindigkeit relativ zum Schwerpunkt (bzw. festen Punkt) gesetzt werden durfte, d. h.

$$\bar{v} = \omega s.$$

Also ist

$$\bar{J} = \mathfrak{S} dm s(\overline{\omega s}).$$

Vergleichen wir das mit (1), so erhalten wir

$$\delta E_r = \delta \omega \cdot \bar{J}$$

und da dies für alle $\delta \bar{\omega}$ gilt, $\bar{J}$ aber davon unabhängig ist,

$$\bar{J} = \frac{\partial E_r}{\partial \bar{\omega}} = \operatorname{grad} E_r. \tag{II}$$

Damit ist die Hauptaufgabe dieses Paragraphen gelöst.

In rechtwinkligen Komponenten heißt diese Formel

$$J_x = \frac{\partial E_r}{\partial \omega_x} \quad \text{usw.}$$

oder unter Berücksichtigung von (I) der vorigen Nummer

$$\left.\begin{aligned} J_x &= T_x \omega_x - D_{x,y} \omega_y - D_{x,z} \omega_z \\ J_y &= - D_{y,x} \omega_x + T_y \omega_y - D_{y,z} \omega_z \\ J_z &= - D_{z,x} \omega_x - D_{z,y} \omega_y + T_z \omega_z \end{aligned}\right\}. \tag{II'}$$

Für die Hauptachsen:

$$J_x = A \omega_x; \quad J_y = B \omega_y; \quad J_z = C \omega_z. \tag{II''}$$

Man erkennt aus diesen Formeln wiederum, inwiefern das Schema der Koeffizienten

$$\begin{array}{ccc} T_x & -D_{x,y} & -D_{x,z} \\ -D_{y,x} & T_y & -D_{y,z} \\ -D_{z,x} & -D_{z,y} & T_z \end{array}$$

den Namen einer (symmetrischen) **Dyade** verdient (vgl. Nr. 205).

272. Geometrische Veranschaulichung dieser Beziehung. Bezeichnen wir die linke Seite der Gleichung der Trägheitsellipse wieder mit $F(\bar{r})$, so unterscheidet sich nach (II′)

$$\bar{J} = \frac{\partial E_r}{\partial \bar{\omega}} \quad \text{von} \quad \frac{dF}{d\bar{r}}$$

nur durch den skalaren Faktor $\frac{1}{\sqrt{2E_r}}$, um den sich auch $\bar{\omega}$ und $\bar{r}$ unterscheiden (vgl. Nr. 250). Also ist auch

$$\bar{J} = \sqrt{2E_r} \cdot \frac{\partial F}{\partial \bar{r}}.$$

$\bar{J}$ hat also dieselbe Richtung wie $\frac{\partial F}{\partial \bar{r}}$.

Nach Nr. 250 steht also $\bar{J}$ geometrisch mit $\bar{\omega}$ in folgender Beziehung:

Betrachtet man den Durchstoßpunkt Ω der Drehachse mit dem Trägheitsellipsoid um den Drehpunkt C, der ein fester Punkt sei oder der Schwerpunkt S, so ist der zugehörige Vektor $C\Omega$ in einem beliebigen Maßstab gleich $\frac{\bar{\omega}}{\sqrt{2E_r}}$; zieht man an das Ellipsoid in Ω die Tangentialebene, und fällt von C das Lot auf diese, so gibt die Richtung des Lotes die Richtung des Impulsvektors und die Länge des Lotes ist $\frac{\sqrt{2E_r}}{J}$ proportional.

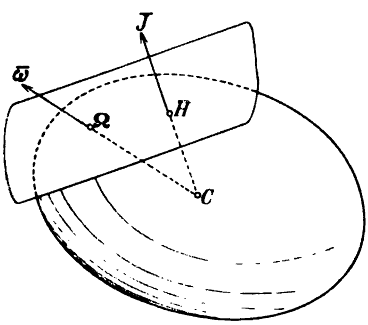


Fig. 218.

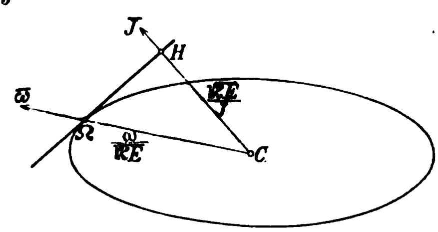


Fig. 219.

Man erkennt daraus, daß nur für eine Hauptachse $\bar{J}$ und $\bar{\omega}$ der Richtung nach zusammenfallen.

Das folgt auch sofort aus unseren Formeln (II'), die nicht nur für im Körper feste Achse gelten. Legen wir die x-Achse in die Drehachse, sodaß $\omega_x = \omega$, $\omega_y = \omega_z = 0$, so wird

$$\begin{aligned} J_x &= \quad T\omega, \\ J_y &= -D_{y,x}\omega, \\ J_z &= -D_{z,x}\omega, \end{aligned}$$

woraus man sieht, daß $T\omega$ nur die Komponente des Impulsvektors nach der Drehachse ist, im allgemeinen aber, wenn die Drehachse keine Hauptachse ist, **nicht** der ganze Impulsvektor.

Für ein Rotationsellipsoid liegen ω und $\bar{J}$ immer in einer Meridianebene: bei einem gestreckten liegt ω zwischen der Symmetrieachse und $\bar{J}$, bei dem abgeplatteten ist es umgekehrt.

273. Weitere Beziehungen zwischen E_r, $\bar{J}$ und $\bar{\omega}$. Aus

$$E_r = \frac{1}{2} \mathfrak{S} dm\, \overline{\omega s}^2 = \frac{1}{2} \mathfrak{S} dm\, \omega s \cdot \overline{\omega s}$$

folgt vermöge der Vertauschungsformel

$$E_r = \frac{1}{2}\, \omega \cdot \mathfrak{S} dm s(\overline{\omega s})$$

oder

$$E_r = \frac{1}{2}\, \bar{\omega} \cdot \bar{J}. \tag{1}$$

Diese Hilfsformel kann auch aus der Eulerschen Formel für die homogene Funktion zweiten Grades $E_r(\bar{\omega})$ gewonnen werden. Das mag der Leser selbst tun.

Durch Differentiation folgt aus (1)

$$\frac{dE_r}{dt} = \frac{1}{2}\, \omega \cdot \frac{d\bar{J}}{dt} + \frac{1}{2}\, \frac{d\bar{\omega}}{dt} \cdot \bar{J}. \tag{1'}$$

Andererseits ist die vollständige Änderung von E_r bei gleichzeitiger Änderung von $\bar{s}$ und ω

$$dE_r = \mathfrak{S} dm\, \omega s \cdot (\overline{d\omega s} + \omega ds).$$

Nun ist aber nach der Eulerschen Formel

$$d\bar{s} = \overline{\omega s} \cdot dt$$

und also

$$\omega s \cdot \omega ds = \omega s \cdot \overline{\omega(\omega s)}\, dt = 0,$$

denn $\bar{a} \cdot \overline{ba}$ ist immer null.

Somit bleibt

$$dE_r = \mathop{\mathsf{S}} dm\,\overline{\omega s} \cdot d\,\overline{\omega s} = d\bar{\omega} \cdot \bar{J}$$

oder

$$\frac{dE_r}{dt} = \dot{\bar{\omega}} \cdot \bar{J}. \tag{2}$$

Vergleichen wir (1′) mit (2), so erhalten wir sofort

$$\dot{\omega} \cdot \bar{J} = \dot{\bar{J}} \cdot \omega$$

und

$$\frac{dE_r}{dt} = \omega \cdot \frac{d\bar{J}}{dt}. \tag{III}$$

Die Symmetrie, welche nach (1), (2), (III) zwischen ω und $\bar{J}$ besteht, geht noch weiter.

Man kann die Formeln (II) der Nummer 271 nach $\bar{J}$ offenbar auflösen — es erhellt auch aus der geometrischen Veranschaulichung in Nr. 272, daß zu jedem $\bar{J}$ eindeutig ein ω existiert — und infolgedessen E_r als eine homogene quadratische Funktion von $\bar{J}$ darstellen. Es besteht dann die zu (II) symmetrische Gleichung

$$\bar{\omega} = \frac{\partial E_r(\bar{J})}{\partial \bar{J}}. \tag{IV}$$

Wir beweisen gleich den allgemeinen Satz:

Ist $E(\omega_1 \ldots \omega_n)$ eine Funktion von $\omega_1 \ldots \omega_n$ der Art, daß man die Gleichungen

$$\frac{\partial E}{\partial \omega_\nu} = J_\nu \tag{a}$$

nach den ω auflösen kann und drückt man die Größe

$$L = \sum_\nu J_\nu \omega_\nu - E \tag{b}$$

als Funktionen von J_ν aus, so ist

$$\omega_\nu = \frac{\partial L}{\partial J_\nu}. \tag{c}$$

Zum Beweise bilde man von (b) das vollständige Differential:

$$\sum \frac{\partial L}{\partial J_\nu} dJ_\nu = \sum dJ_\nu \omega_\nu + \sum J_\nu d\omega_\nu - \sum \frac{\partial E}{\partial \omega_\nu} d\omega_\nu.$$

Nach (a) heben sich die beiden letzten Summen fort und es bleibt

$$\sum \frac{\partial L}{\partial J_\nu} dJ_\nu = \sum \omega_\nu dJ_\nu,$$

woraus, da man die dJ_ν als unabhängige Differentiale ansehen muß, die Gleichungen (c) folgen.

In unserem Falle ist vermöge (1)

$$L = E_r$$

und damit der Satz IV mit bewiesen.

Wir werden von dem Satz IV keinen Gebrauch machen, doch ist er für die analytische Weiterbildung der Mechanik durch die Mathematiker des 19. Jahrhunderts fundamental geworden. (Literatur siehe Nr. 105.)

Der Anfänger wolle beachten, daß die Beziehungen, die wir in diesem Paragraphen entwickelt haben, rein mathematische Folgerungen aus den Definitionen darstellen und noch keine naturwissenschaftliche Tatsache enthalten.

Aufgabe 128: Man stelle zu E_r, J und ω in Analogie: $E_t = \frac{1}{2} m\bar{v}^2$; $m\bar{v}$ und $\bar{v}$ und zeige, daß alle Gleichungen dieses Paragraphen ((II) aus Nr. 271, (1), (2), (III), (IV) aus dieser Nummer) auch zwischen E_t, $m\bar{v}$, $\bar{v}$ entsprechend gelten.

Als Lehrbuch der Massenkinematik kommt in erster Linie Heun, Kinematik in Frage; doch findet man das Wichtigste natürlich in allen Lehrbüchern, welche die Bewegung des starren Körpers im Raume behandeln.

§ 49. Kinetik des einzelnen starren Körpers.

274. Die Bewegungsgleichungen. Der einzelne freie starre Körper hat sechs Grade der Freiheit: wir werden also auch sechs skalare Gleichungen brauchen, welche gestatten, seine Bewegung aus den äußeren Kräften zu bestimmen. Als solche Gleichungen können der Schwerpunkts- und der Momentensatz dienen: Beziehen wir letzteren auf den Schwerpunkt, so lauten die Gleichungen

$$m w^* = \mathfrak{S} d\bar{k}. \tag{I}$$

$$\frac{d\bar{J}_s}{dt} = \mathfrak{S}\overline{s d\bar{k}} \equiv \bar{M}_s. \tag{II}$$

Das sind die erforderlichen zwei vektoriellen, d. h. sechs skalaren Gleichungen.

Dürfen wir die äußeren Kräfte als schlechthin gegeben ansehen, so reguliert die erste Gleichung die Bewegung des Schwerpunktes, — über sie ist nichts Neues mehr zu sagen — die letztere die Bewegung um den Schwerpunkt. Denn $\bar{J}$ hängt ja nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen direkt mit $\bar{\omega}$ zusammen.

Kinematisch erscheinen die Aufgaben: die Bewegung des Schwerpunktes und die Drehung um den Schwerpunkt zu bestimmen, vollständig getrennt zu sein; dynamisch wird das allerdings nicht immer der Fall sein: Es kann, wie z. B. beim Luftwiderstand, die Summe der äußeren Kräfte noch von der Stellung und Bewegung um den Schwerpunkt abhängen (infolgedessen Einfluß der Rotation auf die Bewegung eines Geschosses, eines Tennisballes), ebenso kann aber auch $\overline{M}_s$ von der Lage und Bewegung des Schwerpunktes abhängen.

Wir beschäftigen uns zunächst mit der kräftefreien Drehbewegung.

275. Die kräftefreie Drehbewegung. Wir nehmen an, daß entweder bezogen auf den Schwerpunkt $\overline{M}_s = 0$ sei, was z. B. beim freibeweglichen Körper der Fall sein wird, wenn wir vom Luftwiderstand absehen und wir nur die Schwere als räumlich verteilte Kraft wirken lassen, oder daß das Moment in bezug auf einen festen Punkt verschwindet, daß also der Körper etwa um den Schwerpunkt widerstandsfrei drehbar unterstützt sei, etwa auf einer freien Nadelspitze balanciere.

Dann gibt die Momentengleichung (II) sofort

$$\bar{J} = \bar{C},$$

der Impulsvektor ist bei der kräftefreien Drehbewegung konstant nach Größe und Richtung.

Da nach Gleichung (III) des vorigen Paragraphen

$$\frac{dE_r}{dt} = \omega \cdot \frac{d\bar{J}}{dt}$$

ist, so ist auch

$$\frac{dE_r}{dt} = 0,$$

$$E_r = h,$$

auch die Rotationsenergie bleibt konstant.

Nehmen wir nun die anschaulichen Ergebnisse von Nr. 272 zur Hilfe, so können wir uns danach sofort eine Vorstellung von der kräftefreien Bewegung machen:

Weil $\bar{J}$ festbleibt, so bleibt auch die Tangentialebene an das Trägheitsellipsoid im Punkte Ω sich selbst parallel; da ferner J und E_r konstant sind, so bleibt auch der Abstand vom Schwerpunkt (Mittelpunkt des Ellipsoids) fest, mit andern Worten: die fragliche Tangentialebene bleibt vollkommen in Ruhe. Man nennt sie deshalb die invariable Ebene.

Sie wird nach ihrer Bedeutung ständig vom Trägheitsellipsoid berührt und zwar in einem Punkt Ω, der zur Drehachse gehört, der also keine Geschwindigkeit hat. Mit andern Worten:

Die Bewegung erfolgt so, daß das Trägheitsellipsoid auf einer festen Ebene abrollt, ohne zu gleiten. Die Lotrichtung auf diese feste Ebene ist die konstante Richtung des Impulsvektors.

Versuchen wir uns die Bewegung vorzustellen. Nehmen wir zu dem Zwecke zunächst an, das Ellipsoid sei ein Rotationsellipsoid.

Um den Polkegel zu finden, haben wir an das Ellipsoid die Tangentialebenen konstanter Entfernung $\left(\frac{\sqrt{2E_r}}{J}\right)$ zu legen. Diese Ebenen liegen offenbar symmetrisch um die Figurenachse (Symmetrieachse), der Polkegel ist also ein Kreiskegel um die Symmetrieachse. Deshalb bleibt weiter die Länge $S\Omega$ konstant. Und da sie $\frac{\omega}{\sqrt{2E_r}}$ proportional ist und E_r konstant ist, so bleibt auch ω der Größe nach konstant. Den Spurkegel endlich werden wir finden, wenn wir die Punkte der invariabeln Ebene suchen, welche konstante Entfernung $\frac{\omega}{\sqrt{2E_r}}$ von S haben. Sie liegen natürlich in einem Kreise, um den Fußpunkt von $\bar{J}$, also ist der Spurkegel ebenfalls ein Kreiskegel.

Ist das Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid, so ist die kräftefreie Drehbewegung eine Präzessionsbewegung: der Spurkegel hat $\bar{J}$ zur Mittelachse, um $\bar{J}$ laufen die Drehachse mit konstantem ω und die Kreiselachse (Symmetrieachse) im Kreise herum. Ist das Rotationsellipsoid verlängert, so läuft der Polkegel auf dem Spurkegel ab (Fig. 220 a), *beim abgeplatteten Rotationsellipsoid ummantelt der Polkegel den Spurkegel* (Fig. 220 b).

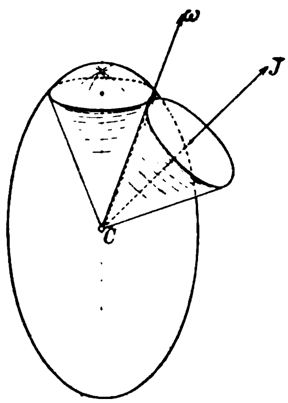


Fig. 220 a.

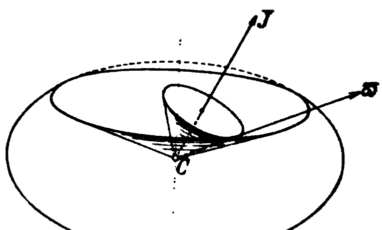


Fig. 220 b.

276. Fortsetzung. Ist das Trägheitsellipsoid kein Rotationsellipsoid, so kann der Polkegel in folgender Weise gefunden werden:

$J^2 =$ const. gibt, wenn wir die Hauptachsen zugrunde legen

$$J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = \text{const.}$$

oder nach Nr. 271

$$A^2\omega_x^2 + B^2\omega_y^2 + C^2\omega_z^2 = \text{const.}$$

Seien x, y, z die Koordinaten des Punktes Ω, so ist $\omega_x = x \cdot \sqrt{2E_r}$ usw. und da E_r konstant ist, so haben wir auch

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = \text{const.} = a^2. \tag{1}$$

Dazu kommt die Gleichung des Ellipsoids

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = \text{const.} = h. \tag{2}$$

Die Gleichungen (1) und (2) zusammen bestimmen eine Kurve vierter Ordnung, die Bahn des Punktes Ω auf dem Ellipsoid.

Den Polkegel bekommen wir, wenn wir (1) mit h und (2) mit a^2 multiplizieren und beide dann voneinander abziehen:

$$(hA^2 - a^2A)x^2 + (hB^2 - a^2B)y^2 + (hC^2 - a^2C)z^2 = 0. \tag{I}$$

Der Polkegel ist ein elliptischer Kegel.

Der x-Achse möge die größte, der y-Achse die mittlere, der z-Achse die kleinste Hauptachse entsprechen, dann ist

$$A < B < C,$$

weil die Hauptachsen $\sqrt{A}$ usw. umgekehrt proportional sind.

Dann muß — es ist dies eine Beschränkung der Konstanten a^2 —

$$hA^2 - a^2A < 0, \quad hC^2 - aC > 0$$

sein, damit der Kegel reell wird, denn es ist sicher

$$hA^2 - a^2A < hB^2 - a^2B < hC^2 - a^2C$$

— anderenfalls wäre z. B. $hB^2 - a^2B < hA^2 - a^2A$, so wäre

$$h(B^2 - A^2) - a^2(B - A) < 0$$

und wegen $B > A$ auch $h(B + A) - a^2 < 0$, also $a^2 > h(B + A)$ und wegen $B + A > C$ (siehe Nr. 247) $a^2 > hC$, der Kegel also sicher nicht reell, weil alle Koeffizienten von (I) negativ würden — und damit (I) nicht lauter positive oder lauter negative Koeffizienten hat, muß der größte positiv, der kleinste negativ sein.

Nun sind drei Fälle denkbar:

$$hB^2 - a^2B \gtreqless 0.$$

Nehmen wir zunächst den Zwischenfall: $hB - a^2 = 0$, so zerfällt (I) das jetzt die Form hat:

$$-A(a^2 - hA)x^2 + C(hC - a^2)z^2 = 0$$

in zwei Ebenen,

$$\frac{x}{z} = \pm\sqrt{\frac{C(hC - a^2)}{A(a^2 - hA)}}$$

oder wegen $a^2 = hB$

$$\frac{x}{z} = \pm\sqrt{\frac{C(C - B)}{A(B - A)}},$$

die sich in der y-Achse kreuzen.

Dieser Fall trennt die beiden andern und sonach werden die möglichen Gestalten der Bahnkurve für Ω auf dem Ellipsoid die folgenden sein:

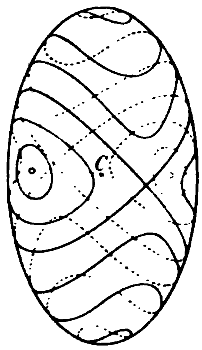


Fig. 221.

In dem Falle $hB^2 - a^2B > 0$ ist der Polkegel ein elliptischer Kegel um die x-Achse, denn die Koeffizienten von y^2 und z^2 haben gleiches Zeichen, die Bahnkurve von Ω ist eine geschlossene Kurve um das lange Ende des Ellipsoides. In dem Falle $hB^2 - a^2B < 0$ ist der Polkegel ein elliptischer Kegel um die z-Achse, die Bahnkurve von Ω eine geschlossene Kurve um das kürzeste Ende des Ellipsoides. In dem Falle $hB^2 - a^2B = 0$ zerfällt die Bahn in zwei ebene Kurven durch die mittlere Achse (Fig. 221).

Die Winkelgeschwindigkeit wird im allgemeinen Falle keineswegs konstant sein. Denn es ist

$$\omega^2 = 2E_r \cdot \overline{S\Omega}^2 = 2E_r(x^2 + y^2 + z^2),$$

es schwankt aber $x^2 + y^2 + z^2$ zwischen zwei Extremen hin und her, die man aus (1) und (2) leicht ausrechnen kann. Das gleiche tut also ω.

Um den Spurkegel zu bestimmen, berechnen wir die Entfernung r des Punktes Ω von dem Durchstoßpunkte H des Impulsvektors mit der invariablen Ebene. Ist die feste Strecke SH gleich b, so ist

$$r^2 = \overline{S\Omega}^2 - b^2,$$

d. h.

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - b^2.$$

Es schwankt also auch r zwischen einem größten und einem kleinsten Werte hin und her. Im allgemeinen wird die Spurbahn von Ω in der invariablen Ebene nicht geschlossen sein, sich vielmehr zwischen zwei konzentrischen Kreisen von den Radien r_{max} und r_{min} um H hin- und herschlängeln. Daher der Name Herpolhodie oder Serpoloide für die Spurkurve (ἕρπειν, serpere kriechen, sich schlängeln). Doch hat die Kurve, wie Heß bewiesen hat, keine Wendepunkte. Wegen weiterer Details sei auf die einschlägige Literatur (siehe Nr. 284) verwiesen.

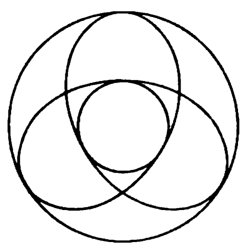


Fig. 222.

277. Stabilität der Bewegung um die Hauptachsen. Setzt man einen starren Körper um irgend eine Achse durch den Schwerpunkt in Rotation und wirken weiter keine Kräfte auf ihn, so wird er sich nach den Ergebnissen der beiden vorigen Nummern im allgemeinen nicht um diese Achse weiterdrehen, vielmehr beschreibt die Drehachse im Körper einen elliptischen (ev. einen Kreis-)Kegel um eine Hauptachse, im Raume einen transzendenten (ev. Kreis-)Kegel um die feste Richtung des Impulsvektors. Nur wenn einmal die Drehachse in eine Hauptachse hineinfiel, bleibt diese Achse dauernd Drehachse, denn dann fällt auch die Impulsachse in die Hauptachse hinein (siehe Nr. 272). Also läßt sich nur um eine Hauptachse kräftefrei eine Drehung aufrecht erhalten, was mit den Ergebnissen von Nr. 218 übereinstimmt.

Aber die Bewegung um die drei Hauptachsen wird nicht immer stabil sein. Denken wir uns die Bewegung ein wenig gestört, sei es durch eine kurze kleine Kraftwirkung, sei es, daß wir als Anfangszustand nicht genau die Rotation um die Hauptachse getroffen haben. Dann wird die Drehachse auf einen benachbarten Kegel übergehen. Nun zeigt aber die Figur von Nr. 276, daß nur für die größte und kleinste Hauptachse der Nachbarkegel dauernd in der Nähe der Hauptachse bleibt, die Bewegung also stabil ist, wie man sagt, während sich bei der mittleren Hauptachse ein beliebig naher Polkegel endlich weit von der Hauptachse entfernt, weshalb wir die Bewegung um die mittlere Hauptachse als instabil (labil) bezeichnen müssen: d. h. die kleinste Störung ruft eine endliche Abweichung der Bewegungsform hervor.

Die Rotation um die größte und kleinste Hauptachse ist stabil, die um die mittlere Achse labil.

Rotiert der Kreisel (d. i. starre Körper) sehr schnell um eine extreme Hauptachse, so besitzt die Bewegung noch einen besonderen Grad von Stabilität, den man am besten als stoßfest bezeichnen könnte. Ist nämlich ω groß, so ist es auch $\bar{J}$, das jetzt ebenfalls in der Hauptachse liegt, und gleich $A\omega$ ist.

Lassen wir nunmehr die kurze Zeit Δt ein starkes Drehmoment $\overline{M}$ wirken, so wird nach der Formel

$$\frac{dJ}{dt} = \overline{M}$$

$\bar{J}$ eine Änderung $\Delta \bar{J} = \int\limits_t^{t+\Delta t} \overline{M}\, dt$ erleiden, die, weil dieses Integral einen mittleren Wert besitzt, bei großem ω klein gegen $\bar{J}$ sein und daher $\bar{J}$ nur sehr wenig aus seiner Richtung bringen wird. In der kurzen Zeit Δt wird der Kreisel seine Lage noch nicht merklich geändert haben, die Figurenachse also noch wesentlich in ihrer alten Lage sein, also Figurenachse und Impulsachse noch dicht beieinander. Dasselbe wird dann nach Figur 220 in Nr. 275 mit der Drehachse der Fall sein, es wird also auch nach dem Stoß dauernd die Drehachse einen kleinen Kegel um das neue $\bar{J}$ beschreiben und dabei die Figurenachse in einem kleinen Kegel mitnehmen, so daß alle drei Achsen dauernd nahe an ihrer alten Stelle bleiben werden.

So wird also selbst ein ziemlich heftiger, aber kurz dauernder Stoß einen rasch rotierenden Kreisel nur unmerklich in seiner Bewegung stören, eine Erscheinung, die als Stabilität oder besser gesagt Stoßfestigkeit des Kreisels bekannt ist.

278. Tendenz zum Parallelismus bei einem dauernd wirkenden Kräftepaar. Lassen wir auf einen rasch laufenden Kreisel dauernd ein konstantes Kräftepaar $\overline{M}$ wirken, so wird nach der Formel

$$\frac{d\overline{J}}{dt} = \overline{M},$$

$\overline{J}$ in jedem Zeitmoment dt eine Änderung

$$d\overline{J} = \overline{M}\,dt$$

erfahren, d. h. es wird die Impulsachse das Bestreben haben, sich der Achse des Kräftepaares parallel und gleichsinnig zu stellen.

Nun ist der Impulsvektor als solcher nicht unmittelbar beobachtbar. Wenn aber der Kreisel (d. i. starre Körper) rasch rotiert, $\overline{M}$ aber nicht ungewöhnlich groß ist, so wird sich $\overline{J}$ langsam ändern, man kann die Bewegung eine kurze Zeitlang angenähert noch als eine kräftefreie auffassen und es werden demnach die Drehachse und die Figurenachse — nehmen wir beispielshalber einen Kreisel von Rotationssymmetrie, für den wir die Rotationsachse auch Figurenachse nennen wollen — immerfort den Impulsvektor rasch im Kreise umlaufen.

Man kann daher für einen sehr rasch laufenden Kreisel die Impulsachse als die mittlere Lage für Rotationsachse und Figurenachse ansehen, wenn $J\omega$ groß ist gegen $\overline{M}$. Unter dieser Voraussetzung wird sich also die Rotationsachse und damit auch die Figurenachse — im Mittel — der Achse des dauernd einwirkenden Kräftepaares parallel und gleichsinnig zu stellen suchen.

Übe ich also z. B. auf einen Kreisel ein um eine Achse linksdrehendes Kräftepaar aus, so wird seine Drehachse die Tendenz zeigen, sich im Mittel der betreffenden Achse parallel zu stellen und zwar so, daß die Drehung des Kreisels linksherum erfolgt.

Diese Tendenz zum gleichsinnigen Parallelismus, wie Klein und Sommerfeld die genannte Erscheinung nennen, ist die Ursache für manche auffallende Erscheinung der Kreiselbewegung.

Rotiert z. B. ein Kreisel um eine vertikale Achse, von oben gesehen linksherum, und übe ich einen Druck von vorn nach hinten auf die Achse aus, und zwar oberhalb des festen Drehpunktes, so bedeutet das ein Moment, dessen Vektor nach links liegt. Es wird also der rasch rotierende Kreisel bei einem solchen Druck nicht etwa nach hinten ausweichen, sondern nach links. (Allerdings nur im Mittel, aber das fällt ja ins Auge!)

Am besten fühlt man sich in die Erscheinung mittels eines Handkreisels ein, d. h. eines Kreisels, dessen verlängerte Achse einen Griff trägt, so daß man ihn anfassen kann (Fig. 223).

Nehme ich den Kreisel in die Hand, halte ihn vertikal und setze ihn, von oben aus gesehen, linksherum in Drehung. Versuche ich dann den Kreisel vornüberzukippen, d. h. übe ich mit der Hand ein Kräftepaar aus, dessen Achse nach links liegt, so schlägt der Kreisel deutlich wahrnehmbar nach links aus. Umgekehrt, wenn ich ihn zwingen will, nach vorn zu kippen, so muß ich ein nach vorn liegendes Drehmoment ausüben, d. h. mit der Hand nach rechts gegendrücken.

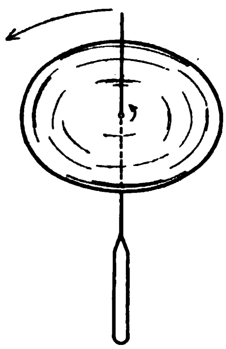


Fig. 223.

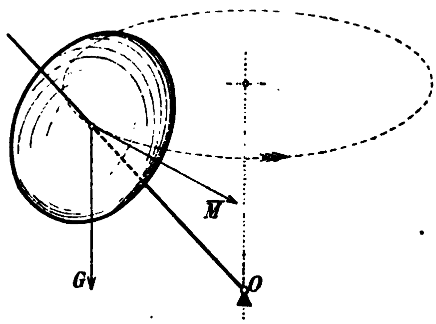


Fig. 224.

279. Der schwere symmetrische Kreisel. Ein symmetrischer Kreisel rotiere um einen festen Punkt O, der nicht der Schwerpunkt sei, vielmehr liege dieser außerhalb auf der Symmetrieachse und zwar oberhalb des Unterstützungspunktes. Ist dann der Kreisel etwas geneigt, so wird die Schwerkraft ein Moment mit horizontaler Achse erzeugen, das den nicht rotierenden Kreisel umwerfen würde. Rotiert aber der Kreisel sehr stark, so wird das stets horizontale M die Folge haben, daß sich der Impulsvektor horizontal im Sinne von $\overline{M}$ fortbewegt, und dabei im Mittel die Rotations- und Figurenachse mitnimmt. Diese werden sich also horizontal weiterbewegen und so kommt die Erscheinung zustande, daß ein schwerer rasch umlaufender Kreisel nicht umfällt, sondern, wenigstens im Groben, eine Präzessionsbewegung ausführt (Fig. 224).

Eine genauere Untersuchung zeigt, daß nur bei ganz besonderen Anfangsbedingungen eine wirkliche Präzessionsbewegung auftritt, im allgemeinen beschreibt die Kreiselspitze eine Art von Zykloidenkurve, die Spitzen nach oben haben oder verschlungen oder gestreckt sein kann, die sich aber bei hinreichend starker Rotation in so kleinem Bereiche abspielt, daß für das Auge eine Präzessionsbewegung da zu sein scheint.

Alles Weitere lese man in den empfohlenen Büchern nach (siehe Nr. 284).

280. Der Kreisel in der Praxis. Man hat die geschilderten Eigenschaften des Kreisels praktisch zu verwerten gesucht, um Fahrzeuge zu stabilisieren.

O. Schlick hatte die Idee, durch einen eingebauten Kreisel die unangenehmen Schwankungen der Schiffe um die Längsachse, das sogenannte Rollen, abzuschwächen. Zu dem Zwecke baute er einen Kreisel ein, der sich in der Normallage um eine vertikale Achse drehen kann in einem Rahmen, der selbst wieder um eine horizontale Querachse schwingen kann. Da das Schiff dann noch um eine horizontale Längsachse schwingt, so hat der Kreisel alle Möglichkeiten sich zu drehen.

Rollt nun das Schiff sagen wir nach rechts, so nimmt es zunächst den Rahmen mit und übt deshalb auf diesen und damit auch auf den Kreisel ein Kräftepaar aus, dessen Achse nach vorne liegt. Infolgedessen schlägt die Drehachse des Kreisels nach vorne aus. So wird Energie auf den Kreisel übertragen, dem Schiffe entzogen und dessen Bewegung zunächst sicherlich abgeschwächt. Beim Rückgang des Schiffes wird die Bewegung aber umgekehrt sein, und damit nun nicht die ganze Energie wieder an das Schiff übergeht, muß sie inzwischen vernichtet werden, was dadurch geschieht, daß man die Pendelung des Rahmens um die horizontale Achse stark dämpft. Damit sich der Kreisel stets wieder von selbst in die normale Stellung zurückbegiebt, nachdem er funktioniert hat, muß er schwer sein, d. h. sein Schwerpunkt muß unterhalb der Drehachse des Rahmens liegen.

Schlick hat bei einigen Schiffen, die sonst stark rollten und bei unruhiger See Ausschläge bis zu 18° zeigten, sehr gute Erfolge erzielt, indem die Ausschläge fast bis auf 1° heruntergingen.

Wir kommen in Nr. 332, 332a und § 57 noch einmal auf den Schiffskreisel zurück.

Bekannt ist auch das Patent von O. Brennan und seine Idee der Einschienenbahn: Es soll ein Fahrzeug auf einem Geleise laufen und gegen Umkippen durch einen rasch laufenden Kreisel stabilisiert werden. Prinzipiell ist die Wirkung dieselbe wie beim Schiffskreisel; der Unterschied besteht nur darin, daß das Schiff an sich schon stabil ist und seine Stabilität gewissermaßen nur verstärkt werden soll, während die Einschienenbahn an sich labil ist. Die genauere Theorie zeigt nun, daß dieser Umstand bedingt, daß auch jetzt der Kreisel an sich instabil sein muß, d. h. daß sein Schwerpunkt oberhalb der Drehachse des Rahmens liegen muß. Es liegt diesbezüglich ein ganz allgemeiner Satz William Thomsons vor:

Man kann durch Kreisel immer nur eine gerade Anzahl von Freiheitsgraden stabilisieren, nie eine ungerade.

Eine Folge diees Satzes ist es auch, daß ein Kreisel, der auf einer Spitze steht, durch Rotieren stabil wird, denn er hat zwei Möglichkeiten des Umfallens, ein Kreisel aber, der auf einer Schneide balanciert (wenn man z. B. den Rahmen des Brennanschen Kreisels feststellt) und also nur um eine Achse umfallen kann, nicht.

Aus demselben Grunde kann ein Fahrrad bei losem Vorderrad im Laufe stabil sein, bei festgestelltem dagegen nicht.

Wir begnügen uns hier mit der qualitativen Beschreibung dieser Apparate, auf die Theorie kommen wir später noch einmal zurück.

Auch bei Luftfahrzeugen spielt die Kreiselwirkung der Schrauben eine gewisse Rolle. Habe ein Aeroplan eine horizontale Schraube, die sich von vorne gesehen, linksherum drehe. Will dann der Fahrer nach links wenden, so muß er durch die Seitensteuer ein Moment auf das Fahrzeug ausüben lassen, dessen Vektor nach oben gerichtet ist. Infolgedessen wird sich die Drehachse und damit das ganze Fahrzeug nach oben aufkippen, was durch eine gleichzeitige Handhabung des Höhensteuers zu verhindern oder doch in geringen Schranken zu halten ist. Hat man, wie die Brüder Wright, zwei entgegengesetzt laufende Schrauben, so hebt sich die Wirkung natürlich auf.

Es sei noch auf den Aufsatz von Prandtl in den ersten Heften der „Zeitschrift für Motorluftschiffahrt und Flugtechnik“ und damit zugleich auf diese Zeitschrift selbst hingewiesen.

Es besteht auch die Absicht, die Stabilität des Kreisels als richtungsanzeigend zu benutzen, z. B. Kompaßnadeln als Kreisel auszubilden statt der Magnete. Man wäre dann von den magnetischen Störungen durch Eisenteile usw. befreit, müßte allerdings dabei Sorge tragen, daß der Kreisel möglichst reibungsfrei eine allgemeine Drehbewegung ausführen kann.

Soll ein Kreisel in dieser Weise dazu dienen, möglichst genau eine Richtung beizubehalten und also auch anzuzeigen, so nennt man ihn einen Gyrostaten, auch Gyroskopen. Ihm kommt als solchem eine Bedeutung für die Erkenntnistheorie der Mechanik zu. Er wäre ein Mittel, um objektiv die Drehung der Erde festzustellen, oder, allgemein gesagt, eine feste Richtung im absoluten Raum anzuzeigen. Allerdings sind die Fehlerquellen noch recht erheblich. (Siehe einen Aufsatz von Föppl in den Berichten der bayerischen Akademie.) Prinzipiell ist aber zu beachten, daß erst durch solche Ergebnisse, wie die Gesetze des Gyrostaten, der absolut ruhende Raum mechanisch seine Bedeutung vor jedem andern Raume erhält, auf den man an sich ebensogut d. h. rein kinematisch die Bewegung beziehen könnte.

281. Die Eulerschen Gleichungen. Für eine mathematische Durchrechnung der Probleme ist die Grundgleichung

$$\frac{d\bar{J}}{dt} = \bar{M} \tag{I}$$

deshalb in der Regel nicht praktisch, weil die Ableitung $\frac{d}{dt}$ durchaus auf ruhende Achsen zu beziehen ist. Und wenn auch die Formeln (II′) aus Nr. 271 auch für solche Achsen richtig bleiben, so sind doch dann die T und D variabel.

Es ist deshalb besser, die Momentengleichung so umzuformen, daß in ihr die zeitliche Änderung bezüglich eines im Körper festen Koordinatensystems steht, für das dann die D und T konstant sind. Nun ist aber nach Nr. 268

$$\frac{d\bar{J}}{dt} = \frac{\mathfrak{d}\bar{J}}{\mathfrak{d}t} + \overline{\omega J},$$

wo jetzt $\frac{\mathfrak{d}\bar{J}}{\mathfrak{d}t}$ die Änderungsgeschwindigkeit des Impulsvektors im bewegten Körper bedeutet und somit erhalten wir als eine (I) gleichwertige, aber vielfach bequemere Bewegungsgleichung

$$\frac{\mathfrak{d}\bar{J}}{\mathfrak{d}t} + \overline{\omega J} = \bar{M}, \tag{I′}$$

die man nach **Euler** zu benennen pflegt.

Nehmen wir die Hauptachsen als Koordinatenachsen, so zerfällt vermöge

$$J_x = A\omega_x \text{ usw., und } (\overline{\omega J})_x = \omega_y J_z - \omega_z J_y = \omega_y \omega_z (C - B)$$

Gleichung (I′) in die folgenden drei

$$\left.\begin{aligned} A\frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y\omega_z(C - B) &= M_x \\ B\frac{d\omega_y}{dt} + \omega_z\omega_x(A - C) &= M_y \\ C\frac{d\omega_z}{dt} + \omega_x\omega_y(B - A) &= M_z \end{aligned}\right\} \tag{I″}$$

Zu diesen Gleichungen für die ω treten dann noch die Gleichungen (I″) aus Nr. 265

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \cos\psi\dot{\vartheta} + \sin\psi\sin\vartheta\cdot\dot{\varphi} \\ \omega_y &= -\sin\psi\cdot\dot{\vartheta} + \cos\psi\sin\vartheta\dot{\varphi} \\ \omega_z &= \cos\vartheta\cdot\dot{\varphi} + \dot{\psi}, \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

welche den Übergang von ω zu den Koordinaten ϑ, φ, ψ gestatten.

Enthält $\bar{M}$ die ϑ, φ, ψ nicht, so kann man (I″) für sich integrieren und dann ϑ, φ, ψ als Funktionen von t aus (II) finden; andernfalls sind die Gleichungen (I″) und (II) gleichzeitig als sechs Differentialgleichungen erster Ordnung für die sechs Variabeln ω_x, ω_y, ω_z, ϑ, φ, ψ zu behandeln.

282. Analytische Behandlung der kräftefreien Bewegung des symmetrischen Kreisels. In diesem Falle sind die $M_x, M_y, M_z = 0$, die z-Achse sei die Symmetrieachse, so daß $A = B$ ist. Es lauten die Eulerschen Gleichungen für diesen Fall

$$A\frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y\omega_z(C - A) = 0,$$

$$A\frac{d\omega_y}{dt} + \omega_z\omega_x(A - C) = 0,$$

$$\frac{d\omega_z}{dt} = 0.$$

Aus der letzteren folgt $\omega_z =$ const; man kann stets $\omega_z > 0$ annehmen durch geeignete Festsetzung der z-Achse, $\bar{\omega}$ hat also eine konstante Komponente nach der Figurenachse. Setzt man zur Abkürzung

$$\omega_z\frac{C-A}{A} = \alpha,$$

so lauten die beiden ersten Gleichungen

$$\frac{d\omega_x}{dt} + \alpha\omega_y = 0,$$

$$\frac{d\omega_y}{dt} - \alpha\omega_x = 0,$$

deren Integral ist

$$\omega_x = a\cos(\alpha t + \varepsilon),$$

$$\omega_y = a\sin(\alpha t + \varepsilon),$$

mit a und ε als Integrationskonstanten ($a > 0$). Man erkennt aus dem Ergebnis das alte Resultat als richtig:

1. $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{a^2 + \omega_z^2}$ ist konstant.

2. Die Projektion von $\bar{\omega}$ auf die xy-Ebene hat die konstante Größe a und läuft im Kreise gleichförmig herum, die Umlaufszeit ist $\tau_0 = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi\frac{A}{C-A}\cdot\frac{1}{\omega_z}$.

3. In derselben Zeit läuft die Drehachse ($\bar{\omega}$) auf einem Kreiskegel herum.

Für die Erde gibt das, da $\omega_z = 2\pi$ pro Tag, eine Umlaufszeit von $\frac{A}{C-A}$ Tagen, das sind aber, soweit man A, C genau schätzen kann, etwa 300 Tage (die Eulersche Periode). Von dieser Periode hat man aber nichts entdeckt, dagegen die Chandlersche von etwa 427 Tagen; und es ist gelungen, diese als eine durch die Elastizität der Erde bedingte modifizierte Eulersche Periode zu erkennen (siehe Klein-Sommerfeld Bd. III).

Von den Gleichungen (II) der vorigen Nummer genügt es nun immer, ein partikuläres Integral zu suchen, denn das allgemeine Integral hat drei Integrationskonstanten, über die man aber stets willkürlich verfügen kann, indem man das im Raume feste Achsensystem geeignet wählt.

Indem wir uns entschließen, die z-Achse des räumlichen Systems in die feste Impulsrichtung hineinzulegen, versuchen wir den Ansatz: $\vartheta = \vartheta_0$, d. h. konstant, und erhalten

$$\sin\psi \sin\vartheta_0 \dot\varphi = a\cos(\alpha t + \varepsilon),$$

$$\cos\psi \sin\vartheta_0 \dot\varphi = a\sin(\alpha t + \varepsilon),$$

$$\dot\psi + \dot\varphi \cos\vartheta_0 = \omega_z.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen schließt man

$$\sin\vartheta_0 \cdot \dot\varphi = a,$$

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \alpha t - \varepsilon$$

(die andere Möglichkeit $\sin\vartheta_0\dot\varphi = -a$, $\psi = \frac{3\pi}{2} - \alpha t - \varepsilon$ kann man durch geeignete Wahl der im Raume festen y-Achse ausschließen). Das, in die letzte Gleichung eingesetzt, gibt

$$-\alpha + \frac{a}{\sin\vartheta_0}\cos\vartheta_0 = \omega_z,$$

d. h.

$$\operatorname{tg}\vartheta_0 = \frac{a}{\omega_z + \alpha} = \frac{a}{\omega_z}\frac{A}{C}. \tag{1}$$

Damit ist die Integration vollzogen. Auch der Spurkegel ist bestimmt. Denn ϑ_0 ist der Winkel zwischen der Impulsachse und der Figurenachse, der Winkel β zwischen dieser und der Drehachse ist aber durch

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a}{\omega_z} \tag{2}$$

gegeben.

Ist nun $\alpha > 0$, d. h. $C > A$, das Ellipsoid also abgeplattet, so liegt die Impulsachse zwischen Drehachse und Figurenachse, also ist der Winkel des Spurkegels

$$\gamma = \beta - \vartheta_0$$

und nach (1) und (2)

$$\operatorname{tg}\gamma = a\omega_z\frac{C - A}{C\omega_z^2 + Aa^2}.$$

Ist dagegen $\alpha < 0$, $C < A$, das Ellipsoid gestreckt, so ist

$$\gamma = \vartheta_0 - \beta \text{ und } \operatorname{tg}\gamma = -a\omega_z\frac{C - A}{C\omega_z^2 + Aa^2}.$$

Also ist auf jeden Fall der Winkel γ des Spurkegels gegeben durch

$$\operatorname{tg}\gamma = a\,\omega_z \frac{|C - A|}{C\omega_z^2 + A a^2}\,.$$

Die analytische Behandlung des unsymmetrischen Kreisels führt auf elliptische Integrale, desgleichen die Theorie des symmetrischen schweren Kreisels. Das weitere mag man bei Klein und Sommerfeld oder in der anderen angeführten Literatur nachlesen (siehe Nr. 284).

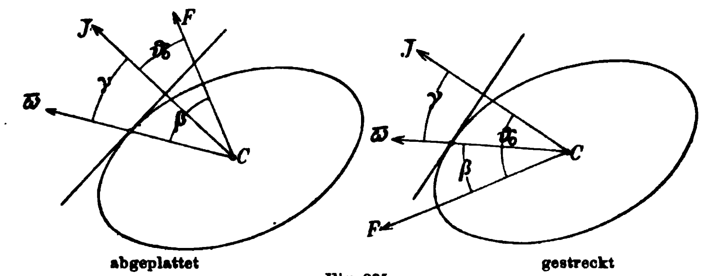


Fig. 225.

Aufgaben: 124. Ein Kreisel bestehe aus einer Zylinderscheibe von 10 cm Durchmesser und 1 cm Höhe und habe das spezifische Gewicht 8. Er rotiere um die Symmetrieachse mit einer Geschwindigkeit von 1000 Touren pro Minute. Man berechne die Hauptträgheitsmomente $A = B$ und C sowie die Größe des Impulsvektors $\bar{J}$.

125. Der eben genannte Kreisel erfahre bei der geschilderten Bewegung einen Stoß am Rande parallel der Achse eine sehr kurze Zeit Δt hindurch mit einer solchen Kraft k, daß das Zeitintegral der Achse über Δt gleich 0,1 kg-Sec sei. Welche Bewegung wird nach dem Stoße eintreten? Δt sei so klein, daß man in der Zeit Δt eine Verlagerung der Kreiselachse nicht anzunehmen braucht. (Näheres über Stoßprozesse siehe § 52.)

283. Deviationswiderstand eines geführten symmetrischen Kreisels. Wir sahen schon früher (siehe Nr. 278), daß ein Kreisel, der sich schnell um seine Figurenachse dreht, und dessen Achse man zu neigen versucht, ein Moment dazu erfordert, das in der Bewegungsebene der Figurenachse liegt und so gerichtet ist, daß sich die Figurenachse auf seine Richtung zu bewegt. Dieses Moment, d. h. genauer gesagt, sein Gegenteil, das die Führung auszuhalten hat, wollen wir mit Klein-Sommerfeld Deviationswiderstand nennen und zu berechnen suchen. Es sei also $A = B$, ω_z groß und fest gegeben, dagegen

$$\omega_x = \omega_0 \cos \omega_z t,$$

$$\omega_y = -\,\omega_0 \sin \omega_z t,$$

ω_x, ω_y bedeuten also die Komponenten eines Vektors, der im Körper mit der Winkelgeschwindigkeit $-\,\omega_z$ in der xy-Ebene umläuft. Da sich aber die xy-Ebene mit dem Körper, also mit der Geschwindigkeit ω_z umdreht, bedeuten ω_x, ω_y die Komponenten eines im Raume festen Vektors der Größe ω_0 senkrecht zu ω_z, also eine Drehung um eine im Raume feste Achse. ω_0 mag noch von der Zeit abhängen.

Dann geben die beiden ersten Eulerschen Gleichungen

$$A\dot{\omega}_0 \cos\omega_z t - \omega_0\omega_z C \sin\omega_z t = M_x,$$

$$-A\dot{\omega}_0 \sin\omega_z t - \omega_0\omega_z C \cos\omega_z t = M_y.$$

Man erkennt daraus:

Erstens tritt ein Moment auf bei nicht konstanten ω_0, gleich $A\dot{\omega}_0$, das dieselbe Richtung hat wie die Drehung ω_0.

Zweitens tritt ein Moment auf von der Größe $\omega_0\omega_z C$, das senkrecht zu ω_0 und senkrecht zu ω_z steht und dessen Gegenteil der gesuchte Deviationswiderstand ist. Der Sinn dieses Widerstandes ist klar.

Um einen mit ω_z um die Figurenachse rotierenden Kreisel um eine Achse senkrecht zur Figurenachse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_0 zu drehen, bedarf es eines Momentes $C\omega_0\omega_z$, dessen Achse senkrecht zur Figurenachse und zur Drehachse ω_0 steht und zwar so, daß sich bei der Drehung ω_0 die Figurenachse auf die Momentenachse zu bewegt. Das Gegenteil dieses Momentes ist der Deviationswiderstand.

Betrachten wir als Beispiel die Schiffsschraube in einem stampfenden Schiff. Ihre relative Winkelgeschwindigkeit zum Schiff sei ω_z, die Winkelgeschwindigkeit des stampfenden Schiffes (also um die horizontale Querachse) sei ω_0. Man kann angenähert setzen

$$\omega_0 = n\alpha \cos nt,$$

wo $\frac{2\pi}{n}$ die Schwingungsdauer des Stampfens ist, α die Amplitude dieser Schwingung. Dann hat also das Lager zunächst einmal das Moment $A\dot{\omega}_0 = -An^2\alpha \sin nt$ um die Querachse (Drehachse des Stampfens) auszuhalten (auch bei ruhender Schraube); dann aber noch bei rotierender Schraube den Deviationswiderstand

$$C\omega_0\omega_z = C\omega_z n\alpha \cos nt$$

um eine im Schiff feste Achse, die normalerweise vertikal steht.

Außer diesen Kräftepaaren wirkt natürlich noch auf das Lager der Schraube eine resultierende Einzelkraft die aus der Bewegung des Schwerpunktes der Schraube (inkl. Welle) zu berechnen ist. Dabei spielt die Rotation keine Rolle.

284. Literatur. Eine erste umfassende Darstellung der räumlichen Bewegung des starren Körpers gab Euler in seiner „Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum" vom Jahre 1765. Poinsot und die schon genannten Möbius, Chasles, Giorgini taten sehr viel zur geometrischen Veranschaulichung und Weiterbildung der von Euler zunächst nur rechnerisch entwickelten Sätze. Eine sehr gute, wenn auch rein rechnerisch-abstrakte Darstellung findet sich in Kirchhoffs Mechanik. Die konkret-anschauliche Tradition lebte in England weiter; namentlich Routh und Lord Kelvin (William Thomson) gaben ausgezeichnete Darstellungen in ihren in der Einleitung genannten Werken. Ihr Interesse wurde namentlich durch die physikalische Anwendbarkeit der Kreiseltheorie erweckt: wer eine gute populäre Darstellung der Theorie und ihrer hauptsächlichen physikalischen Anwendungen lesen will, sei auf Perrys kleines Buch: „Drehkreisel", deutsch von H. Walzel, hingewiesen. Neuerdings gab die technische Anwendbarkeit des Kreisels einen neuen Anstoß ihn zu studieren: das allgemeine Interesse wendet sich ihm zu, und da ist es erfreulich, berichten zu können, daß soeben 1910 das Werk von Klein-Sommerfeld, „Theorie des Kreisels" in vier Lieferungen fertig vorliegt. Die erste Lieferung dieser umfassenden Darstellung enthält die Kinematik sowie die Elemente und Prinzipien der Kinetik, die zweite Lieferung die rechnerische Durchführung für den schweren symmetrischen Kreisel, die dritte den Einfluß von Reibung, Luftwiderstand usw. sowie astronomische und geophysikalische Anwendungen, die vierte endlich in ziemlich elementarer Form — die genaue Kenntnis des schwierigeren zweiten Bandes ist dazu nicht erforderlich — die technischen Anwendungen (vgl. Nr. 280).

Eine gute Darstellung findet sich auch in dem in der Einleitung genannten Buche von Webster; aus der Encyklopädie d. math. Wiss. kommt der Artikel IV, 6 von Stäckel besonders in Frage.

§ 50. Energie und Arbeit beim starren Körper.

285. Die Energiegleichung für den starren Körper. Nach Nr. 245 ist *die Arbeit einer beliebigen Kraftgruppe am starren Körper in der Zeit dt*

$$dA = \overline{K} \cdot d\bar{c} + \overline{M} \cdot d\bar{\chi}, \qquad \text{(I)}$$

folglich die Leistung:

$$L = \overline{K} \cdot \bar{\dot{c}} + \overline{M} \cdot \omega. \qquad \text{(I')}$$

Nun gelten weiter für den starren Körper die Bewegungsgleichungen

$$\mathrm{S}\, dm \bar{w} = \overline{K}$$

und bezogen auf einen beliebigen Punkt C

$$\mathrm{S}\, dm(r - c)w = M,$$

wo K und $\overline{M}$ die Summe bzw. die Momentensumme der äußeren an ihm angreifenden Kräfte sind. Verbinden wir diese Gleichungen mit (I'), so bekommen wir

$$\mathsf{S}\, dm\bar{w} \cdot \dot{c} + \mathsf{S}\, dm\overline{(r-c)w} \cdot \dot{\omega} = L,$$

wo L die Leistung der äußeren Kräfte ist.

Geht man die Überlegung der Nr. 245 einmal von rückwärts durch, so erkennt man leicht, daß auf der linken Seite obiger Gleichung die gesamte Leistung der Massenbeschleunigung steht, nämlich

$$\mathsf{S}\, dm\bar{w} \cdot (\dot{\bar{c}} + \overline{\omega(r-c)}) = \mathsf{S}\, dm\bar{w} \cdot \bar{v}.$$

Dieser Ausdruck ist aber identisch gleich $\frac{dE}{dt}$. Damit haben wir den Energiesatz abgeleitet

$$\frac{dE}{dt} = L. \tag{II}$$

Die Änderungsgeschwindigkeit der kinetischen Energie ist beim einzelnen starren Körper gleich der Leistung der äußeren Kräfte.

Oder integriert

$$E - E_0 = \int_{t_0}^{t} dA. \tag{II'}$$

Haben speziell die äußeren Kräfte ein Potential U, so daß

$$\int_{t_0}^{t} dA = -U + U_0$$

ist, so nimmt der Energiesatz die Form an

$$E + U = \text{const.} \tag{II''}$$

286. Die Arbeit der inneren Kräfte. Wollte man den Satz (II) so aussprechen, daß auf der rechten Seite die Leistung aller Kräfte stände, so hätte man eine triviale Folgerung des Energiesatzes der Punktmechanik: gilt für jedes Massenelement eines Körpers der Energiesatz, so folgt er durch einfache Addition für den gesamten Körper in der Form, daß rechts die Leistung aller Kräfte steht.

Das Neue unseres Satzes besteht also darin, daß die inneren Spannungen eines starren Körpers keine Arbeit leisten.

Diesen Satz können wir nun sofort dahin ausdehnen, daß

die inneren Spannungen eines starren Körpers bei keiner wie auch immer gedachten Bewegung des starren Körpers Arbeit leisten.

Der Beweis ist wesentlich schon in der vorhergehenden Betrachtung aus Nr. 285 mitgeliefert: Sei für jedes Volumelement

$$dm\bar{w} = d\bar{k} + d\bar{s}, \tag{1}$$

wo $d\bar{s}$ die Summe der an einem Element angreifenden inneren Spannungen bedeutet, so ist auch bei irgendeiner (eventuell bloß gedachten) Bewegung

$$\mathop{\mathrm{S}} dm\bar{w}\cdot\bar{v} = \mathop{\mathrm{S}} d\bar{k}\cdot\bar{v} + \mathop{\mathrm{S}} d\bar{s}\cdot\bar{v}.$$

Nun ist aber nach der vorhergehenden Nummer die Summe links gleich der ersten Summe rechts, denn im Beweise wurde nirgends davon Gebrauch gemacht, daß etwa $\bar{v}$ die wahre Bewegung des Körpers sei; es mußte nur $\bar{v} = \bar{c} + \overline{\omega(r-c)}$ sein, wobei aber $\bar{c}$ irgendeine Geschwindigkeit des Punktes C, $\bar{\omega}$ irgendeine Drehgeschwindigkeit um C sein kann. Also bleibt

$$\mathop{\mathrm{S}} d\bar{s}\cdot\bar{v} = 0$$

übrig.

Dieser Satz läßt sich umkehren,

d. h. machen wir die Voraussetzung, daß bei keiner wie immer gedachten Bewegung die inneren Spannungen Arbeit leisten, so folgt daraus der Schwerpunktssatz und der Momentensatz für den starren Körper:

Denn aus dem Newtonschen Grundgesetz (I) folgt jetzt

$$\mathop{\mathrm{S}} dm\bar{w}\cdot\bar{v} = \mathop{\mathrm{S}} d\bar{k}\cdot\bar{v}$$

und wegen

$$\bar{v} = \bar{c} + \overline{\omega(r-c)}$$

$$\bar{c}\cdot\mathop{\mathrm{S}} dm\bar{w} + \bar{\omega}\cdot\mathop{\mathrm{S}} dm\overline{(r-c)w} = \bar{c}\cdot\bar{K} + \bar{\omega}\cdot\bar{M}.$$

Diese Gleichung gilt nun für alle denkbaren Bewegungen, d. h. für alle Vektoren $\bar{c}$ und $\bar{\omega}$, unabhängig davon, was das $\bar{w}$ ist; das geht aber nur, wenn

$$\mathop{\mathrm{S}} dm\bar{w} = \bar{K},$$

$$\mathop{\mathrm{S}} dm\overline{(r-c)w} = \bar{M}$$

ist, womit Schwerpunkts- und Momentensatz zurück gewonnen sind.

Diese Überlegung ist grundlegend für das später zu besprechende Prinzip der virtuellen Arbeiten.

287. Andere Ableitung des Energiesatzes. Bezogen auf den Schwerpunkt als Translations- und Momentenpunkt war nach Nr. 270

$$E = E_t + E_r.$$

Nun ist aber

$$\frac{dE_t}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}m\bar{v}^{*2} = m\bar{v}^*\cdot\bar{w}^* = \bar{v}^*\cdot\bar{K}.$$

Ferner war nach Gleichung (III) aus Nr. 273

$$\frac{dE_r}{dt} = \bar{\omega} \cdot \frac{d\bar{J}}{dt} = \bar{\omega} \cdot \overline{M}_s.$$

Addieren wir beide Gleichungen, so erhalten wir sofort

$$\frac{dE}{dt} = \bar{v}^* \cdot \overline{K} + \bar{\omega} \cdot \overline{M}_s = L,$$

d. h. den Energiesatz.

288.[1]) **Direkter Nachweis des Satzes über die inneren Spannungen.** Die gesamte an dem Volumelement dV angreifende innere Spannung $d\bar{s}$ ist, wenn dV ganz im Innern liegt, nach Nr. 204:

$$dV\left(\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z}\right),$$

gehört aber dV der Oberfläche an, so ist von diesem Ausdruck $dF\bar{\sigma}_\nu$ als äußere Kraft abzuziehen. Mithin ist die Leistung der inneren Spannungen

$$L_i = \int dV\left(\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z}\right) \cdot \bar{v} - \int dF \cdot \bar{\sigma}_\nu \cdot \bar{v}.$$

Nun läßt sich aber nach dem Gaußschen Satze in Verbindung mit der Methode der partiellen Integrationen das Volumintegral umformen in das Oberflächenintegral $\int dF\bar{\sigma}_\nu \cdot \bar{v}$ (unter Berücksichtigung der Gleichung (III) aus Nr. 205) und in das Volumintegral

$$-\int dV\left(\bar{\sigma}_x \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{\sigma}_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{\sigma}_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right).$$

Weiter ist nach der Eulerschen Formel

$$\bar{v} = \bar{c} + \omega(\overline{r - c}),$$

woraus sich mit Benutzung der Einheitsvektoren $\bar{\varepsilon}_x$, $\bar{\varepsilon}_y$, $\bar{\varepsilon}_z$ vermöge $\bar{r} = x\bar{\varepsilon}_x + y\bar{\varepsilon}_y + z\bar{\varepsilon}_z$ ergibt

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = \omega \varepsilon_x \text{ usw.}$$

Somit wird die Leistung der inneren Kräfte

$$L_i = -\int dV(\bar{\sigma}_x \cdot \omega\bar{\varepsilon}_x + \bar{\sigma}_y \cdot \bar{\omega}\varepsilon_y + \bar{\sigma}_z \cdot \overline{\omega\varepsilon_z})$$

oder

$$L_i = -\int dV \cdot \bar{\omega} \cdot (\bar{\varepsilon}_x\bar{\sigma}_x + \overline{\varepsilon_y\sigma_y} + \overline{\varepsilon_z\sigma_z}).$$

Dieser Ausdruck verschwindet aber, weil die Klammer unter dem Integral auf Grund des Axioms der Symmetrie der Spannungsdyade verschwindet (siehe Nr. 207 und 208).

---

1) Diese Nummer kann der Anfänger auslassen.

Damit ist nochmals bewiesen, daß die inneren Spannungen am starren Körper bei keiner möglichen Bewegung desselben Arbeit leisten. Denn auch hier haben wir nicht davon Gebrauch gemacht, daß $\bar{c}$ und $\bar{\omega}$ die wirklichen Geschwindigkeiten sind, es können das irgendwelche Vektoren sein, die nicht vom Orte abhängen.

§ 51. Kinetik der Relativbewegung.

289. Einführung der Scheinkräfte. Etwas prinzipiell neues ist über die Kinetik der Relativbewegung nicht zu sagen: es bleibt selbstverständlich die Newtonsche Grundgleichung richtig

$$dm\bar{w} = d\bar{k},$$

wobei $\bar{w}$ die absolute Beschleunigung ist.

Nun ist aber, wenn eine Bewegung relativ zu einem selbst bewegten Körper stattfindet, nach Nr. 269

$$\bar{w} = \bar{w}_r + \bar{w}_c + \bar{w}_f.$$

Daraufhin können wir die Newtonsche Grundgleichung so schreiben:

$$dm\bar{w}_r = d\bar{k} - dm\bar{w}_c - dm\bar{w}_f,$$

d. h. wir können sie so interpretieren, daß wir nur die Relativbeschleunigung als eigentliche, etwa (vom Körper aus) direkt beobachtbare Beschleunigung auffassen, für sie die Newtonsche Grundgleichung hinschreiben, nun aber, um den Fehler wett zu machen, zwei Scheinkräfte hinzufügen:

$-dm\bar{w}_c = -dm2\overline{\omega v_r}$ die Corioliskraft und

$-dm\bar{w}_f$ die Führungskraft.

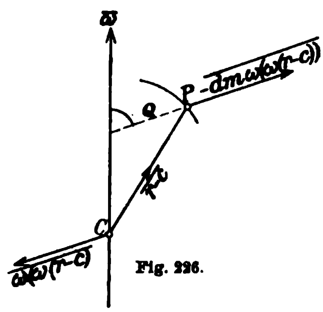


Fig. 226.

Letztere besteht, gemäß der Formel

$$\bar{w}_f = \ddot{\bar{c}} + \overline{\dot{\omega}(\bar{r} - \bar{c})} + \overline{\omega(\overline{\omega(\bar{r} - \bar{c})})}$$

noch einmal aus drei Teilen, von denen wir den letzten Teil

$$-dm\overline{\omega(\overline{\omega(\bar{r} - \bar{c})})},$$

der immer auf der Drehachse $(\bar{\omega})$ senkrecht steht, die Größe $\omega^2 \varrho\, dm$ hat (ϱ Entfernung des Punktes von der Achse) und nach außen gerichtet ist, allgemein Zentrifugalkraft nennen (Fig. 226).

Rotiert der führende Körper gleichmäßig um eine feste Achse, so sind $\ddot{\bar{c}}$ und $\dot{\bar{\omega}}$ Null und es bleiben von den Scheinkräften nur die Corioliskraft und die Zentrifugalkraft übrig.

Der Anfänger wolle beachten, daß das aber keine wirklichen Kräfte sind, sondern Zusatzglieder zu den Kräften, die wir deshalb hinzufügen müssen, weil wir es für bequem gefunden haben, im Grundansatz zunächst einen Fehler zu machen. Darum nennen wir die Zusätze Scheinkräfte. Ihre Verwechslung mit wirklichen Kräften hat schon viel Verwirrung angerichtet.

290. Anwendung auf Bewegungen auf der Erde. Da bei der langsamen Drehung der Erde die Scheinkräfte ohnehin klein sind, kann man die geringen Schwankungen der Erdachse vernachlässigen, d. h. $\dot{\omega} = 0$ setzen. Auch $\ddot{\bar{c}}$, die Beschleunigung der Erde, ist sehr klein, sie ist ja durch die Anziehungskraft der Sonne, der Planeten und Monde bestimmt und setzt sich also aus Teilen vektoriell zusammen, welche auf die Gestirne zu gerichtet und gleich $\Gamma \frac{M}{r^2}$ sind, wo M die Masse des Gestirns, r dessen augenblickliche Entfernung ist. Von diesen Größen sind nur zwei von einigem Belang für Körper auf der Erde:

1. der Anteil der Sonne wegen der Größe von M; er beträgt nach den Angaben aus Nr. 34 etwa 0,006 m/Sec^2 = 6 mm/Sec^2; die entsprechende Scheinkraft auf ein Gramm macht also noch nicht ein Dyn aus,

2. der Anteil des Mondes wegen des verhältnismäßig kleinen r; er beträgt, da die Mondmasse etwa $39 \cdot 10^{-9}$ mal der Sonnenmasse, die Mondentfernung etwa $\frac{1}{387}$ der Sonnenentfernung ist, $39 \cdot 10^{-9} \cdot 387^2 = 0{,}0058$ von dem Anteil der Sonne. So klein diese Größen sind, so sind sie doch wichtig für die Theorie von Ebbe und Flut. Betrachten wir z. B. die Anziehung des Mondes auf das Wasser der Erde, so haben wir, wenn wir die Bewegung relativ zur Erde betrachten wollen, eine Scheinkraft hinzuzufügen: $dm\,\Gamma \frac{M}{r^2}$, welche vom Monde weggerichtet ist (entsrechend $- dm\ddot{\bar{c}}$). Diese ist kleiner als die Anziehung des Mondes auf die ihm naheliegenden Wasserteile, aber größer als die Anziehung auf die entfernten. Letztere werden also im Resultat scheinbar abgestoßen, woher es kommt, daß wir immer auf der Erde zwei Wellenberge und zwei Wellentäler der Flut haben.

Es kommen also für irdische Objekte immer nur die Differenzen der Beschleunigungen in Frage, welche ihnen Sonne und Mond erteilen, gegen die Werte dieser Beschleunigungen im Erdmittelpunkte, so daß die resultierende Wirkung noch einmal im Verhältnis $\frac{a}{r}$ (a Erdradius) kleiner ist. (Darum, wegen des kleineren r, schließlich das Überwiegen der Mondflut über die Sonnenflut.)

Wichtiger für irdische Bewegungen sind die Zentrifugalkraft und die Corioliskraft.

Erstere ist für einen Punkt mit dem Breitengrad β

$$dmR\cos\beta\cdot\omega^2,$$

wobei R den Erdradius bezeichnet. Sie steht senkrecht zur Erdachse, hat also die Komponente

$$dmR\cos^2\beta\omega^2$$

vertikal nach oben, deren Beschleunigung $R\cos^2\beta\omega^2$ man schon in der Regel von der Erdbeschleunigung g, die ja doch von β abhängt, abzuziehen pflegt. Ihr Maximum ist (am Äquator)

$$R\omega^2 = 0{,}0337 \text{ m/Sec}^2.$$

Außerdem hat aber die Zentrifugalkraft noch eine südliche Komponente

$$dmR\cos\beta\cdot\sin\beta\omega^2,$$

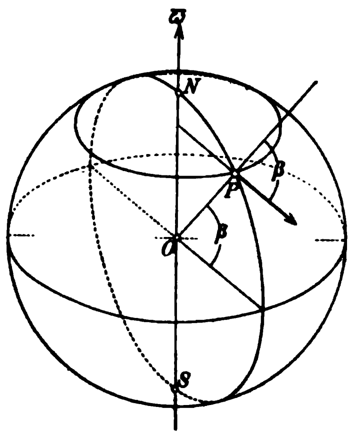


Fig. 227.

deren Maximum $\frac{1}{2}dmR\omega^2$ ist und für $\beta = 45^0$ eintritt. Sie bedingt eine Südabweichung des Lotes und wird auch meist in die Wirkung der Schwerkraft mit einbezogen, da sie ja ebenfalls nur eine vom Ort abhängige Größe ist und auch das Lot an sich schon nicht genau durch die Erdmitte hindurchgeht, teils wegen der Abplattung der Erde, teils noch wegen lokaler Störungen der Schwerkraft durch unregelmäßige Massenverteilungen in der Erde.

Wichtiger und auffälliger ist die Wirkung der Corioliskraft $-dm2\bar{\omega}\bar{v}_r$, weil sie noch wesentlich von der Bewegung relativ zur Erde abhängt.

Bewegt sich auf der Nordhälfte ein Körper im Meridian nach Norden, so ist die Corioliskraft nach Osten gerichtet und gleich $dm2\omega v_r\sin\beta$. Es bedarf also einer äußeren, nach Westen gerichteten Kraft, um die nördliche Bewegung zu erzwingen. Darin liegt es, daß bei Geleisen, die vorwiegend in nördlicher Richtung befahren werden, die rechte östliche Schiene stärker abgenutzt wird. Ebenso unterspülen die zahlreichen Ströme in Europa und Asien mit nördlicher Laufrichtung alle das rechte Ufer stärker als das linke und zeigen die Tendenz, sich nach rechts zu verlegen.

Fällt ein Körper vertikal herab, so liegt die Corioliskraft ebenfalls nach Osten und hat die Größe

$$2dm\cos\beta v_r\omega.$$

Dieser Umstand bedingt die bekannte und experimentell leicht nachweisbare Ostabweichung fallender Körper. Macht man zur Berechnung der Ostabweichung, die ja ohnehin eine kleine Größe ist, die angenähert für nicht zu große Fallstrecken richtige Annahme, daß ungeändert

$$v_r = gt$$

bleibt, so ist die ostwärts gerichtete Beschleunigung

$$2\omega \cos \beta g t,$$

also die Ostabweichung

$$\frac{1}{3}\,\omega \cos \beta g t^3;$$

sie berechnet sich für $t = 5$ Sec, d. h. für eine Fallhöhe von $\frac{1}{2} g t^2$, also etwa 125 m, zu etwa $3 \cdot \cos \beta$ cm.

Durch Fallversuche in tiefen Schächten hat sich das theoretische Ergebnis bestätigt gefunden; natürlich kann man wegen des Luftwiderstandes keine zu große Genauigkeit erwarten (ein zweites objektives Merkmal für die Drehbewegung der Erde).

Beide Gründe zu einer Ostabweichung kombinieren sich, wenn sich die am Äquator aufsteigende Luft nach Norden bewegt und in unseren Breiten zu Boden sinkt. Diese Luft wird eine östliche Bewegungstendenz haben, weshalb wir bei niedersteigenden Luftmassen Westwinde haben, umgekehrt bei aufsteigenden Luftmassen Ostwinde.

Etwas Analoges gilt für die Meeresströmungen.

291. Das Foucaultsche Pendel. Das erste Mittel, das mit Erfolg angewendet wurde, um objektiv auf Grund mechanischer Prinzipien die Erddrehung nachzuweisen, war der bekannte Versuch Foucaults. Ein Pendel möge sich unter dem Breitengrad β und momentan in einer Ebene von dem Azimut φ gegen die Ostrichtung befinden.

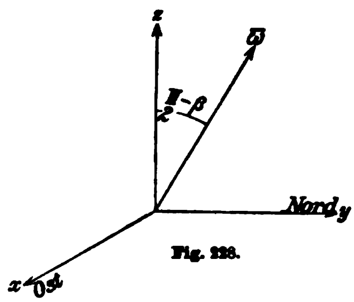


Fig. 228.

Gegen ein auf der Erde festes Koordinatensystem, dessen x-Achse nach Osten, dessen y-Achse nach Norden zeige, hat dann das $\bar{\omega}$ der Erde die Richtungskosinus 0, $\cos \beta$, $\sin \beta$. Also ist $\omega_x = 0$, $\omega_y = \omega \cos \beta$, $\omega_z = \omega \sin \beta$ und die Corioliskraft hat die Komponenten

$$\begin{aligned}
&-2m(\omega_y \dot z - \omega_z \dot y) = -2m\omega(\cos\beta \dot z - \sin\beta \dot y),\\
&-2m(\omega_z \dot x - \omega_x \dot z) = -2m\omega \sin\beta \cdot \dot x,\\
&-2m(\omega_x \dot y - \omega_y \dot x) = +2m\omega \cos\beta \cdot \dot y.
\end{aligned}$$

Infolgedessen lauten die Bewegungsgleichungen (vergleiche Nr. 67)

$$\begin{aligned}
m\ddot x &= -S \cdot \sin\vartheta \cos\varphi - 2m\omega(\cos\beta \dot z - \sin\beta \dot y),\\
m\ddot y &= -S \sin\vartheta \sin\varphi - 2m\omega \sin\beta \dot x,\\
m\ddot z &= S \cos\vartheta - mg + 2m\omega \cos\beta \dot y.
\end{aligned}$$

Sind nun die Schwingungen klein, so daß wir x, y, ϑ, und ihre Ableitungen als klein erster Ordnung ansehen, so sind z und $\dot z$ klein zweiter Ordnung.

Vernachlässigen wir alle Glieder zweiter Ordnung, so ergibt die letzte Gleichung

$$S = mg - 2m\omega\cos\beta\dot{y}.$$

Setzen wir das in die beiden ersten Gleichungen ein und beachten, daß

$$\sin\vartheta \cdot \cos\varphi = \frac{x}{l},$$

$$\sin\vartheta \cdot \sin\varphi = \frac{y}{l}$$

und daß $x\dot{y}$ und $y\dot{y}$ klein zweiter Ordnung sind, so erhalten wir

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x + 2\omega\sin\beta\dot{y},$$

$$\ddot{y} = -\frac{g}{l}y - 2\omega\sin\beta\cdot\dot{x}.$$

Multiplizieren wir die zweite Gleichung mit $i = \sqrt{-1}$ und addieren sie zur ersten, so bekommen wir eine einzige Differentialgleichung zweiter Ordnung für die komplexe Variabele

$$z = x + iy,$$

nämlich

$$\ddot{z} + \alpha^2 z + 2\lambda i\dot{z} = 0.$$

Dabei ist zur Abkürzung

$$\alpha = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$\lambda = \omega\sin\beta$$

gesetzt.

Die Differentialgleichung für z integrieren wir durch den Ansatz

$$z = e^{ut};$$

u genügt der algebraischen Gleichung

$$u^2 + 2\lambda iu + \alpha^2 = 0,$$

welche die Wurzeln

$$u_1 = -\lambda i + \sqrt{-\lambda^2 - \alpha^2} = i(\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2} - \lambda) = ia_1$$

und

$$u_2 = -\lambda i - \sqrt{-\lambda^2 - \alpha^2} = -i(\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2} + \lambda) = -ia_2$$

hat ($a_1 > 0$, $a_2 > 0$).

Das allgemeine Integral ist demnach

$$\begin{aligned} z &= A_1 e^{ia_1 t} + A_2 e^{-ia_2 t} \\ &= (B_1 + iC_1)(\cos a_1 t + i\sin a_1 t) + (B_2 + iC_2)(\cos a_2 t - i\sin a_2 t). \end{aligned}$$

Alle Buchstaben haben jetzt reelle Werte, also ist

$$x = B_1\cos a_1 t - C_1\sin a_1 t + B_2\cos a_2 t + C_2\sin a_2 t,$$

$$y = C_1\cos a_1 t + B_1\sin a_1 t - B_2\sin a_2 t + C_2\cos a_2 t.$$

Nehmen wir diejenige Anfangsbedingung, welche dem Foucaultschen Versuch entspricht: für $t = 0$ sei $\dot{x} = \dot{y} = 0$, $x = \alpha$, $y = 0$, d. h. $z = \alpha$, $\dot{z} = 0$. Daraus folgen zur Bestimmung von A_1 und A_2 die Gleichungen

$$A_1 + A_2 = \alpha,$$

$$a_1 A_1 - a_2 A_2 = 0,$$

woraus

$$A_1 = \frac{a_2}{a_1 + a_2}\alpha \quad \text{und} \quad A_2 = \frac{a_1}{a_1 + a_2}\alpha,$$

also

$$s = \frac{\alpha}{a_1 + a_2}\left(a_2 e^{i a_1 t} + a_1 e^{-i a_2 t}\right),$$

$$\dot{s} = \alpha \frac{a_1 a_2 i}{a_1 + a_2}\left(e^{i a_1 t} - e^{-i a_2 t}\right)$$

folgen.

Bestimmen wir alle Stellen, wo $\dot{s} = 0$, d. h. $\dot{x} = 0$ und $\dot{y} = 0$ ist, wo also das Pendel momentan ruht und demnach Spitzen vorhanden sein werden.

Es werden das die Stellen sein, für welche

$$e^{i(a_1 + a_2)t} = 1,$$

d. h. $\cos(a_1 + a_2)t = 1$ aber $\sin(a_1 + a_2)t = 0$, d. h.

$$t = \frac{2\pi n}{a_1 + a_2} = \frac{\pi n}{\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}} = t_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

ist. Für diese Zeitpunkte t_n ist

$$-a_2 t_n = a_1 t_n - 2\pi n$$

und daher

$$s = \alpha e^{i a_1 t_n} = s_n.$$

Da $|e^{i a_1 t_n}| = 1$, also $|s_n| = \alpha$, so erkennt man zunächst, daß die Spitzen alle auf dem Kreis mit dem Radius α liegen, ferner hat sich in der Zeit von t_n bis t_{n+1}, das Azimut φ_n des Pendels um $a_1 \cdot (t_{n+1} - t_n)$, d. h.

$$a_1 \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}} \quad \text{oder} \quad \pi\left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}}\right)$$

vermehrt.

Man erkennt ferner leicht, daß im übrigen die Kurve innerhalb des Kreises mit dem Radius α liegt, denn aus

$$x = \frac{\alpha}{a_2 + a_1}(a_2 \cos a_1 t + a_1 \cos a_2 t),$$

$$y = \frac{\alpha}{a_2 + a_1}(a_2 \sin a_1 t - a_1 \sin a_2 t)$$

folgt für das Quadrat des Ausschlages

$$x^2 + y^2 = \frac{\alpha^2}{(a_1 + a_2)^2}(a_1{}^2 + a_2{}^2 + 2 a_1 a_2 \cos(a_1 + a_2)t).$$

Dieser Ausdruck erhält sein Maximum für die Werte $t = t_n$, nämlich α^2, sein Minimum für die mitten zwischen den Werten t_n liegenden Werte

$$t_{n+\frac{1}{2}} = \frac{(2n+1)\pi}{a_1 + a_2},$$

für welche der Kosinus gleich -1 wird. Das Minimum der Entfernung berechnet sich danach zu

$$\sqrt{x^2 + y^2}_{\text{Min}} = \frac{\alpha(a_2 - a_1)}{a_1 + a_2} = \alpha \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}}.$$

Man kann nun wohl die Bewegung von Spitze zu Spitze eine halbe Schwingung nennen und daher sagen, daß sich nach einer vollen Schwingung das Azimut um $2\pi\left(1-\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}}\right)$ vermehrt oder, da es auf das additive Glied 2π beim Azimut nicht ankommt: *es hat sich das Pendel nach einer vollen Schwingung um* $2\pi\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}}$ *rechtsherum (von Ost nach Süd usw.) gedreht.*

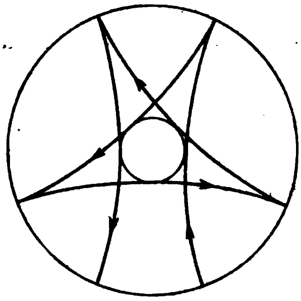


Fig. 229.

Nach diesen Ergebnissen kann man die Bahnkurve leicht zeichnen (Fig. 229). Das große, im Jahre 1851 von Foucault in Paris in Bewegung gesetzte Pendel ergab tatsächlich die berechnete Bewegung befriedigend genau. Neuere analoge Versuche lassen die Erddrehung mit einem Fehler von 7—8 Minuten pro Tag berechnen. Die feinsten Versuche mit Berücksichtigung aller Fehlerquellen stammen von Kamerlingh Onnes in Groningen.

292. Nochmals der Deviationswiderstand eines rotierenden, geführten Kreisels. Indem wir die Rotation ω_z eines symmetrischen Kreisels um seine Figurenachse als Relativbewegung, eine Drehung ω_0 um eine Achse senkrecht zu ihr als Führungsbewegung auffassen, können wir den Deviationswiderstand, d. h. das Moment, das der so geführte Kreisel auf seine Führung ausübt, noch auf anderem Wege berechnen, als dies in Nr. 283 geschehen ist.

Sei ω_0 konstant, so kommen von der Führungsbewegung nur Zentrifugalkräfte. Diese haben nach Nr. 198 nur eine Resultierende $ms\omega_0^2$ durch den Schwerpunkt senkrecht zur Drehachse ω_0, — s ist der Schwerpunktsabstand von der Achse —, welche verschwindet, wenn der Schwerpunkt auf der Achse liegt.

Nun die Corioliskräfte:

$$\begin{aligned}-2\,dm\,\omega_0 v_r &= -2\,dm\,\omega_0(\omega_z r)\\ &= -2\,dm\,\bar{\omega}_z(\bar{\omega}_0\cdot\bar{r})\\ &= -2\,dm\,\omega_z\omega_0 x,\end{aligned}$$

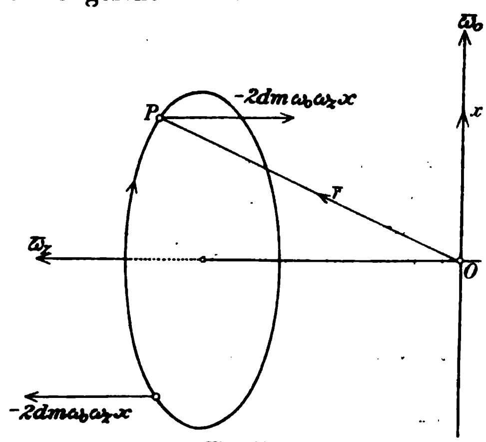


Fig. 230.

wenn wir die ω_0-Achse zur x-Achse machen. Diese haben also alle die Richtung der Figurenachse. Ihre Summe ist $-2m\bar{\omega}_z\cdot(\bar{\omega}_0\cdot\bar{r}^*)$, verschwindet somit, da $\bar{r}^*$ aus Symmetriegründen die Richtung $\bar{\omega}_z$ hat und daher auf ω_0 senkrecht steht.

Dagegen haben die Corioliskräfte ein Moment, wie man sofort aus der Figur sieht. Denn zwei zur yz-Ebene symmetrisch gelegene

Punkte haben entgegengesetzt gleiche Corioliskräfte: der Hebelarm eines jeden ist x. Es entsteht also um die y-Achse, d. h. um eine Achse senkrecht sowohl zur Figurenachse, als auch zur Drehachse ω_0, ein Kräftepaar vom Moment

$$2\omega_0\omega_z \mathsf{S}\, dm x^2 = \omega_0\omega_z(C+B-A) = \omega_0\omega_z C,$$

weil $A = B$ sein sollte.

Das stimmt mit dem früheren Resultat überein. Die Relativbeschleunigungen endlich haben aus Symmetriegründen weder eine Resultierende noch ein Moment.

293. Der Inertieregulator, dessen erster Entwurf von Siemens stammt, dient dazu, die durch Unregelmäßigkeit des Kraftfeldes entstehende Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$ einer Maschine durch eine Einwirkung auf das Kraftfeld wieder rückgängig zu machen.

Denken wir uns auf einem Rad relativ zu ihm um eine parallele Achse drehbar einen Hebel befestigt, der sich bei gleichförmiger Bewegung des Rades von selbst unter Wirkung der Zentrifugalkraft radial nach außen einstellen wird. Außerdem werde er in dieser Normalstellung noch durch eine Feder festgehalten. Wenn nun jetzt das Rad eine Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$ erhält, so wird jeder Punkt des Hebels einer Scheinkraft $-dm\dot{\omega}r$ unterworfen erscheinen, die senkrecht zum Radius $\bar{r}$ steht und bei positivem $\dot{\omega}$ der Bewegung entgegengesetzt sein wird.

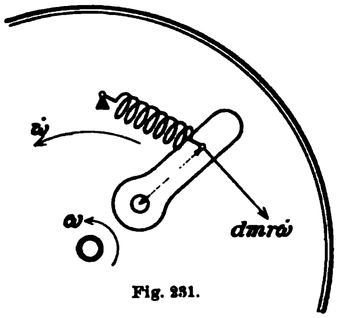


Fig. 231.

Diese Scheinkraft wird den Hebel nach rückwärts bewegen und diese Relativbewegung gegen das Rad kann dazu benutzt werden, ein Stellwerk in Bewegung zu setzen, das den Kraftzufluß reguliert, z. B. den Dampfzutritt bei positivem $\dot{\omega}$ drosselt und so eine Kompensation der beschleunigenden Ursache herbeiführt.

Es bedarf natürlich noch einer eingehenden Untersuchung des gesamten Systems bestehend aus dem soeben in seiner Grundidee skizzierten Inertieregulator und der ganzen Maschine, um die Frage zu entscheiden, ob eine hinreichende Stabilität des ganzen Reguliervorganges eintritt, d. h. ob sich nach hinreichend kurzen Schwingungen ein Beharrungszustand von selbst wieder einstellt.

Wir können hier auf diese Theorie nicht eingehen, der Leser sei auf die Abhandlung von Stodola: „Das Siemenssche Regulierprinzip und die amerikanischen Inertieregulatoren“, Z. d. V. d. I. 1899 und auf den Enzyklopädieartikel IV 10 v. Mises hingewiesen.

294. Die Arbeit der Scheinkräfte und zwar ihre Arbeit bei der relativen Bewegung wollen wir berechnen, da natürlich der Energiesatz in der Form gilt, daß *die Änderung der relativen kinetischen Energie gleich ist der Arbeit der wirklichen Kräfte und der Scheinkräfte und zwar gleich ihrer Arbeit bei der relativen Bewegung.*

Nun leistet die Corioliskraft keine Relativarbeit, denn sie steht auf der Relativgeschwindigkeit senkrecht.

Weiter wollen wir zeigen, daß die Zentrifugalkraft $-dm\,\overline{\omega(\omega(r-c))}$ ein Potential hat.

In der Tat: ihre negative Arbeit ist bei der Relativbewegung

$$-\mathfrak{d}A = dm\,\overline{\omega(\overline{\omega(r-c)})}\cdot\mathfrak{d}(\overline{r-c}),$$

das ist aber nach dem Vertauschungssatze (Anhang I 6)

$$\overline{\omega(r-c)}\cdot\overline{\mathfrak{d}(r-c)\cdot\omega}\,dm = -dm\,\overline{\omega(r-c)}\cdot\overline{\omega\,\mathfrak{d}(r-c)}$$

$$= -\mathfrak{d}\,\frac{1}{2}\,dm\,\overline{\omega(r-c)}^2$$

$$= -\mathfrak{d}\,\frac{1}{2}\,dm\,\omega^2\varrho^2,$$

wenn ϱ die Entfernung des Punktes von der Drehachse bedeutet.

Also ist das Potential der Zentrifugalkraft

$$-\frac{1}{2}\,dm\,\omega^2\varrho^2.$$

Dabei ist allerdings im Falle veränderlicher Drehachse eine Bemerkung zu machen. Wir haben bei der Operation $\mathfrak{d}$ das ω als konstant angesehen. Ist nun aber ω eine Funktion der Zeit, so kann man immerhin noch insofern von einem Potential sprechen, als die Zentrifugalkraft das Gefälle des Potentials $-\frac{1}{2}dm\,\omega^2\varrho^2$ ist. Denn die Bildung des Gradienten läßt ja die Zeit unberührt, es macht also nichts aus, ob sie explizit im Ausdrucke des Potentials vorkommt oder nicht. Aber das Potential ist bei variablen ω nicht mehr die negative Arbeit der Zentrifugalkraft.

Diese Arbeit ist vielmehr

$$+\int dm\,\overline{\omega(r-c)}\cdot\overline{\omega\,\frac{\mathfrak{d}(r-c)}{\mathfrak{d}t}}\cdot dt.$$

Dagegen das negative Potential

$$\frac{1}{2}\,dm\,\overline{\omega(r-c)}^2,$$

deren relativer Differentialquotient nach der Zeit

$$dm\,\overline{\omega(r-c)}\cdot\overline{\omega\,\frac{\mathfrak{d}(r-c)}{\mathfrak{d}t}} + dm\,\overline{\omega(r-c)}\cdot\overline{\frac{\mathfrak{d}\omega}{\mathfrak{d}t}(r-c)}$$

ist. Der Unterschied zwischen L, der Leistung der Zentrifugalkraft, und $-\frac{\mathfrak{d}U}{\mathfrak{d}t}$ besteht also in dem Gliede

$$dm\,\overline{\omega(r-c)}\cdot\overline{\frac{\mathfrak{d}\omega}{\mathfrak{d}t}(r-c)},$$

oder da nach Nr. 268

$$\frac{\mathfrak{d}\bar{\omega}}{\mathfrak{d}t}=\dot{\omega}$$

ist, in

$$dm\,\overline{\omega(r-c)}\cdot\overline{\dot{\omega}(r-c)}.$$

Die Scheinkraft $-dm\ddot{\bar{c}}$ *hat in demselben Sinne wie die Zentrifugalkraft ein Potential.*

Denn es ist bei konstantem $\ddot{\bar{c}}$ die negative Arbeit

$$dm\ddot{\bar{c}}\cdot\mathfrak{d}\overline{(r-c)}=\mathfrak{d}(dm\ddot{\bar{c}}\cdot\overline{r-c})$$

Also ist $-dm\ddot{\bar{c}}$ stets der negative Gradient von $dm\ddot{\bar{c}}\cdot\overline{r-c}$, aber dieser Ausdruck ist nur bei konstantem $\ddot{\bar{c}}$ die negative Arbeit der in Rede stehenden Scheinkraft.

Endlich hat die Scheinkraft $-dm\,\overline{\dot{\omega}(r-c)}$ *im allgemeinen kein Potential.*

Denn es ist ihre negative Arbeit

$$dm\,\overline{\dot{\omega}(r-c)}\cdot\mathfrak{d}\overline{(r-c)}$$

nach dem Vertauschungssatze gleich

$$dm\,\bar{\dot{\omega}}\cdot\overline{\overline{(r-c)}\,\mathfrak{d}\overline{(r-c)}}.$$

Es ist aber $\overline{\overline{(r-c)}\,\mathfrak{d}\overline{(r-c)}}$ die in der Zeit dt von dem Radius $\overline{r-c}$ relativ überstrichene Fläche $\mathfrak{d}\bar{F}$, also die negative Arbeit der Scheinkraft $-dm\,\overline{\dot{\omega}(r-c)}$

$$dm\,\bar{\dot{\omega}}\cdot\mathfrak{d}\bar{F}.$$

Ist nun z. B. $\dot{\omega}$ konstant nach Größe und Richtung und bewegt sich der Punkt in irgend einer geschlossenen Bahn senkrecht zu $\bar{\dot{\omega}}$, so ist die gesamte Arbeit der in Rede stehenden Scheinkraft

$$dm\,\dot{\omega}\cdot F$$

also keineswegs null, wie es sein müßte, wenn ein Potential existierte.

Das Wichtigste zusammenfassend, können wir folgenden Satz aussprechen:

Dreht sich der führende Körper mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine der Richtung nach feste Achse und hat er außerdem eine

Translationsbewegung von konstanter Beschleunigung $\bar{\bar{c}}$, *so gilt ein Energiesatz der Form*

$$\frac{1}{2}dmv_r^2 - \frac{1}{2}dm\omega^2\varrho^2 + dm\bar{\bar{c}}\cdot\overline{r-c}\,\Big|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} d\bar{k}\cdot\bar{v}_r dt.$$

v_r bedeutet dabei die Relativgeschwindigkeit, ϱ den Abstand des Punktes von der Drehachse durch C.

Dieser Satz findet eine wichtige Anwendung in der Turbinentheorie bei der Ableitung der sogenannten Ludewigschen Gleichung. (Ludewig, Allg. Theorie der Turbinen, Berlin 1890; siehe auch v. Mises, Z. f. Math. u. Phys. Bd. 57, 1909.)

Aufgaben: 126. Wie lautet die Energiegleichung für die Relativbewegung in einem mit der Erdbeschleunigung $\bar{g}$ herabfallenden Fahrzeug, das sich nicht dreht?

127. Der Leser möge versuchen, alle in diesem Paragraphen behandelten Aufgaben und Beispiele vom Standpunkte des absoluten Raumes aus wenigstens qualitativ zu erklären.

128. Man versuche es, sich mit Hilfe der Relativtheorie die bekannten Erscheinungen in einem Fahrzeug klarzumachen, wenn dieses erst gebremst wird und dann stillsteht, womit die Führungsbeschleunigung plötzlich aufhört.

§ 52. Impulsion und Stoß.

295. Der gerade, zentrale Stoß. Wir beginnen mit diesem einfachen Falle: es mögen sich zwei feste Körper auf einer Geraden, zu der sie symmetrisch sind, mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegen. Sie werden dann zusammenstoßen müssen. Was wissen wir über diesen Stoßprozeß und wie berechnen wir die Geschwindigkeiten nach dem Stoß, wenn dieselben vorher bekannt sind?

Die Massen der Körper seien M und m, die Geschwindigkeiten allgemein U und u, vor dem Stoße U_1 und u_1, nach dem Stoße U_2 und u_2.

Kräfte, welche für das System beider Körper zusammen äußere wären, wollen wir der Einfachheit halber ausschließen. Dann können wir aus dem Schwerpunktssatze für beide Körper zusammen jedenfalls schließen, daß die Summe ihrer Massengeschwindigkeiten konstant bleibt:

$$MU + mu = \text{const.} = MU_1 + mu_1. \tag{1}$$

Während des Stoßes möge nun der Körper M vom zweiten m die Kraft K — in derselben Richtung gezählt wie die U, u — der zweite vom ersten die Kraft k empfangen. Natürlich ist nach dem Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung

$$K = -k.$$

Der eigentliche Stoß möge nun die Zeit $\Delta t = t_2 - t_1$ dauern. Wir teilen ihn in zwei Teile:

Erste Periode: Es muß einen Moment geben, wo sich die Schwerpunkte beider Körper am nächsten sind. Haben die Schwerpunkte die Abszissen X und x, so trifft das zu, wenn

$$\dot{X} - \dot{x} = 0$$

d. h.

$$U = u$$

ist. Dieser Zustand sei zur Zeit t_0 erreicht, als erste Periode wählen wir die Zeit von t_1 bis t_0: die Periode der Kompression.

Die gemeinsame Geschwindigkeit $U = u = c$ zur Zeit t_0 können wir nach (1) berechnen, es ergibt sich

$$c = \frac{MU_1 + mu_1}{M + m}. \tag{2}$$

Etwas können wir nun jedenfalls über die Kraft K resp. k aussagen, denn nach dem Schwerpunktssatz ist für den ersten Körper allein

$$M\frac{dU}{dt} = K.$$

Daraus folgt durch Integration über die erste Periode

$$M(c - U_1) = \int_{t_1}^{t_0} K\,dt \equiv H_1.$$

Das Integral H_1 der rechten Seite: ein Zeitintegral über die Kraft K, wollen wir ihren Antrieb während dieser Zeit nennen. Ihn können wir aus der vorstehenden Formel berechnen unter Benutzung von (2)

$$H_1 = \frac{Mm}{M + m}(u_1 - U_1) \tag{3}$$

Natürlich berechnet sich der Antrieb h_1 der Kraft k ebenso zu

$$h_1 = -\frac{Mm}{M + m}(u_1 - U_1). \tag{3'}$$

Zweite Periode: die Periode der Restitution sei die Zeit von t_0 bis t_2, falls überhaupt eine Trennung eintritt. Zu ihrer Behandlung bedarf es einer Hypothese, denn die Mechanik des starren Körpers ist nicht imstande, eine Antwort auf dem ihr an sich wesentlich fremden Gebiete des Stoßes zu geben. Auch die Ansätze der Elastizitätstheorie haben noch kein voll befriedigendes Resultat ergeben.

Man unterscheidet nun seit Newton zwei extreme Fälle, zwischen denen die Wirklichkeit in der Mitte liegt:

a) den vollkommen unelastischen Stoß: es findet gar keine Wiederherstellung des alten Zustandes statt, beide Körper bleiben aneinander haften und bewegen sich mit der gemeinsamen Geschwindigkeit c fort. Also ist in diesem Falle

$$U_2 = u_2 = c = \frac{MU_1 + mu_1}{M + m}.$$

Natürlich ist dann die Kraft K und ihr Antrieb in der zweiten Periode null.

b) Den vollkommen elastischen Stoß: die Wiederherstellung erfolgt spiegelbildlich der Kompression, was den Kraftverlauf angeht; also ist ihr Antrieb in der zweiten Periode gleich dem Antrieb in der ersten Periode. Wir setzen also

$$H_2 \equiv \int_{t_1}^{t_2} K dt = \int_{t_0}^{t_1} K dt = H_1,$$

natürlich ebenso

$$h_2 = h_1.$$

Zur Endrechnung nehmen wir gleich

c) den wirklichen Fall, der die beiden anderen in der Grenze umfaßt. Es wird in Wahrheit H_2 weder null noch ganz gleich H_1 sein, sondern ein echter Bruch von H_1:

$$H_2 = \varepsilon H_1,$$

$$h_2 = \varepsilon h_1,$$

wo $0 < \varepsilon \leqq 1$. ε heißt der Restitutionskoeffizient.

Nun ergibt der Schwerpunktssatz für jeden einzelnen Körper, über die zweite Periode integriert, sofort

$$M(U_2 - c) = H_2 = \varepsilon H_1 = \quad \varepsilon \frac{Mm}{M+m}(u_1 - U_1),$$

$$m(u_2 - c) = h_2 = \varepsilon h_1 = - \varepsilon \frac{Mm}{M+m}(u_1 - U_1),$$

woraus sich mit Benutzung von (2) U_2 und u_2 berechnen:

$$\left. \begin{aligned} U_2 &= \frac{(M - \varepsilon m) U_1 + (1 + \varepsilon) m u_1}{m + M} \\ u_2 &= \frac{(m - \varepsilon M) u_1 + (1 + \varepsilon) M U_1}{m + M} \end{aligned} \right\} \tag{I}$$

Es ist noch interessant, den Verlust an kinetischer Energie zu berechnen: derselbe ist

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{1}{2} M U_1^2 + \frac{1}{2} m u_1^2 - \frac{1}{2} M U_2^2 - \frac{1}{2} m u_2^2.$$

Setzt man das Resultat (I) ein, so erhält man

$$\Delta E = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon^2) \frac{Mm}{M+m}(U_1 - u_1)^2. \tag{II}$$

Bei dem vollkommen elastischen Stoß ($\varepsilon = 1$) ***tritt kein Energieverlust ein, für den vollkommen unelastischen Stoß*** ($\varepsilon = 0$) ***ist er ein Maximum.***

Aufgaben: 129. Man zeige, daß beim vollkommen elastischen Stoß und gleichen Massen die Körper ihre Geschwindigkeit vertauschen.

130. Man nehme die eine Masse M als vor dem Stoße ruhend und sehr groß an (feste Erde). Man berechne die Resultate für limes $M = \infty$, insbesondere auch den Energieverlust.

131. Wie groß ist ε, wenn ein Ball nach dem Aufstoßen auf die Erde nur mehr auf ein Viertel der Fallhöhe emporsteigt? (Von den Energieverlusten durch Luftwiderstand werde abgesehen.)

Über den Restitutionskoeffizienten ε liegen nur sehr spärliche Untersuchungen vor. Er wird zumeist als eine Materialkonstante angesehen, doch ist diese Behauptung recht unsicher. Einige Zahlen findet man in der „Hütte".

296. Die Grundgleichungen der Impulsion. Stoßprozesse zwischen festen Körpern haben die Eigentümlichkeit, daß es sich bei ihnen um sehr große, aber nur sehr kurze Zeit andauernde Kräfte handelt, welche im ganzen eine endliche, merkliche Geschwindigkeitsänderung hervorrufen. Wirkt auf einen Körper eine solche Kraft $\bar{k}$ die Zeit Δt, so ist nach dem über Δt integrierten Schwerpunktssatze

$$m\Delta\bar{v} = \int_{\Delta t}\bar{k}\,dt.$$

Wenn also auch $\bar{k}$ groß, Δt klein ist, so nimmt doch der Antrieb einen gewöhnlichen Wert mittlerer Größe an.

Es liegt nun eine Vereinfachung nahe, die um so mehr am Platze sein wird, als man meist über den genaueren Verlauf der Kraft $\bar{k}$ nichts weiß und nach unserem Stande der Erkenntnis froh sein muß, etwas über den gesamten Antrieb aussagen zu können.

Diese Vereinfachung besteht darin, über die Zeit Δt hinwegzusehen, d. h. den Vorgang dahin zu idealisieren, daß man $\Delta t = 0$ werden läßt, $\bar{k}$ dafür unendlich, doch so, daß

$$\lim_{\Delta t = 0}\int_{\Delta t}\bar{k}\,dt$$

einem bestimmten endlichen Werte $\bar{h}$ zustrebt. Es ist dann natürlich für einen Punkt

$$m\Delta\bar{v} = \bar{h}. \tag{I}$$

Der so idealisierte Prozeß heißt eine Impulsion, $\bar{h}$ die Momentankraft oder Stoßkraft.

Eine Momentankraft erzeugt also plötzlich eine Geschwindigkeitsänderung, welche durch vorstehende Gleichung gegeben ist. Dabei ist natürlich $\Delta\bar{v}$, genauer gesagt, die Änderung der Schwerpunktsgeschwindigkeit, $\bar{h}$ die Summe aller äußeren Momentankräfte. Neben den Schwerpunktsatz tritt natürlich der Momentensatz. Während aber der Schwerpunktsatz ohne Vernachlässigung gilt, d. h. auch dann, wenn wir den genannten Grenzübergang nicht vornehmen, und unter $\bar{h}$ den Antrieb der äußeren Kräfte verstehen, werden wir sehen, daß für die abzuleitende Form des Momentensatzes der Grenzübergang wesentlich ist.

Aus dem Momentensatze für endliche Kräfte

$$\mathfrak{S}\, dm\, \overline{rw} = \mathfrak{S}\, \overline{rk}$$

folgt durch Integration, bei beliebigem Bezugspunkt

$$\int_{\Delta t} dm\, \overline{rw}\, dt = \int_{\Delta t} \mathfrak{S}\, \overline{rk}\, dt.$$

Nun ist unter den Integralen $\bar{r}$ eine Funktion der Zeit. Wenn aber die Geschwindigkeit endlich bleibt, was wir ja annehmen wollen, so ändert sich $\bar{r}$ stetig; machen wir also den Grenzübergang zu $\Delta t = 0$, so kann man während der Zeit Δt $\bar{r}$ als konstant ansehen und vor das Zeitintegral ziehen. Daher gilt

$$\Delta \bar{J} = \mathfrak{S}\, \overline{rh},$$

wo $\bar{J} = \int dm\, \overline{rv}\, dt$ und $\bar{v}$ im allgemeinen die ganze Geschwindigkeit ist.

Für den Impulsionsprozeß ist die plötzlich eintretende Änderung des Impulsvektors gleich dem Gesamtmoment der äußeren Momentankräfte.

Dieser Satz gilt für jeden Bezugspunkt. Ein Moment D von Momentankräften wollen wir auch einen Drehstoß nennen.

Aus der Momentengleichung folgt eine dynamische Interpretation des an sich kinematisch definierten Impulsvektors. Dreht sich ein Körper, so daß er augenblicklich den Impulsvektor $\bar{J}$ hat und stellen wir uns die Aufgabe, ihn plötzlich durch einen Drehstoß zur Ruhe zu bringen, so ist $\Delta \bar{J} = -\bar{J}$, also $\bar{D} = -\bar{J}$. Wir brauchen zum Anhalten also einen Drehstoß, dessen Vektor der Größe nach gleich, der Richtung nach entgegengesetzt dem Impulsvektor ist.

297. Verhalten der Reibung bei Stoßprozessen. Wirken bei Stoßprozessen auch noch gewöhnliche, endliche Kräfte mit, so verschwindet in der Grenze $\Delta t = 0$ ihr Zeitintegral, ihre Wirkung fällt also für den Stoßprozeß fort.

Es ist wichtig, sich zu überlegen, wie sich die Reibung dabei verhält.

Es ist für Gleitreibung $R = f' N$, für Haftreibung $R \leqq f N$.

Es wird also die Reibung dann den Charakter einer Stoßkraft annehmen, wenn der Normaldruck es tut, sonst aber nicht.

Der Normaldruck aber, als passive Kraft, d. h. als Kraft, die erst durch das Problem selbst ihre Größe bekommt, wird bald den Charakter einer Stoßkraft annehmen können, bald nicht. Er wird es dann tun, wenn die Art des Problems ihn dazu zwingt. In manchen Fällen, in den sogenannten statisch unbestimmten Fällen, in denen eine volle Bestimmung aller Reaktionskräfte nicht möglich ist, wird die Frage mit der Mechanik des starren Körpers gar nicht zu entscheiden sein.

Auf dem eigentümlichen Charakter der Reibung beruhen manche Kunststücke, z. B. das folgende, das als lehrreich hier aufgeführt sei.

Auf eine Reihe von Gläsern wird horizontal eine ebene Platte gelegt, darauf senkrecht über jedes Glas ein nicht zu schmaler, oben etwas ausgehöhlter Stab gestellt, auf den wiederum je ein Ei gesetzt wird. Würde man die Platte langsam seitlich bewegen, so würden infolge der Reibung Stäbe und Eier mitgehen. Die Kunst besteht nun darin, durch einen scharfen Schlag die Platte seitlich herauszuschleudern, so daß die Stäbe und Eier nicht mitgehen, sondern in die untergesetzten Gläser fallen. Die Erklärung dieser Möglichkeit ist einfach. Bei einem scharfen genau horizontalen Schlag wird der senkrechte Normaldruck zwischen den verschiedenen Körpern nicht alteriert, er bleibt gleich den Gewichten der Lasten. Also bleibt auch die Reibung endlich, kommt mithin für den Stoßprozeß nicht in Frage, so daß der Stoß als reibungsfrei angesehen werden kann, eine horizontale Kraftübertragung auf Stäbe und Gläser in merklichem Maße nicht stattfindet, diese also an Ort und Stelle bleiben.

Behandeln wir jetzt ein Beispiel, in dem die Reibung den Charakter einer Stoßkraft annimmt.

298. Stoß einer rotierenden Kugel gegen eine rauhe Wand. Wir beschränken uns auf das ebene Problem: v_1 sei die Geschwindigkeit vor dem Stoße, ω_1 die Winkelgeschwindigkeit, α_1 der Einfallswinkel. v_2, ω_2, α_2 seien die Größen nach dem Stoße, v, ω die variabeln Werte während des Stoßes.

Ist dann h der normale Stoß, so ist jedenfalls

$$m(v_2 \cos\alpha_2 + v_1 \cos\alpha_1) = h. \qquad (1)$$

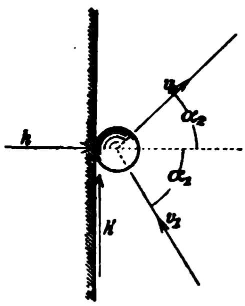


Fig. 232.

Die Geschwindigkeit des Berührungspunktes ist vor dem Stoße

$$v_1 \sin\alpha_1 + r\omega_1$$

nach dem Stoße

$$v_2 \sin\alpha_2 + r\omega_2,$$

im selben Sinne gerechnet; folglich ist

$$m(v_2 \sin\alpha_2 + r\omega_2 - v_1 \sin\alpha_1 - r\omega_1) = h', \qquad (2)$$

wenn h' den Reibungsstoß bedeutet.

Endlich gibt der Momentensatz

$$\Delta J \equiv T(\omega_2 - \omega_1) = rh'. \qquad (3)$$

Es wäre eigentlich noch ein Stoßmoment, das dem Moment der Rollreibung entspricht, zu berücksichtigen, doch wollen wir der Einfachheit halber davon absehen, es wird ja auch bei harten Körpern verhältnismäßig gering sein.

Nun sind zwei Fälle denkbar:

a) entweder geht die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit auf Null herunter und bleibt dann null: die Reibung hat dann während dieser Zeit den Charakter der Haftreibung und folglich ist

$$\left.\begin{aligned} &|h'| \leqq f \cdot h \\ \text{dafür aber}\qquad &v_2 \sin\alpha_2 + r\omega_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

b) oder es bleibt die Tangentialkomponente von Null verschieden, dann ist, die Gültigkeit des Coulombschen Gesetzes vorausgesetzt,

$$|h'| = fh \tag{b}$$

das Zeichen von h' ist dem von $v \sin\alpha + r\omega$ entgegengesetzt.

Als **Stoßhypothese** wollen wir nun einführen, daß sich für die Normalkomponente die Gesetze des geraden zentrierten Stoßes übertragen, daß also nach Nr. 295

$$v_2 \cos\alpha_2 = \varepsilon \cdot v_1 \cos\alpha_1 \tag{4}$$

sei. Es müßte freilich diese Hypothese noch an der Erfahrung geprüft werden. Jetzt können wir das Problem, v_2, α_2, ω_2 zu bestimmen, lösen.

Fall a. Man berechnet aus (4) (a) (2) und (3) unter Elimination von h'

$$v_2 \cos\alpha_2 = \varepsilon v_1 \cos\alpha_1 ,$$

$$\omega_2 = \omega_1 - \frac{r}{T} m (v_1 \sin\alpha_1 + r\omega_1),$$

$$v_2 \sin\alpha_2 = - r\omega_2 = - r\omega_1 + \frac{r^2}{T} m (v_1 \sin\alpha_1 + r\omega_1).$$

Ob dieser Fall nun wirklich eintrifft, hängt davon ab, ob für die aus (1) und (2) berechneten Werte von h und h' $|h'| < fh$ ist, d. h. ob

$$|v_1 \sin\alpha_1 + r\omega_1| \leqq f \cdot (1+\varepsilon) v_1 \cos\alpha_1 \tag{A}$$

ist.

Fall b_1. Sei dauernd $v \sin\alpha + r\omega > 0$, so daß

$$h' = - fh \tag{b_1}$$

ist. Dann berechnen sich aus (1), (2), (3), (4) und (b_1) die Unbekannten $v_2 \cos\alpha_2$ $v_2 \sin\alpha_2$, ω_2, h' und h zu

$$v_2 \cos\alpha_2 = \varepsilon \cdot v_1 \cos\alpha_1 ,$$

$$\omega_2 = \omega_1 - \frac{r}{T} fm(1+\varepsilon) v_1 \cos\alpha_1 ,$$

$$\begin{aligned} v_2 \sin\alpha_2 &= - r\omega_2 + v_1 \sin\alpha_1 + r\omega_1 - f(1+\varepsilon) v_1 \cos\alpha_1 , \\ &= v_1 \sin\alpha_1 + \left(\frac{mr^2}{T} - 1\right) f(1+\varepsilon) v_1 \cos\alpha_1 , \end{aligned}$$

dabei ist jedenfalls $T < mr^2$, also $\frac{mr^2}{T} - 1 > 0$.

Insbesondere berechnet sich der Ausfallwinkel zu

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{tg}\alpha_1 + \left(\frac{mr^2}{T} - 1\right) f \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} .$$

Also wegen $\varepsilon < 1$

$$\alpha_2 > \alpha_1 .$$

Nur in dem Idealfalle $\varepsilon = 1$ und $f = 0$ folgt das bekannte Gesetz der Gleichheit vom Einfalls- und Ausfallswinkel. Nun bedarf es aber noch einer Kontrolle.

Ist auch wirklich noch

$$v_2 \sin \alpha_2 + r\omega_2 \geqq 0?$$

Man berechnet aus den Formeln (2), (b_1) und (1)

$$v_2 \sin \alpha_2 + r\omega_2 = v_1 \sin \alpha_1 + r\omega_1 - f(1+\varepsilon)\, v_1 \cos \alpha_1,$$

es muß also

$$v_1 \sin \alpha_1 + r\omega_1 > f(1+\varepsilon)\, v_1 \cos \alpha_1 \tag{B_1}$$

sein, eine Bedingung, die bei positivem $v_1 \sin \alpha_1 + r\omega_1$ gerade (A) ausschließt.

Der Fall b_2, daß dauernd $v \sin \alpha + r\omega < 0$ sei, mag dem Leser zur Durchführung überlassen bleiben. Als Bedingung erhält man

$$-v_1 \sin \alpha_1 - r\omega_1 > f(1+\varepsilon)\, v_1 \cos \alpha_1, \tag{B_2}$$

so daß sich zeigt, daß sich — immer die Gültigkeit des Coulombschen Gesetzes vorausgesetzt — die drei Fälle immer gegenseitig so ausschließen, daß einer und nur einer eintritt.

299. Der Stoßmittelpunkt. Ein freier starrer Körper, der eine Symmetrieebene besitzt und zunächst noch ruhe, möge in seiner Symmetrieebene exzentrisch gestoßen werden. Welche Bewegung beginnt er? Nach dem Schwerpunktssatz wird der Schwerpunkt eine Geschwindigkeit $\bar{v}^*$ annehmen, die sich aus der Gleichung

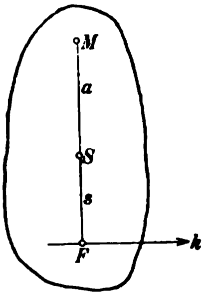


Fig. 233.

$$m\bar{v}^* = \bar{h}$$

nach Richtung und Größe bestimmt. Außerdem aber wird eine Drehung eintreten, die sich nach dem Momentensatz

$$T_s \omega = hs$$

zu $\omega = h\frac{s}{T_s}$ berechnet.

Wo liegt das Momentanzentrum M?

Nach den Ergebnissen von Nr. 224 liegt es jedenfalls senkrecht zu $\bar{v}^*$. Sei $MS = a$, so muß ferner

$$v^* = a\omega$$

sein, woraus sich

$$a = \frac{v^*}{\omega} = \frac{T_S}{m}$$

berechnet.

Bestimmen wir noch die Entfernung des Drehpols M von der Stoßkraft $\bar{h}$, d. h. die Strecke $MF = a + s$

$$a + s = \frac{T_S + ms^2}{ms} = \frac{T_F}{ms} = l,$$

wo l die reduzierte Pendellänge des Körpers für den Punkt F, M also der zu F gehörende Schwingungsmittelpunkt ist (siehe Nr. 195).

Da man die Bedeutung vom Aufhängepunkt eines Pendels und Schwingungsmittelpunkt vertauschen kann, so kann man den Satz so aussprechen:

Stößt man einen Körper in einem Punkte F, so liegt das Momentanzentrum der eintretenden Bewegung auf der durch den Schwerpunkt gehenden Senkrechten zur Stoßkraft in demjenigen Punkte M, für den F Schwingungsmittelpunkt ist.

Hätte man also M befestigt, um die Bewegung um M zu erzwingen, so wäre ein Zwang, d. h. ein Reaktionsstoß in M gar nicht nötig, wenn man gerade im Schwingungsmittelpunkt F von M senkrecht zu MF stößt, da dann die Bewegung von selbst um M stattfindet.

Will man einen Körper, der sich um eine feste Achse O drehen kann, so stoßen, daß die Achse keinen Stoß auszuhalten hat, so muß man ihn in dem zu O gehörenden Schwingungsmittelpunkt F senkrecht zu OSF treffen.

Man nennt deshalb den Schwingungsmittelpunkt auch Stoßmittelpunkt (centrum percussionis nach Descartes, der schon die Theorie desselben kannte und einige Beispiele berechnete. Die Berechnung kommt auf die von Schwerpunkten und Trägheitsmomenten heraus).

Erfahrungsgemäß ist jedem Handwerker die Existenz und Bedeutung des Stoßmittelpunktes bekannt: er wird ein Schlagwerkzeug (Hammer) stets so anfassen, daß sein Handgelenk keinen heftigen Stoß erfährt.

Ebenso wird man Maschinen, welche Stößen ausgesetzt sind, möglichst so konstruieren, daß die Drehachse stoßfrei wird, einmal aus Festigkeitsgründen, dann auch deshalb, damit für den Stoßprozeß das Lager als reibungsfrei angesehen werden kann. Auch der Klöppel in einer Glocke wird stoßfrei aufgehängt.

300. Das ballistische Pendel von Robins (1742) dient dazu, Geschwindigkeiten von Geschossen zu messen: es besteht aus einem kastenförmigen Pendel, das mit weichen aber zähen Materialien angefüllt ist, um das Geschoß aufzufangen und möglichst schnell zur Ruhe zu bringen. Trifft das Geschoß im Abstande s von der Drehachse mit der Geschwindigkeit v ein, so ist in bezug auf die Drehachse vor dem Stoß das Moment der Massengeschwindigkeiten $ms\omega$. Durch den Stoß wird das ganze Pendel mitsamt dem steckengebliebenen Geschoß eine Winkelgeschwindigkeit ω erhalten haben, das Moment der Massengeschwindigkeiten nach dem Stoß ist demnach

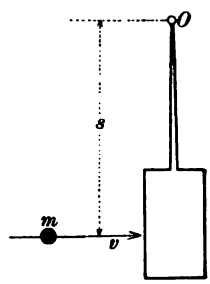


Fig. 234.

$$(T + ms^2)\omega.$$

Nehmen wir die Achse als reibungsfrei an, was wir um so mehr tun dürfen, je näher der Treffpunkt dem Stoßmittelpunkt liegt, so wirkt auf das ganze System von Geschoß und Pendel zusammen kein Drehstoß, also ist nach dem Momentensatz, der mangels eines Drehstoßes die Erhaltung des Momentes der Massengeschwindigkeiten aussagt,

$$msv = (T + ms^2)\omega,$$

also

$$v = \frac{T + ms^2}{ms}\omega.$$

ω kann aber aus dem Ausschlage des Pendels bestimmt werden (siehe Nr. 92).

301. Energieverlust beim Stoße eines Hammerwerkes. Ein um eine horizontale Achse drehbarer Hammer werde durch den Daumen eines rotierenden Rades angestoßen und so in die Höhe gehoben. Welche Bewegung tritt ein und wie groß ist der Energieverlust, wenn wir den Stoß als unelastisch ansehen, d. h. annehmen, daß nach dem Moment des Auftreffens Daumen und Hammer so lange in Berührung bleiben, bis sie voneinander abgleiten?

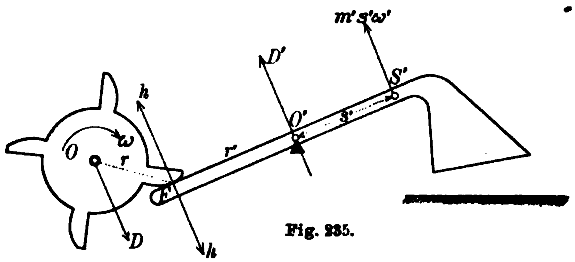


Fig. 235.

Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, daß die Drehpunkte O, O' und der Treffpunkt F auf einer Geraden liegen, und daß diese Gerade auch die Berührungsfläche zwischen Daumen und Hammer enthalte.

OF sei r, $O'F = r'$, alle Größen bezüglich des Hammers mögen gestrichelt, alle bezüglich der Welle ungestrichelt werden.

Die Welle habe vor dem Stoße die Winkelgeschwindigkeit ω_0. Dann ist wegen der Hypothese des unelastischen Stoßes

$$r\omega = r'\omega'. \tag{1}$$

Der Momentensatz gibt für die Welle

$$T(\omega_0 - \omega) = hr + W \tag{2}$$

— h ist die Stoßkraft —, für den Hammer

$$T'\omega' = hr' - W'. \tag{3}$$

W resp. W' bedeuten die Reibungsmomente in den Lagern.

Seien die Stoßdrucke in den Lagern D und D', so ist

$$\left.\begin{aligned} W &= \varrho D \\ W' &= \varrho' D' \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

wenn ϱ, ϱ' die Radien der Reibungskreise bedeuten. Um nun D und D' zu finden, wenden wir den Schwerpunktssatz auf Welle und Hammer an.

Die Welle sei zentriert, dann ist, weil der Schwerpunkt in Ruhe bleibt, und D und h die einzigen Stoßkräfte sind, die auf die Welle wirken

$$D = h. \tag{5}$$

Der Hammer dagegen wird exzentrisch sein. s sei die Entfernung des Schwerpunktes S' von O' und liege, der Einfachheit halber sei das angenommen, ebenfalls auf der Geraden OFO'.

Dann gibt der Schwerpunktssatz für den Hammer

$$m's'\omega' = -h + D'$$

d. h.

$$D' = h + m's'\omega'. \tag{6}$$

Setzen wir nun (5) und (6) in (4) ein, dann (4) in (2) und (3), so können wir aus (1), (2), (3) unter Elimination von h die Werte von ω und ω' berechnen. Wir erhalten

$$\omega = \omega_0 \frac{T(r'-\varrho')r'}{T'(r+\varrho)r + T(r'-\varrho')r' + m'\varrho's'r(r+\varrho)},$$

$$\omega' = \omega_0 \frac{T(r'-\varrho')r}{T'(r+\varrho)r + T(r'-\varrho')r' + m'\varrho's'r(r+\varrho)}.$$

Man kann nun leicht den Energieverlust infolge des Stoßes ausrechnen:

$$\varDelta E = \frac{1}{2} T\omega_0^2 - \frac{1}{2} T\omega^2 - \frac{1}{2} T'\omega'^2,$$

in den man nur die Ergebnisse für ω und ω' einzusetzen braucht. Wir geben die Schlußformel nur für den Fall $\varrho = \varrho' = 0$, d. h. bei Vernachlässigung der Zapfenreibung

$$\varDelta E = \frac{1}{2} T\omega_0^2 \frac{T'r^2}{T'r^2 + Tr'^2}.$$

Das ist natürlich nicht der ganze Energieverlust, den die Maschine decken muß. Während nach dem Stoße der Hammer abgleitet, geht auch noch Energie infolge der Reibung verloren und außerdem noch Energie infolge der Zapfenreibung während des Leerlaufes der Welle.

Eine volle Theorie solcher Hammerwerke auf Grund der vorgetragenen Stoßprozesse hat wohl zuerst Poncelet aufgestellt, der geniale Begründer der eigentlichen technischen Mechanik zu Anfang des 19. Jahrhunderts. Siehe auch das Referat von Heun: „Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik".

302. Plötzliche Fixierungen. Die umgekehrte Aufgabe, wie die, einen Körper durch einen Anstoß in Bewegung zu setzen, ist die Beantwortung der Frage: Welche Bewegung tritt ein, wenn ich dem schon bewegten Körper plötzlich gewisse Bewegungsbeschränkungen auferlege, wenn ich z. B. plötzlich einen Punkt oder eine Achse fixiere?

1. Behandeln wir zunächst das ebene Problem. Ein Körper befinde sich in ebener Bewegung, $\bar{v}$ sei die Geschwindigkeit des Schwerpunktes, ω die Winkelgeschwindigkeit. Plötzlich werde ein Punkt A festgehalten in einer Hauptebene parallel der Bewegungsebene. Welche Drehung um A tritt ein und wie groß ist der Reaktionsstoß von A?

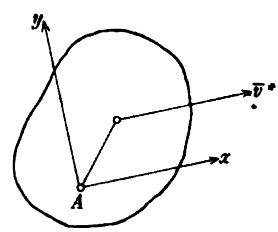


Fig. 236.

Wir legen durch A ein Koordinatensystem, die x-Achse sei $\bar{v}$ parallel. In bezug auf dieses Systems habe der Schwerpunkt S momentan die Koordinaten x, y.

Nach dem Stoße habe der Körper die Winkelgeschwindigkeit ω_1, so daß S die Geschwindigkeitskomponenten

$$-y\omega_1 \quad \text{und} \quad x\omega_1$$

bekommt.

Seien h_x, h_y die Stoßkomponenten, welche das Lager A auszuhalten hat, so ist nach dem Schwerpunktssatz

$$\begin{aligned} m(-y\omega_1 - v) &= -h_x, \\ mx\omega_1 &= -h_y \end{aligned}$$

und nach dem Momentensatz, bezogen auf den Schwerpunkt

$$T_S(\omega_1 - \omega) = -h_x \cdot y + h_y \cdot x.$$

Daraus berechnen sich die Unbekannten ω_1, h_x, h_y zu

$$\omega_1 = \omega \frac{T_S}{T_A} - v\frac{my}{T_A},$$

wo $T_A = T_S + m(x^2 + y^2)$ das Trägheitsmoment in bezug auf A ist.

$$\begin{aligned} h_x &= my\omega_1 + mv, \\ h_y &= -mx\omega_1 \end{aligned}$$

sind die Komponenten des Reaktionsstoßes, den das Festhaltende in A empfängt.

Aufgabe 132: Ein homogener Stab von 1 m Länge und 1 kg Gewicht bewegt sich senkrecht zu seiner Längsrichtung ohne Drehung mit einer Geschwindigkeit von 5 m/Sec. Er stößt mit einem Ende an. Welche Winkelgeschwindigkeit wird er erhalten und wie groß ist der Stoß?

2. Lösen wir die allgemeine Aufgabe: Ein irgendwie bewegter starrer Körper wird plötzlich in einem Punkte A festgehalten. Wie bewegt er sich hinterher und wie groß ist die Stoßkraft?

Sei $\bar{v}$ die Geschwindigkeit des Schwerpunktes vor dem Stoß, $\bar{J}_S$ der Impulsvektor der Drehung um den Schwerpunkt vor dem Stoß, $\bar{J}_A$, $\bar{J}_A'$ die Impulsvektoren bezüglich A vor und nach dem Stoß, $\bar{\omega}$ und $\bar{\omega}'$ die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten, Vektor $\overline{SA} = \bar{s}$, die Stoßkraft, welche das Hemmnis in A empfängt, gleich $\bar{h}$.

Dann hat nach dem Stoß S die Geschwindigkeit $-\overline{s\omega}'$, also ist nach dem Schwerpunktssatz

$$m(-\bar{s}\bar{\omega}' - \bar{v}) = -\bar{h} \tag{1}$$

und nach dem Momentensatz

$$\bar{J}_A' - \bar{J}_A = 0. \tag{2}$$

Dabei ist

$$\bar{J}_A' = \frac{\partial E_A'}{\partial \bar{\omega}'},$$

wo E_A' die Rotationsenergie um den Punkt A nach dem Stoße ist, so daß die Gleichung (2) eine Gleichung für $\bar{\omega}'$ ist. Dabei ist nach dem allgemeinen Satze über den Wechsel des Bezugspunktes bei Momenten

$$\bar{J}_A = \bar{J}_S - m\overline{sv}.$$

Wenn man die Ergebnisse von Nr. 273 benutzt, kann man die Gleichung (2) nach $\bar{\omega}'$ auflösen. Man drücke E_A' durch $\bar{J}_A'$ aus; dann ist

$$\bar{\omega}' = \frac{\partial E_A'}{\partial \bar{J}_A'}.$$

Man bilde also formal diesen Differentialquotienten und setze nach der Differentiation für $\bar{J}_A'$ den Wert $\bar{J}_A = \bar{J}_S - m\overline{sv}$ ein.

Gleichung (1) gibt dann den Stoß:

$$\bar{h} = m(\overline{s\omega}' + \bar{v}).$$

3. Ein Körper, dessen Bewegung vorher durch die Geschwindigkeit $\bar{v}$ des Schwerpunkts und durch $\bar{\omega}$ resp. $\bar{J}_S$ gegeben war, werde plötzlich gezwungen, um eine bestimmte Achse g reibungsfrei zu rotieren.

Die Achse wird Stoßkräfte ausüben, welche eine Resultierende $\bar{h}$ und für einen Punkt A der Achse ein Moment $\bar{D}$ haben, das jedoch senkrecht zur Achse steht, da die Reaktionskräfte kein Moment um die Achse haben können.

Die Stoßgleichungen lauten

$$\bar{J}_A' - \bar{J}_A = \bar{D}, \tag{1}$$

$$m(\overline{s\omega}' - \bar{v}) = \bar{h}, \tag{2}$$

wo $\bar{\omega}'$ in der gegebenen Geraden liegt, $\bar{s} = \overline{AS}$ ist.

Aus (1) und der Bedingung, daß $\bar{D}$ senkrecht zur Achse steht, folgt zur Bestimmung von ω', *daß die Komponenten von $\bar{J}_A$ in Richtung der Achse vor und nach dem Stoße einander gleich sein müssen.*

Die Komponente nach dem Stoße ist $T\omega'$, wenn T das Trägheitsmoment bezüglich g ist. Dagegen ist

$$\bar{J}_A = \bar{J}_S + m\overline{sv}.$$

Nehmen wir nun als Achsen die Hauptachsen durch S und habe in bezug auf dieses System g die Richtungskosinusse a, b, c; A die Koordinaten x, y, z, so hat $\bar{J}_A$ nach g die Komponente

$$A\omega_x \cdot a + B \cdot \omega_y \cdot b + C\omega_z \cdot c - m(yv_z - zv_y)a$$
$$- m(zv_x - xv_z)b - m(xv_y - yv_x)c.$$

Nennen wir diesen Ausdruck, den wir als bekannt ansehen dürfen, wenn die Bewegung vorher bekannt war, kurz J, so berechnet sich ω' aus der Gleichung

$$T\omega' = J.$$

$\bar{h}$ und $\bar{D}$ berechnen sich dann nach den Gleichungen (1) und (2).

303. Geschichte und Literatur. Schon bei Galilei tauchen Stoßprozesse auf. Eine systematische Behandlung findet der Stoß bei Marcus Marci und Descartes um 1600. Descartes liebte den Stoß aus metaphysischen Gründen; nach ihm sollte das ganze Weltgeschehen in Stößen bestehen. Er behauptete daher auch die Erhaltung von $\mathrm{S}\,dmv$, was freilich nur bei Stößen in derselben Richtung richtig ist; wir wissen aus dem Schwerpunktssatze, daß bei einem System, das von äußeren Stößen frei ist, nicht $\mathrm{S}\,dmv$, sondern $\mathrm{S}\,dm\bar{v}$ erhalten bleibt. Drei Autoren nun brachten die Stoßtheorie gegen Ende des 17. Jahrhunderts auf den Stand, den wir hier vorgetragen haben: Wallis, Huyghens und Wren. Wallis entdeckte 1668 den Stoß unelastischer Körper, die beiden anderen Autoren unabhängig voneinander die Gesetze des elastischen Stoßes. Newton faßte die Ergebnisse zusammen und ergänzte sie in der geschilderten Weise.

In der Zeit um 1800 machten dann die französischen Mechaniker der Ponceletschen Schule noch manche Anwendungen und Versuche über den Energieverlust bei Stößen, so namentlich L. Carnot.

Eine neuerliche Aufnahme und Erweiterung der Experimente in einem den technischen Anwendungen entsprechenden Maßstabe wäre äußerst wünschenswert.

F. Neumann und St. Vénant, dann später Heinrich Hertz und W. Voigt haben versucht, von der Elastizitätstheorie her einiges Licht in das Dunkel der Stoßprozesse zu bringen.

Eine wertvolle Förderung unserer Kenntnisse von den elastischen Stoßvorgängen bedeutet die Habilitationsschrift von C. Ramsauer: Experimentelle und theoretische Grundlagen des elastischen und mechanischen Stoßes. Ann. d. Phys. (IV), Bd. 30, 1909.

Poisson löste analog unserer Darstellung in Nr. 295 mit Benutzung der Sätze von 296 den allgemeinen einpunktigen Berührungsstoß zweier starrer Körper.

Wegen weiterer Ausführungen theoretischer Art sei auf die Lehrbücher verwiesen, vor allem auf das Werk von Thomson und Tait: Natural Philosophy, und auf Routh, Dynamik, Bd. I, Kap. II, III, IV, VI, VII.

Kapitel XI.

Kinetik der Systeme, die aus einer endlichen Anzahl starrer Körper bestehen.

§ 53. Die synthetische Methode.

304. Allgemeine Bemerkungen. Eingeprägte und Reaktionskräfte. Wir betrachten ein System, bestehend aus einer endlichen Anzahl starrer Körper, die sich gegenseitig berühren und von festen oder selbst wieder bewegten starren Flächen gestützt werden können. Fast alle Maschinen, sofern sie nicht unmittelbar flüssige oder leicht biegsame Elemente (Seile, Riemen) enthalten, können dazu gerechnet werden. Die Berührung kann natürlich sehr verschiedenartig sein, häufig wird der eine Teil einen Zapfen tragen, der dann von einer zylinderförmigen Höhlung eines anderen Körpers berührt wird.

Ein solches System kann Kräften unterworfen sein, die als gegeben oder doch durch Messung leicht bestimmbar angesehen werden können, z. B. der Schwere, elektrischen und magnetischen Kräften, Drucke von anderen Körpern, die aber weder zum System selbst noch zu den starren Führungsflächen gerechnet werden (z. B. Dampfdrucke, Kraftabgabe der Maschine an Arbeitsmaschinen vermittels Treibriemen durch Druck und Reibung zwischen Riemen und Triebrad); auch die gegenseitige Anziehung der Teile vermöge der allgemeinen Gravitation gehörte hierher, wenn wir sie berücksichtigen wollten.

Eine andere Kategorie bilden die Reibungskräfte zwischen den einzelnen Körpern oder zwischen diesen und den starren Stützflächen. Auch wenn es sich um Gleitreibung handelt oder Roll- bzw. Bohrreibung der Bewegung, hängen sie noch von den unbekannten Normaldrucken ab, sind also von vornherein nicht vollständig bekannt. Da aber immerhin die Bewegungsreibung nicht allein durch den bloßen Umstand, daß die Körper als sich berührend vorausgesetzt werden, bestimmt ist, sondern nach physikalisch (experimentell) zu ermittelnden Daten (Glätte, Weichheit des Materials usw.), auch von der Geschwindigkeit usw. abhängt, kurz noch von andern Ursachen als der kinematischen Konstitution des Systems, so rechnen wir sie nebst den zuerst genannten direkt gegebenen Kräften zu den eingeprägten Kräften.

Ihnen gegenüber stehen die Reaktionskräfte, die durch die Annahme der Starrheit aus eigentlich durch die Deformationen bestimmten Spannungen hervorgehen, wegen Außerachtlassung derselben aber ihre physikalischen Ursachen verlieren und somit a priori als gänzlich unbekannt anzusehen sind. Zu ihnen gehören die inneren Spannungen der starren Körper, die Normaldrucke zwischen den starren Körpern und die Reibungskräfte bzw. -momente, wenn es sich um Haftreibungen handelt, d. h. die betreffende Bewegung nicht eintritt.

Die Aufgabe wird darin bestehen, die Bewegung des Systems und soweit als möglich auch die unbekannten Reaktionskräfte zu berechnen. Soweit die eingeprägten Kräfte unbekannt sind, nämlich von den Reaktionskräften abhängen (z. B. die Bewegungsreibungen), werden sie dann von selbst mitbestimmt.

Die synthetische Methode besteht nun einfach darin, daß man für jeden einzelnen Körper den Schwerpunktssatz und den Momentensatz aufstellt, wobei natürlich zu den an ihm angreifenden äußeren Kräften alle Drucke an seiner Oberfläche mitzuzählen sind, und daß man aus den so erhaltenen 2ν *vektoriellen oder* 6ν *skalaren Gleichungen* (ν = Anzahl der starren Körper) *die unbekannten Drucke eliminiert.*

Die später vorzutragende analytische Theorie wird zeigen, daß man auf diese Weise stets genau so viele reine, d. h. von den Reaktionskräften explizit freie Bewegungsgleichungen erhält, als man braucht, um die Bewegung des Systems zu bestimmen. Dagegen wird die Berechnung der Reaktionskräfte nicht immer möglich sein, das System kann statisch unbestimmt sein, wie man sagt. Sind Bewegungsreibungen zu berücksichtigen, so kann es sich infolge der statischen Unbestimmtheit ereignen, daß es nicht gelingt, die erforderliche Anzahl von auch implizit reinen Bewegungsgleichungen zu erhalten; daß also die Lösung des Problems mit den Methoden der Kinetik des starren Körpers (der sogenannten Stereokinetik) nicht möglich ist. Zwar sind die Bewegungsgleichungen auch jetzt von den Reaktionskräften explizit frei; aber die vorkommenden eingeprägten Kräfte hängen ihrerseits wieder von den Reaktionskräften ab.

(Vergleiche zu den Ausführungen dieser Nummer auch die Nummern 58, 61, 62, 65, 141, 151, 167, 186, 192, 193 und 218, dann vor allem später Nr. 312, wo wir eine allgemeine Definition der Reaktionskräfte geben werden). Eines Beweises der synthetischen Methode bedarf es weiter nicht, denn Schwerpunktssatz und Momentensatz gelten ja für jeden von uns aus der uns umgebenden mechanischen Natur herausgegriffenen Körper.

Gehen wir also zur Behandlung von Beispielen über.

305. Das Schubkurbelgetriebe. Das Problem. Das einfache Schubkurbelgetriebe besteht wesentlich aus drei festen Körpern: den rein rotierenden Teilen, die ein Ganzes bilden: Welle, Kurbel und Schwungrad; den rein hin- und hergehenden Teilen: Kreuzkopf, Kolbenstange und Kolben und drittens der Lenkstange, welche beide Teile verbindet und eine allgemeine ebene Bewegung ausführt (vgl. Nr. 155). Das System hat einen Grad der Freiheit, d. h. es genügt, eine Variabele, etwa den Kurbelwinkel ϑ, zu kennen, um die Lage des ganzen Systems zu bestimmen. Wir brauchen also auch nur eine reine Bewegungsgleichung.

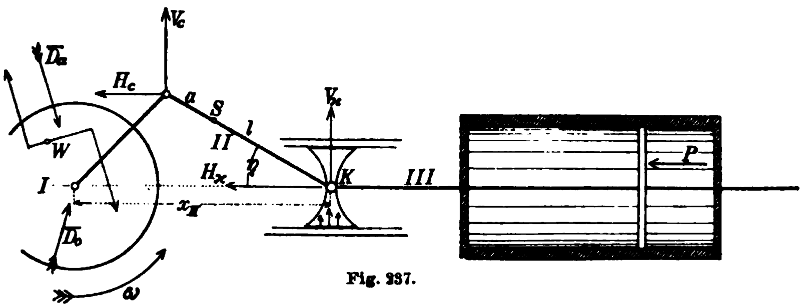


Fig. 237.

Handelt es sich um eine Dampfmaschine, die eine Transmission oder irgendeine Arbeitsmaschine antreibt, so haben wir von eingeprägten Kräften in erster Linie zu berücksichtigen:

a) den Dampfdruck, dessen Resultierende

$$P = p_1 F_1 - p_2 F_2$$

ist, wo $p_1 p_2$ die spezifischen Drucke hinter und vor dem Kolben, F_1 und F_2 die entsprechenden Kolbenflächen sind. p_1 und p_2 werden als Funktionen des Kolbenweges s — etwa gezählt von der äußersten Lage des Kreuzkopfes aus, so daß $s = r + l - x_{III}$ ist — am besten empirisch mittels eines Indikators in Form eines Diagramms aufgenommen.

b) Die Gegenwirkung der angekuppelten Arbeitsmaschine, die an der Welle, eventuell an einem besonderen Triebrad auf derselben wirkt, und ein der Bewegung entgegenstehendes Moment W sowie einen Druck $\overline{D}_a$ durch die Wellenachse ausübt. (Bei einem Treibriemen z. B. wird W von den Reibungskräften zwischen Rad und Riemen, $\overline{D}$ von den Normaldrucken und den Reibungen zwischen beiden gebildet.)

c) Die Gewichte der Maschinenteile. Um nun für diese erste Einführung in den Gegenstand eine Vereinfachung zu haben, lassen wir sie fort, obgleich ihre Berücksichtigung gar keine wesentliche Schwierigkeit bieten würde. Bei liegenden Maschinen (Kolbenstange horizontal) machen in der Regel die Gewichte nicht viel aus. Anders ist es bei stehenden Maschinen.

d) Die Reibungskräfte zwischen den bewegten Teilen bilden eine wesentliche Schwierigkeit. Einmal deshalb, weil sie von den

Drucken abhängen, dann deshalb, weil man erst neuerdings angefangen hat, die genaueren Gesetze der geschmierten Lagerreibung zu studieren (Striebeck u. a., siehe Nr. 60 und 143). Wir wollen uns der noch meist üblichen Behandlungsmethode anschließen, die darin besteht, daß man zur Berücksichtigung der Reibung zunächst einmal einen festen, experimentell bestimmten Teil von P abzieht, nämlich das für den Leerlauf nötige mittlere P, und dann noch von dem variabeln Rest von P eine ebenfalls aus der Erfahrung bestimmte Anzahl von Prozenten. Im folgenden soll P schon stets den so reduzierten Dampfdruck bedeuten, so daß wir dann von der Reibung absehen können. Eine sehr exakte Berücksichtigung des Reibungswiderstandes wird so natürlich nicht erzielt.

An Reaktionskräften haben wir nun:

a) den gesamten Widerdruck $\overline{D}_0$ des Wellenlagers, er geht durch die Lagermitte;

b) den Zapfendruck $\overline{D}_c$ im Kurbelzapfen und zwar $\overline{D}_c$ ausgehend von der Lenkstange auf die Kurbel, $-\overline{D}_c$ ausgehend von der Kurbel auf die Lenkstange;

c) den Zapfendruck $\overline{D}_k$ am Kreuzkopf und zwar ausgeübt vom Kolben auf die Lenkstange;

d) den Lagerdruck der Führung des Kreuzkopfes und des Kolbens; er hat eine vertikale Resultierende V_b und ein Moment M_b in bezug auf den Kreuzkopfzapfen.

Die Komponenten der einzelnen $\overline{D}$ mögen V und H heißen, nach oben bzw. nach links positiv gezählt. r sei der Kurbelarm, l die Schubstangenlänge, $\lambda = \frac{r}{l}$, ϑ der Kurbelwinkel, η ein Hilfswinkel, der (s. Fig. 237) mit ϑ in der Beziehung

$$r : l = \sin\eta : \sin\vartheta \quad \text{oder}$$

$$\sin\eta = \lambda \sin\vartheta$$

steht. Die drei Teile seien durch die Indizes I, II, III gekennzeichnet.

306. Fortsetzung: Kinematik. 1. Der Schwerpunkt der Lenkstange liege auf CK im Abstande a von C. Dann sind die Koordinaten des Schwerpunktes

$$x^*_{\text{II}} = r\cos\vartheta + a\cos\eta,$$

$$y^*_{\text{II}} = r\sin\vartheta - a\sin\eta,$$

woraus vermöge

$$\dot\eta = \eta'\omega,$$

— wo $\eta' = \frac{d\eta}{d\vartheta} = \lambda\frac{\cos\vartheta}{\cos\eta}$ bedeutet — folgen

$$\left.\begin{aligned} \dot x^*_{\text{II}} &= \xi(\vartheta)\omega, \\ \dot y^*_{\text{II}} &= \zeta(\vartheta)\omega, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

wo ξ, ζ wohlbekannte Funktionen von ϑ sind, z. B.

$$\xi = -r\sin\vartheta - a\sin\eta\cdot\lambda\frac{\cos\vartheta}{\cos\eta}$$

usw. Aus den Formeln (1) folgt

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}_{\mathrm{II}}^{*} &= \xi(\vartheta)\dot{\omega} + \xi'(\vartheta)\omega^2,\\ \ddot{y}_{\mathrm{II}}^{*} &= \zeta(\vartheta)\dot{\omega} + \zeta'(\vartheta)\omega^2\end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Der Strich $'$ bedeute stets die Ableitung nach ϑ.

2. Für den **Kolben** ist die Strecke OK

$$x_{\mathrm{III}} = r\cos\vartheta + l\cos\eta,$$

also die Kolbengeschwindigkeit

$$\dot{x}_{\mathrm{III}} = -u(\vartheta)\cdot\omega, \tag{2}$$

wo

$$u(\vartheta) = r\sin\vartheta + l\sin\eta\cdot\eta' = r\left(\sin\vartheta + \sin\eta\cdot\frac{\cos\vartheta}{\cos\eta}\right)$$

oder

$$u(\vartheta) = r\,\frac{\sin(\vartheta+\eta)}{\cos\eta}$$

ist (vgl. Nr. 225, wo man aus der Figur sofort entnimmt

$$OD = u = r\frac{\sin(\vartheta+\eta)}{\cos\eta}\Big).$$

Aus (2) folgt weiter

$$\ddot{x}_{\mathrm{III}} = -u(\vartheta)\dot{\omega} - u'(\vartheta)\omega^2. \tag{2'}$$

3. Endlich brauchen wir außer

$$\dot{\eta} = \eta'\omega \tag{3}$$

noch

$$\ddot{\eta} = \eta''\omega^2 + \eta'\dot{\omega}. \tag{3'}$$

Man beachte aber, daß die Winkelbeschleunigung $\ddot{\eta}$ der Lenkstange rechtsherum positiv zählt.

Alle Geschwindigkeiten sind ω proportional, alle Beschleunigungen bestehen aus zwei Gliedern: das eine ist $\dot{\omega}$, das andere ω^2 proportional. Die Faktoren sind wohlbekannte Funktionen von ϑ.

307. Fortsetzung: Aufstellung der Bewegungsgleichungen. Wir erhalten für jeden der drei starren Körper drei Gleichungen, insgesamt also neun Gleichungen. Von diesen wollen wir aber nur diejenigen hinschreiben, die wir brauchen, um die reine Bewegungsgleichung zu bekommen:

I) Für die rotierenden Teile den Momentensatz bezüglich O:

$$T_{\mathrm{I}}\dot{\omega} = -W + H_c\cdot r\sin\vartheta + V_c r\cos\vartheta. \tag{1}$$

Der Schwerpunktssatz kann dazu dienen, $\overline{D}_0$ zu berechnen.

II) Für die Lenkstange alle drei Gleichungen:

$$m_{\mathrm{II}}\ddot{x}_{\mathrm{II}}^* = H_c - H_k, \tag{2}$$

$$m_{\mathrm{II}}\ddot{y}_{\mathrm{II}}^* = - V_c + V_k, \tag{3}$$

$$T_{\mathrm{II}}\ddot{\eta} = H_c a \sin\eta - V_c a \cos\eta - V_k(l-a)\cos\eta + H_k(l-a)\sin\eta. \tag{4}$$

III) Für den Kolben den Schwerpunktssatz in horizontaler Richtung

$$m_{\mathrm{III}}\ddot{x}_{\mathrm{III}} = - P + H_k. \tag{5}$$

Der Schwerpunktssatz in vertikaler Richtung und der Momentensatz könnten dazu dienen, V_b und M_b zu berechnen.

Nun enthalten die vorstehenden fünf Gleichungen vier unbekannte Reaktionen, nämlich H_k, V_k, H_c, V_c. Man kann sie in der Tat eliminieren, die Gleichungen sind ja linear, und wird so eine reine Bewegungsgleichung erhalten.

Rechnet man H_k aus (5), dann H_c aus (2), endlich V_c und V_k aus (3) und (4) aus und setzt das Ergebnis in (1) ein, so erhält man eine Gleichung der Form

$$T_{\mathrm{I}}\dot{\omega} + A = - W + Pr\frac{\sin(\vartheta+\eta)}{\cos\eta}, \tag{I}$$

wo die Abkürzung A bedeutet

$$A \equiv \lambda T_{\mathrm{II}}\ddot{\eta}\frac{\cos\vartheta}{\cos\eta} - m_{\mathrm{II}}\ddot{x}_{\mathrm{II}}^*\left(r\sin\vartheta + \lambda\frac{\cos\vartheta}{\cos\eta}\sin\eta\, a\right) + m_{\mathrm{II}}\ddot{y}_{\mathrm{II}}^*\lambda(l-a)\cos\vartheta - m_{\mathrm{III}}\ddot{x}_{\mathrm{III}} r\frac{\sin(\vartheta-\eta)}{\cos\eta}.$$

Auf der rechten Seite steht außer dem Widerstandsmoment W noch

$$rT = rP\cdot\frac{\sin(\vartheta+\eta)}{\cos\eta},$$

wo T den Tangentialdampfdruck bedeutet, d. h. den statisch auf den Kurbelkreis reduzierten Druck (siehe auch Nr. 155).

Links steht außer $T_{\mathrm{I}}\dot{\omega}$ noch ein Ausdruck A, der von den Massen des Gestänges abhängt und der verschwindet, wenn man diese Massen als sehr klein gegen die Masse des Schwungrades (wesentlich T_{I}) ansieht. Da historisch diese letztere Auffassung die älteste ist und sich die Notwendigkeit, die Gestängemassen zu berücksichtigen, erst später einstellte, liebt man es, die Wirkung des Gestänges als ein Zusatzmoment $-A$ auf die rechte Seite zu schieben und als ein vom Gestänge verursachtes Drehmoment aufzufassen. Man nennt deshalb auch vielfach $-A$ den Massendruck oder die Massenwirkung des Gestänges.

308. Schluß: Weitere Diskussion der reinen Bewegungsgleichung I. Der ältesten Behandlungsweise entspricht mit voller Vernachlässigung des Massendruckes A die Gleichung

$$T\dot{\omega} = -W + rT. \tag{I'}$$

(vgl. Nr. 246). Erst Radinger erkannte in seinem 1870 erschienenen Werke: „Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit" die Bedeutung des Massendrucks namentlich für schnellaufende Maschinen.

Beachtet man den Umstand, daß in A jedes Glied eine Beschleunigung als Faktor enthält und dann den Satz am Schlusse von Nr. 316, so erkennt man, daß A die Form hat

$$A = G(\vartheta)\dot{\omega} + H(\vartheta)\omega^2,$$

wo $G(\vartheta)$ und $H(\vartheta)$ wohlbekannte, jederzeit berechenbare Funktionen von ϑ sind. Deshalb nimmt die reine Bewegungsgleichung die Form an

$$[T_{\mathrm{I}} + G(\vartheta)]\dot{\omega} + H(\vartheta)\omega^2 = -W + rT. \tag{I$^{\mathrm{II}}$}$$

Ausgehend von dem Gedanken, daß die Massen des Gestänges immerhin klein sind gegen die des Schwungrades, daß also $G(\vartheta)$ und $H(\vartheta)$ klein sind gegen T, vernachlässigt Radinger noch immer $G(\vartheta)$ gegen T_{I} und setzt in dem Korrektionsglied $H(\vartheta)\omega^2$, das wegen großen ω's bedeutend werden kann ($\omega^2 \gg \dot{\omega}$ angenommen), das an sich variable ω gleich dem mittlern, aus der Tourenzahl bestimmten ω_0. Dann nimmt Gleichung (I) die Form an

$$T_{\mathrm{I}}\dot{\omega} = -W + rT - H(\vartheta)\cdot\omega_0^2, \tag{I''}$$

wo jetzt auf der rechten Seite lauter bekannte Funktionen von ϑ stehen, wenn der Widerstand W der Arbeitsmaschine und der Dampfdruck P als bekannt angesehen werden dürfen.

Bei der Berechnung von $H(\vartheta)$ pflegt man nun noch des weiteren Vernachlässigungen zu machen, die darauf beruhen, daß $\lambda = \frac{r}{l}$ eine nicht sehr große Zahl ist, nämlich etwa $\frac{1}{5}$. Man läßt daher wohl immer Glieder mit λ^2 gegen 1 fort, was Fehler von etwa 4% ausmacht, oft aber schon selbst Glieder mit λ, d. h. man setzt $l = \infty$ gegen r und spricht von „unendlich langer" Schubstange.

Hat man so $H(\vartheta)$ berechnet — das Material dazu ist durch die vorhergehenden Betrachtungen gegeben — so ist die Aufgabe der Berechnung des erforderlichen Schwungrades und ihre Lösung dieselbe wie in der elementaren Theorie, welche die Maschine als einen einzigen rotierenden Körper ansieht, auf den die Momente $-W$, rT, und nun noch als Ersatz für das weggelassene Gestänge $-H\cdot\omega_0^2$ wirken. Wir kommen später noch einmal auf eine verbesserte Theorie der Schwungradberechnung zurück (Nr. 320 und 321).

309. Aufgaben: 133. Man stelle nach der synthetischen Methode die beiden reinen Bewegungsgleichungen für das Doppelpendel auf, das aus zwei starren Körpern besteht, die um parallele horizontale Achsen drehbar seien, der eine um eine feste Achse O, der andere um eine feste Achse C des ersten Körpers. Der Schwerpunkt des ersten Körpers S_I liege auf OC (Fig. 238). Von Widerständen sehe man ab, so daß allein die Schwerkräfte eingeprägt sind.

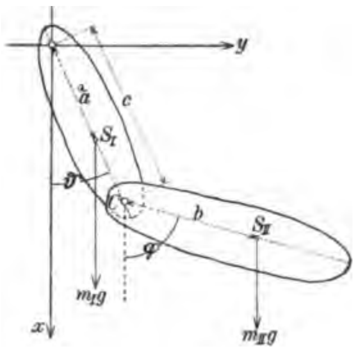


Fig. 238.

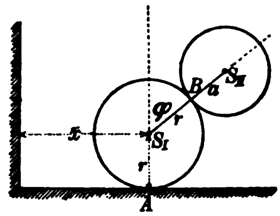


Fig. 239.

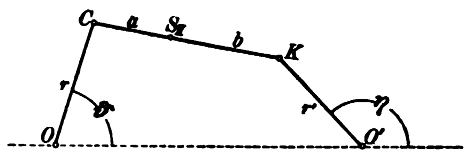


Fig. 240.

134. In derselben Weise suche man die beiden reinen Bewegungsgleichungen für zwei zylindrische Walzen, von denen die eine auf dem horizontalen Boden, die andere parallel auf der ersten abrolle. Beide seien zentriert. Von Rollreibung und Luftwiderstand werde abgesehen. Man nehme an, daß reines Rollen ohne Gleiten an beiden Berührungsstellen stattfindet und sehe von der Rollreibung ab, so daß nur die Gewichte eingeprägte Kräfte sind. Man diskutiere aber aus der Ungleichheitsbedingung für die Haftreibung, wie lange reines Rollen möglich ist (Fig. 239).

135. Man stelle die eine reine Bewegungsgleichung für die Schwinge auf. Der Schwerpunkt der Lenkstange liege auf CK (Fig. 240).

310. Verbesserung der synthetischen Methode. Man kann in manchen Fällen direkt reine Bewegungsgleichungen erhalten, wenn man den Momentensatz nicht für jeden einzelnen Körper allein, sondern für geeignet zusammengefaßte Gruppen und auf geeignet gewählte Punkte bezogen aufstellt. Man wird es sich zum Ziel nehmen, die Gruppen und Punkte so zu wählen, daß möglichst viele der unbekannten Reaktionskräfte entweder innere Kräfte werden oder doch kein Moment haben.

Dabei hat man die Resultate von Nr. 210 zu benutzen, welche allgemein aussagen, daß das Massenbeschleunigungsmoment in bezug auf einen Punkt A gleich ist

$$\frac{d\bar{J}_S}{dt} + m\overline{s w^*},$$

wo $\bar{s} = \overline{AS}$ ist.

Wir zeigen die Wirksamkeit der Methode an den beiden ersten in Nr. 309 genannten Aufgaben.

1. Das Doppelpendel.

Der Momentensatz für den zweiten Körper bezüglich C gibt sofort die erste reine Bewegungsgleichung

$$T_{\mathrm{II},s}\ddot{\varphi} - m_{\mathrm{II}}\ddot{x}_{\mathrm{II}}^{*} b \sin\varphi + m_{\mathrm{II}}\ddot{y}_{\mathrm{II}}^{*} b \cos\varphi = - m_{\mathrm{II}} g b \sin\varphi. \tag{1}$$

Dagegen der Momentensatz für das ganze System, bezogen auf 0

$$T_{\mathrm{I}}\ddot{\vartheta} + T_{\mathrm{II}}\ddot{\varphi} - m_{\mathrm{II}}\ddot{x}_{\mathrm{II}}^{*} \cdot y_{\mathrm{II}}^{*} + m_{\mathrm{II}}\ddot{y}_{\mathrm{II}}^{*} \cdot x_{\mathrm{II}}^{*}$$
$$= - m_{\mathrm{I}} g a \sin\vartheta - m_{\mathrm{II}} g (c \sin\vartheta + b \sin\varphi). \tag{2}$$

Dabei ist

$$x_{\mathrm{II}}^{*} = c\cos\vartheta + b\cos\varphi,$$
$$y_{\mathrm{II}}^{*} = c\sin\vartheta + b\sin\varphi,$$

also

$$\ddot{x}_{\mathrm{II}}^{*} = - c\sin\vartheta \cdot \ddot{\vartheta} - b\sin\varphi \cdot \ddot{\varphi} - c\cos\vartheta \cdot \dot{\vartheta}^2 - b\cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^2,$$
$$\ddot{y}_{\mathrm{II}}^{*} = c\cos\vartheta \cdot \ddot{\vartheta} + b\cos\varphi\ddot{\varphi} - c \cdot \sin\vartheta \cdot \dot{\vartheta}^2 - b\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2.$$

Setzt man dies in die Formeln (1), (2) ein und beachtet

$$T_{\mathrm{II},s} + m_{\mathrm{II}} b^2 = T_{\mathrm{II},c},$$

so erhält man

$$T_{\mathrm{II},c}\ddot{\varphi} + m_{\mathrm{II}} bc\ddot{\vartheta}\cos(\varphi - \vartheta) + m_{\mathrm{II}} bc\dot{\vartheta}^2 \sin(\varphi - \vartheta) + m_{\mathrm{II}} g b \sin\varphi = 0$$

und

$$[T_{\mathrm{I}} + m_{\mathrm{II}}(c^2 + bc\cos(\varphi - \vartheta))]\ddot{\vartheta} + [T_{\mathrm{II},c} + m_{\mathrm{II}} bc\cos(\varphi - \vartheta)]\ddot{\varphi}$$
$$+ bcm_{\mathrm{II}}\sin(\varphi - \vartheta)\dot{\vartheta}^2 - m_{\mathrm{II}} bc\sin(\varphi - \vartheta)\dot{\varphi}^2 + (m_{\mathrm{I}} g a + m_{\mathrm{II}} g c)\sin\vartheta$$
$$+ m_{\mathrm{II}} g b \cdot \sin\varphi = 0.$$

Die zweite Gleichung vereinfacht sich, wenn man die erste von ihr abzieht, zu

$$(T_{\mathrm{I}} + m_{\mathrm{II}} c^2)\ddot{\vartheta} + m_{\mathrm{II}} bc\cos(\varphi - \vartheta)\ddot{\varphi} - m_{\mathrm{II}} bc\sin(\varphi - \vartheta)\dot{\varphi}^2$$
$$+ (m_{\mathrm{I}} g a + m_{\mathrm{II}} g c)\sin\vartheta = 0.$$

Setzen wir kleine Schwingungen voraus und bleiben bei Gliedern erster Ordnung in ϑ, φ, $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$, $\ddot{\vartheta}$, $\ddot{\varphi}$ stehen, so reduzieren sich die Gleichungen auf

$$\left.\begin{aligned} &T_{\mathrm{II},c}\ddot{\varphi} + m_{\mathrm{II}} bc\ddot{\vartheta} + m_{\mathrm{II}} g b\varphi = 0. \\ &(T_{\mathrm{I}} + m_{\mathrm{II}} c^2)\ddot{\vartheta} + m_{\mathrm{II}} bc\ddot{\varphi} + (m_{\mathrm{I}} a + m_{\mathrm{II}\,c}) g\vartheta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

In eine weitere Behandlung dieser Gleichungen treten wir später ein (siehe § 57).

2. **Das Beispiel der abrollenden Walzen.** Es drehe sich die erste Walze mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\vartheta}$ rechtsherum, dann hat S_{I} die Geschwindigkeit $\dot{x} = r\omega$ und die Beschleunigung $\ddot{x} = r\dot{\omega}$ nach rechts.

S_{II} dagegen hat die Koordinaten

$$x + (r + a)\sin\varphi \quad \text{und} \quad r + (r + a)\cos\varphi,$$

also die Geschwindigkeitskomponenten

$$r\omega + (r + a)\cos\varphi \cdot \dot{\varphi} \quad \text{und} \quad -(r + a)\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

endlich die Beschleunigungskomponenten

$$\ddot{x}_{\mathrm{II}}^{*} = r\dot{\omega} + (r + a)\cos\varphi \cdot \ddot{\varphi} - (r + a)\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2$$

und

$$\ddot{y}_{\mathrm{II}}^{*} = -(r + a)\sin\varphi \cdot \ddot{\varphi} - (r + a)\cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^2.$$

Also lautet der Momentensatz für die zweite Walze bezüglich B

$$T_{\mathrm{II},S} \cdot \ddot{\varphi} + m_{\mathrm{II}}\ddot{x}_{\mathrm{II}}^{*} a\cos\varphi - m_{\mathrm{II}}\ddot{y}_{\mathrm{II}}^{*} a\sin\varphi = m_{\mathrm{II}} g a \sin\varphi$$

und der Momentensatz für das ganze System bezüglich A

$$T_{\mathrm{I},A}\,\dot{\omega} + T_{\mathrm{II},S}\ddot{\varphi}\, m_{\mathrm{II}}\ddot{x}_{\mathrm{II}}^{*}(a + r)\cos\varphi - m_{\mathrm{II}}\ddot{y}_{\mathrm{II}}^{*}(a + r)\sin\varphi = m_{\mathrm{II}} g (a + r)\sin\varphi.$$

Setzt man die obigen Werte für $\ddot{x}_{\mathrm{II}}^{*}$ und $\ddot{y}_{\mathrm{II}}^{*}$ ein und zieht wieder die erste von der zweiten ab, so erhält man die Gleichungen

$$[T_{\mathrm{II},S} + m_{\mathrm{II}} a (r + a)]\ddot{\varphi} + m_{\mathrm{II}} a r \cos\varphi \cdot \dot{\omega} = m_{\mathrm{II}} g a \sin\varphi,$$

$$[T_{\mathrm{I},A} + m_{\mathrm{II}} r^2 \cos\varphi]\dot{\omega} + m_{\mathrm{II}} r (r + a)\ddot{\varphi} = m_{\mathrm{II}} g r \sin\varphi.$$

Elimination von $\dot{\omega}$ gibt eine Gleichung der Form

$$\ddot{\varphi} = f(\varphi),$$

wo

$$f(\varphi) = \frac{m_{\mathrm{II}} g a T_{\mathrm{I},A} \sin\varphi}{T_{\mathrm{II},S} \cdot T_{\mathrm{I},A} + T_{\mathrm{II},S} \cdot m_{\mathrm{II}} r^2 \cos\varphi + T_{\mathrm{I},A} m_{\mathrm{II}} a (r + a)} = \frac{\alpha \sin\varphi}{\beta + \gamma\cos\varphi}.$$

Das Integral

$$\int f(\varphi)\, d\varphi$$

kann elementar ausgewertet werden. Setzen wir $\cos\varphi = z$, so ist

$$\int f(\varphi)\, d\varphi = -\int \frac{\alpha\, dz}{\beta + \gamma z} = -\frac{\alpha}{\gamma} \lg(\beta + \gamma z).$$

Also

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{\alpha}{\gamma}\lg(\beta + \gamma\cos\varphi) = \text{const} = h,$$

womit $\dot{\varphi}$ als Funktion von φ bestimmt ist.

In ähnlicher Weise berechnet sich

$$\dot{\omega} = -\frac{\alpha' \sin\varphi}{\beta + \gamma\cos\varphi},$$

wo

$$\alpha' = m_{II} g r T_{II,s},$$

also

$$\omega = -\int \frac{\alpha' \sin\varphi}{\beta + \gamma\cos\varphi} \cdot dt = -\int \frac{\alpha' \sin\varphi}{\beta + \gamma\cos\varphi} \frac{d\varphi}{\dot\varphi}$$

$$\omega = -\alpha' \int \frac{\sin\varphi}{\beta + \gamma\cos\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{2h - 2\frac{\alpha}{\gamma}\lg(\beta + \gamma\cos\varphi)}}.$$

Setzen wir

$$\lg(\beta + \gamma\cos\varphi) = z,$$

$$\frac{-\gamma \sin\varphi d\varphi}{\beta + \gamma\cos\varphi} = dz,$$

so wird

$$\omega = \frac{\alpha'}{\gamma}\int \frac{dz}{\sqrt{2h - 2\frac{\alpha}{\gamma} z}} = -\frac{\alpha'}{\alpha}\sqrt{2h - 2\frac{\alpha}{\gamma} z} + \omega_0$$

oder

$$\omega = \omega_0 - \frac{\alpha'}{\alpha}\sqrt{2h - 2\frac{\alpha}{\gamma}\lg(\beta + \gamma\cos\varphi)}\,.$$

Aufgaben: 136. Man diskutiere die Aufgabe weiter für den Fall $r = a$, wenn für $\varphi = 0$, $\omega = 0$ und $\dot\varphi = \varepsilon$ gegeben sei, wo ε sehr klein. Wie groß sind ω und $\dot\varphi$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, d. h. wenn die zweite Walze auf den Boden aufstößt?

Weitere Beispiele und Aufgaben findet man besonders in Love, Theoretical Mechanics, einem hübschen Lehrbuch, das namentlich die synthetische Methode weit durchführt.

137. Man stelle nach der Methode dieser Nummer direkt die reinen Bewegungsgleichungen für das dreifache Pendel auf.

311. Weiteres Beispiel: Die Wage als Meßapparat für Exzentrizitäten. Auf einem Wagearme laufe der Körper, dessen Exzentrizität b experimentell bestimmt werden soll, um den Punkt C um. ϑ sei der Ausschlagwinkel der Wage, φ sei der Winkel, den b augenblicklich mit der Zeigerrichtung einschließt. Der Schwerpunkt S_I der Wage allein — eventuell mit einem Gegengewicht — liege so, daß $\vartheta = 0$, $\varphi = 0$ eine mögliche Gleichgewichtslage ist.

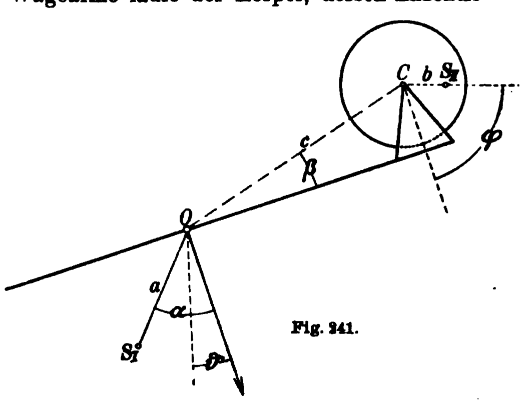


Fig. 241.

Das System ist fast dasselbe, wie das Doppelpendel, nur daß der Schwerpunkt des ersten Körpers nicht auf OC liegt. Auch sind die Winkel anders gezählt.

An den linken Seiten der Gleichungen des Doppelpendels ändert das prinzipiell nichts, man hat nur $\varphi + \vartheta$ statt φ zu setzen.

Dagegen ändern sich die Momente.

In Gleichung (1) kommt auf die rechte Seite zu stehen

$$-m_{II} g b \sin(\vartheta + \varphi),$$

in Gleichung (2) dagegen

$$-m_I g a \sin(\vartheta - \alpha) - m_{II} g c \cos(\beta + \vartheta) - m_{II} g b \sin(\vartheta + \varphi).$$

Also lautet die erste Bewegungsgleichung

$$T_{II,C}\ddot{\varphi} + (T_{II,C} + m_{II} bc \cos\varphi)\ddot{\vartheta} + m_{II} bc\dot{\vartheta}^2 \sin\varphi + m_{II} g b \sin\varphi = 0, \tag{1}$$

die zweite dagegen, nachdem man die erste von ihr abgezogen hat,

$$[T_I + m_{II}(c^2 + bc\cos\varphi)]\ddot{\vartheta} + m_{II} bc \cos\varphi\,\ddot{\varphi} - m_{II} bc \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2$$
$$+ m_I g a \sin(\vartheta - \alpha) + m_{II} g c \cos(\beta + \vartheta) = 0. \tag{2}$$

$\vartheta = 0$, $\varphi = 0$ soll eine Lösung sein, also muß

$$m_I a \sin\alpha = m_{II} c \cos\beta \tag{3}$$

sein. Um die Gleichungen zu behandeln, sehen wir b und ϑ, $\ddot{\vartheta}$, $\dot{\vartheta}$ als kleine Größen erster Ordnung an. Gleichung (1) zeigt dann sofort, daß auch $\ddot{\varphi}$ klein ist. Wir setzen deshalb

$$\dot{\varphi} = \omega_0 + \dot{\psi}$$

und

$$\varphi = \omega_0 t + \psi,$$

wo ψ, $\dot{\psi}$ ebenfalls klein sind.

Bleibt man bei Gliedern erster Ordnung stehen, so erhält man

$$T_{II,C}\ddot{\psi} + T_{II,C}\ddot{\vartheta} + m_{II} g b \sin(\omega_0 t) = 0,$$

$$(T_I + m_{II} c^2)\ddot{\vartheta} - m_{II} bc \sin(\omega_0 t)\cdot \omega_0^2 + (m_I a \cos\alpha - m_{II} c \sin\beta) g \cdot \vartheta = 0.$$

Damit die Wage bei $\omega = 0$ kleine Schwingungen macht, d. h. stabil ist, muß noch

$$m_I a \cos\alpha > m_{II} c \sin\beta \tag{4}$$

sein, was wir annehmen wollen.

Setzen wir noch

$$\frac{m_I a \cos\alpha - m_{II} c \sin\beta}{T_I + m_{II} c^2} g = \alpha^2,$$

$$\frac{m_{II} b c \omega_0^2}{T_I + m_{II} c^2} = \gamma,$$

so haben wir genau die Gleichung der erzwungenen Schwingung aus § 16:

$$\ddot{\vartheta} + \alpha^2 \vartheta = \gamma \sin\omega_0 t.$$

Nur fehlt die Dämpfung, die wir hier vernachlässigt haben. Nimmt man noch eine solche proportional $\dot{\vartheta}$ hinzu, so erhält man eine erzwungene Schwingung, deren Amplitude gleich

$$C = \frac{\gamma}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega_0^2)^2 + 4\lambda^2\omega_0^2}}$$

ist, aus der man also γ und also auch das gesuchte b berechnen kann.

Als Funktion von ω_0 betrachtet, tritt das Maximum der Amplitude C ein, wenn $\frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\alpha^2-\omega_0^2)^2+4\lambda^2}}$ den größten Wert hat, was für

$$\omega_0=\frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2-2\lambda^2}}$$

eintritt, also bei kleinem λ nahezu für $\omega_0=\alpha$, im Falle der „Resonanz". Man wird also, um bei kleiner Exzentrizität b starke Wirkung zu erzielen, diesem Falle nahe zu kommen suchen. Eine gewisse Dämpfung müßte der Apparat haben, um den störenden Einfluß der überlagerten freien Schwingung abzuschwächen. Siehe die entsprechenden Bemerkungen über das Seismometer und den Pallographen in Nr. 76.

Man sieht, daß man das Trägheitsmoment des rotierenden Körpers nicht zu kennen braucht, um aus dem Experiment b zu berechnen. Die erste Gleichung ist unwesentlich; sie kann dazu dienen, $\dot{\psi}$, d. h. die Schwankungen von ω zu berechnen.

Einleitung in die analytischen Methoden:

§ 54. Das Prinzip der virtuellen Arbeiten.

312. Aufstellung des Prinzips. Wir betrachten irgendein mechanisches System. Es sei ganz bestimmt festgesetzt, welche Körper wir hinzurechnen, welche nicht. Auch seien die Bewegungsmöglichkeiten des Systems genau umschrieben, es seien also z. B. die Stützflächen, die selbst nicht zum System gehören, in ihrer Bewegung bekannt, es sei verabredet, ob Berührung stattfindet und ob außerdem noch Einschränkungen der Bewegung vorhanden sind, ob z. B. Gleiten ausgeschlossen ist, ob Rollen oder Bohren zulässig ist usw.

Kurz gesagt, man kenne zu jeder Zeit die kinematische Konstitution des Systems, d. h. die Gesamtheit der möglichen unendlich kleinen Verschiebungen $\delta\bar{r}$ eines jeden Punktes des Systems.

Eine solche allgemeine, mögliche, aber bloß gedachte Verschiebung des Systems $\delta\bar{r}$ nennen wir zum Unterschied von der wirklichen Verschiebung $d\bar{r}$ virtuell; sie soll stets als zeitlos gedacht werden, d. h. die Stützflächen sollen bei ihr in ihrer augenblicklichen Lage gelassen werden.

Sind alle Stützflächen fest, oder etwas allgemeiner gesagt: enthalten die gegebenen Bewegungseinschränkungen die Zeit nicht explizit, so macht die Bedingung der Zeitlosigkeit von $\delta\bar{r}$ nichts aus, dann gehören die wirklichen Verschiebungen in die Klasse aller möglichen virtuellen Verschiebungen. Wir nennen das System dann skleronom (Ausdruck von Boltzmann). Anderenfalls gehören die wirklichen Verschiebungen $d\bar{r}$ nicht zu den virtuellen, das System heißt dann rheonom oder nicht skleronom.

Ist z. B. ein System auf die Erde gestützt und sieht man die Erde in erster Annäherung als ruhend an, so ist das System skleronom. Beachtet man aber die Bewegung der Erde und sieht sie als fest gegeben an — was wohl für alle Probleme praktisch hinreichend genau ist —, so ist das System rheonom. In Wahrheit freilich wird jedes auf der Erde bewegte System die Bewegung der Erde — wenn auch unmerklich wenig — mit beeinflussen. Wollte man darauf Rücksicht nehmen, so dürfte man die Erde überhaupt nicht als gegebene Stützfläche ansehen, man hätte dann für unser System die Stützdrucke der Erde als äußere eingeprägte Kräfte aufzufassen, dafür das System als frei anzusehen. Um aber die Stützdrucke wirklich zu berechnen, müßte man dann noch die Bewegung der Erde betrachten. Am besten würde man freilich tun, Erde und aufgesetztes System als ein einziges System zu nehmen.

Nachdem man sich so über die Begrenzung und die Bewegungsbedingungen des Systems entschieden hat, zerfallen alle Kräfte in zwei Klassen:

1. die Reaktionskräfte $d\bar{s}$, die allein durch die kinematische Konstitution bedingt sind, soweit man etwas a priori über sie aussagen kann, sonst aber unbekannt sind,

2. die eingeprägten Kräfte $d\bar{k}$. Das sind alle anderen Kräfte, die also noch durch andere Daten als die kinematische Konstitution mitbestimmt sind. Sowie also noch irgendeine physikalische Beschaffenheit als Ursache einer Kraft mitspricht (z. B. Masse, Materialbeschaffenheit), ist diese Kraft eine eingeprägte Kraft.

Diese generelle Unterscheidung stimmt mit unserer früheren überein (siehe dazu Nr. 304), wie der Leser selbst an einzelnen Beispielen nachprüfen möge.

Es hängt also diese Unterscheidung immer bis zu einem gewissen Grade von der Systemwahl und der Gesamtheit der zulässigen virtuellen Verschiebungen ab.

Nun sagt das Prinzip der virtuellen Arbeiten folgendes grundlegende statische Gesetz aus:

Eine beliebige Gruppe von eingeprägten Kräften ist an einem mechanischen System dann und nur dann im Gleichgewicht, wenn die Summe ihrer virtuellen Arbeiten für alle möglichen virtuellen Verschiebungen verschwindet:

$$\mathrm{S}\, d\bar{k} \cdot \delta\bar{r} = 0.$$

Einfühlen kann man sich in das Prinzip folgendermaßen: Das System sei anfangs in Ruhe. Nun wirken Kräfte $d\bar{k}$ auf dasselbe. Man probiere alle möglichen Verschiebungen $\delta\bar{r}$. Ist dann stets $\mathrm{S}\, d\bar{k} \cdot \delta\bar{r} = 0$, so zeigen die Kräfte insgesamt keine Tendenz, Arbeit zu leisten, sie werden also auch das System wirklich nicht in Bewegung setzen, da sie dazu Arbeit leisten müßten. (Freilich steckt hierin die Annahme, daß diese Arbeit nicht etwa von den Reaktionskräften aufgebracht wird.)

Eine erste Andeutung des Prinzips geht auf Aristoteles zurück und lebt unter dem Namen der goldenen Regel des Aristoteles fort: „In dem Verhältnis, als bei einer Hebemaschine die hebende Kraft kleiner ist als die gehobene Last, ist der Weg der Kraft größer als der der Last.“ Kraft und Last sind eben hier, bei Weglassung der Reibung die einzigen eingeprägten Kräfte.

Die beginnende Neuzeit entwickelt das Prinzip weiter, bis es Johann Bernouilli 1717 in einem Briefe an Varignon allgemein ausspricht. Dieser Brief ist in Varignons Nouvelle mécanique 1725 veröffentlicht.

Ehe wir uns mit dem Beweis des Prinzips befassen, wollen wir es an einigen Beispielen erproben.

313. Beispiele.

1. Den Hebelsatz bewies schon Aristoteles nach dem Prinzip. Wird der Hebel um $\delta\vartheta$ gedreht, so leistet p die virtuelle Arbeit $pa\delta\vartheta$, q dagegen $-qb\delta\vartheta$. Also muß im Gleichgewichtsfalle

$$pa\delta\vartheta - qb\delta\vartheta = 0,$$

d. h.

$$pa = qb$$

sein.

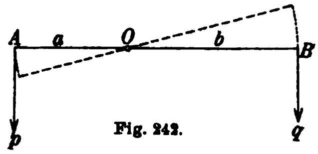


Fig. 242.

2. Das Gesetz der schiefen Ebene fand auf diesem Wege zum erstenmal ein unbekannter Autor, der am Ausgange des Mittelalters lebte, vermutlich ein Schüler des Jordanus de Nemore. Duhem, der Verfasser einer sehr interessanten Geschichte der Statik (Origines de la statique), nennt ihn den Vorläufer Lionardos. (Vgl. Fig. 175, Nr. 202).

Verschiebt sich die Last G_1 um δs nach unten parallel zur schiefen Ebene, so senkt sich G_1 um $\delta s \sin\alpha$, G_2 hebt sich um $\delta s \sin\beta$. Also gibt das Prinzip der virtuellen Arbeiten, da die Gewichte wegen der Unausdehnbarkeit des Fadens und Vernachlässigung aller Reibung die einzigen eingeprägten Kräfte sind,

$$G_1 \delta s \sin\alpha - G_2 \delta s \sin\beta = 0,$$

d. h.

$$G_1 \sin\alpha = G_2 \sin\beta.$$

3. Der Flaschenzug (siehe auch Nr. 181). Wird die Last L um δs gehoben, so verkürzt sich die Entfernung der beiden Rollenträger um δs, also das Seil um $2n\delta s$, wenn jeder Träger n Rollen enthält. Infolge dessen senkt sich auch die hebende Kraft k um $2n\delta s$, und das Prinzip verlangt bei Außerachtlassung der Reibung

$$2n\delta s k - \delta s L = 0,$$

also

$$L = 2nk.$$

4. Für den **freien starren Körper** hatten wir das Prinzip schon in § 50 als richtig erkannt und bewiesen.

Aufgaben: 138. Die Zugbrücke. Man konstruiere die Kurve C für das Laufgewicht G_2 so, d. h. man berechne ihre Gleichung in Polarkoordinaten r, φ so, daß die Brücke bei Vernachlässigung aller Reibungskräfte beständig im Gleichgewicht sei (Fig. 243).

Man beachte dabei folgendes: Erhält man aus dem Prinzip der virtuellen Arbeiten eine Beziehung der Art:

$$\delta F = \delta G,$$

wo G, F von zwei Variablen abhängen, zwischen denen eine noch zu suchende Beziehung besteht, und soll das Gleichgewicht für **alle** Lagen, d. h. für alle Werte der einen Variablen bestehen, so darf man die Gleichung integrieren:

$$F = G + \text{const},$$

und diese Gleichung ist die gesuchte Beziehung.

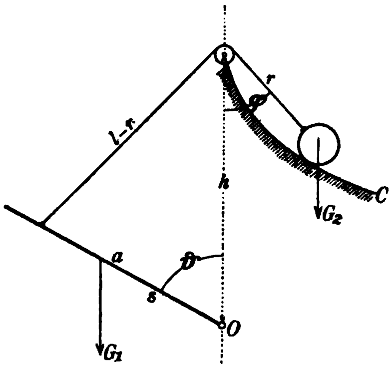


Fig. 243.

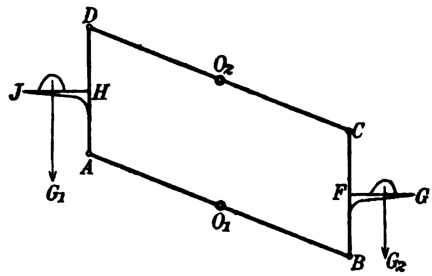


Fig. 244.

139. Die Roberwalsche Wage. Es seien an der gezeichneten Wage (Fig. 244) die Gewichte G_1 und G_2 im Gleichgewicht. Warum bleiben sie im Gleichgewicht, wenn man ihre Angriffspunkte beliebig an den Hebeln FG und HJ verschiebt? $ABCD$ bildet ein bewegliches Parallelogramm; O_1, O_2 sind feste Drehpunkte und liegen vertikal übereinander, $HDHJ$ ein starrer Körper, ebenso $CBFG$. Endlich sind IH und FG in einer Anfangslage horizontal und dann, wie man leicht einsieht, für alle möglichen Lagen horizontal.

140. Man suche die Gleichgewichtslage der beiden Massenpunkte m_1 und m_2, die durch einen Idealfaden l verbunden seien. m_1 hänge vertikal herab, m_2 kann längs einer vertikalen glatten Stange gleiten (vgl. die synthetische Lösung in Nr. 202, Fig. 174).

314. Anwendung auf die Theorie des ebenen Fachwerks. Wir wollen den Beweis des früher behaupteten Satzes, daß ein im Unendlichkleinen kinematisch bestimmtes Fachwerk auch statisch bestimmt ist, hier nachholen (siehe Nr. 167). Ein Fachwerk hieß kinematisch bestimmt, wenn es zwar an sich unbeweglich, dagegen bei Weglassung irgendeines Stabes beweglich wurde. Erleidet der fortgelassene Stab die Verlängerung δl, der νte Knotenpunkt dagegen die Verschiebung $\delta \bar{r}_\nu$, so hieß das Fachwerk auch im Unendlichkleinen kinematisch bestimmt, wenn bei $\delta l = 0$ auch keine unendlich kleinen von Null verschiedenen $\delta\bar{r}_\nu$ möglich waren, oder was dasselbe ist, wenn bei irgendeiner virtuellen Verschiebung die Verhältnisse

$$\frac{\delta\bar{r}_\nu}{\delta l}$$

nicht unendlich werden, sondern einen bestimmten Grenzwert $\bar{\varrho}_\nu$ haben. Denn daß zwei verschiedene $\bar{\varrho}_\nu$: $\bar{\varrho}_\nu'$ und $\bar{\varrho}_\nu''$ existierten, ist unmöglich. Wäre das wohl so, so gäbe es zu demselben δl zwei Verschiebungen $\bar{\varrho}_\nu'\delta l$ und $\bar{\varrho}_\nu''\delta l$; es wäre aber auch, da die Differenz zweier unendlich kleiner Verschiebungen auch eine solche ist, $(\bar{\varrho}_\nu' - \bar{\varrho}_\nu'')\delta l$ eine mögliche Verschiebung der Knoten, die zur Verlängerung Null des Stabes gehörte, was ja aber ausgeschlossen sein sollte.

Sei nun S die Spannung des Stabes (> 0 als Druck, < 0 als Zug gerechnet), $\bar{k}_\nu$ die Belastung des ν^{ten} Knoten, so gibt das Prinzip der virtuellen Arbeiten (vgl. auch Nr. 109)

$$-S\delta l + \sum \bar{k}_\nu \cdot \delta\bar{r}_\nu = 0,$$

also

$$S = \sum \bar{k}_\nu \cdot \bar{\varrho}_\nu .$$

Die Spannung bestimmt sich also eindeutig und endlich, das Fachwerk ist also auch statisch bestimmt, w. z. b. w.

Der Beweis enthält auch eine Methode, die Spannungen zu bestimmen: die sogenannte kinematische Methode (nach Mohr, Föppl Müller-Breslau). Man braucht sich ja nur die $\bar{\varrho}_\nu$ zu konstruieren, d. h. wesentlich die Verschiebung $\delta\bar{r}_\nu$ aller Knotenpunkte bei beliebiger Verlängerung δl des Stabes. Zu dem Zweck entwirft man die sogenannten Verschiebungspläne. Wir können hier darauf nicht näher eingehen, es sei auf die einschlägige Literatur verwiesen, etwa

Müller-Breslau: Statik der Baukonstruktionen,

sowie auf das Referat von

Henneberg: Graphische Statik, Enzykl. d. math. Wiss. IV, 5.

315. Das Toricellische Prinzip. Ist die Schwerkraft die einzige eingeprägte Kraft, so ist

$$d\bar{k} = -\frac{d}{d\bar{r}}(dmgz),$$

wo z die Höhe des Punktes über einer festen Ebene bedeutet. Soll nun Gleichgewicht herrschen, so muß

$$\mathsf{S}\, d\bar{k} \cdot \delta\bar{r} = 0$$

sein, d. h.

$$\mathsf{S}\, \frac{d}{d\bar{r}}(dmgz) \cdot \delta\bar{r} = 0.$$

Da $dmgz$ nur vom Orte abhängt, so steht unter der Summe das vollständige Differential $\delta(dmgz)$; man kann also schreiben

$$\delta \mathop{\mathsf{S}} dmgz = 0,$$

oder, da

$$\mathop{\mathsf{S}} dmgz = gmz^*$$

ist,

$$\delta z^* = 0.$$

Ein nur der Schwere als einziger eingeprägter Kraft unterworfenes System ist im Gleichgewicht, wenn bei beliebiger virtueller Verrückung der Schwerpunkt keine Höhenverschiebung erleidet, d. h. wenn der Schwerpunkt eine sogenannte stationäre Lage (z. B. eine minimale oder maximale Höhenlage) einnimmt. (Prinzip von Toricelli.)

Dieser Satz läßt sich verallgemeinern auf den Fall, daß die eingeprägten Kräfte ein Potential haben. Ist

$$d\bar{k} = -\frac{\partial U}{\partial \bar{r}}$$

und U außer von t nur von den Orten $\bar{r}$ abhängig, so folgt aus

$$\mathop{\mathsf{S}} d\bar{k} \cdot \delta \bar{r} = 0$$

wieder

$$\delta U = 0$$

(denn $\delta t = 0$).

In den Gleichgewichtslagen hat das Potential stationäre (extreme) Werte.

316. Zusammenfassung des Prinzips der virtuellen Arbeiten mit dem Prinzip von d'Alembert durch Lagrange. In seiner „Mécanique analytique“ hat Lagrange 1788 die beiden Prinzipien in eines zusammengefaßt und damit eine ganz neue Grundlage der Mechanik geschaffen.

Gehen wir aus von dem Newtonschen Grundgesetz

$$dm\bar{w} = d\bar{k} + d\bar{s},$$

wo $d\bar{k}$ die gesamte an dem Volumelement dm angreifende eingeprägte, $d\bar{s}$ die gesamte Reaktionskraft bedeutet. Dann sagt das d'Alembertsche Prinzip: Die Gesamtheit der $d\bar{s}$ hält sich bei der Bewegung das Gleichgewicht (siehe Nr. 193).

Kombinieren wir es mit dem Prinzip der virtuellen Arbeiten, so erhalten wir

$$\mathop{\mathsf{S}} d\bar{s} \cdot \delta \bar{r} = 0.$$

Die virtuelle Arbeit der Reaktionskräfte ist Null.

Dieses Lagrangesche Prinzip ist notwendigerweise in der Mechanik erfüllt, es ist aber auch insofern die hinreichende Grundlage der Mechanik, als es gestattet, die Bewegung des Systems vollständig zu bestimmen, sofern man die eingeprägten Kräfte kennt, und dann mit Benutzung des Newtonschen Grundgesetzes auch $d\bar{s}$, d. h. die Summe der Reaktionskräfte an einem jeden Punkte zu bestimmen gestattet.

Es ist imstande, die bisher vorgetragenen Grundlagen der Mechanik vollständig zu ersetzen, wenn wir beachten, daß wir es in der Hand haben, auch beliebige Ausschnitte eines Systems als solches zu betrachten und Bewegungsbeschränkungen aufzuheben, wodurch frühere Reaktionskräfte zu eingeprägten Kräften werden, die freilich als Unbekannte einzuführen sind. Indem wir dann unter den möglichen Bewegungen nur diejenigen auswählen, welche den zunächst außer acht gelassenen Bewegungsbeschränkungen genügen, bekommen wir die Möglichkeit, die unbekannten Reaktionskräfte — jetzt kinetisch zu eingeprägten umgedeutet — zu berechnen.

Schon bei Lagrange findet sich eine Andeutung dieser Erweiterung seiner Methode, prinzipiell hat ihre Wichtigkeit neuerdings Heun hervorgehoben (siehe Kinematik Nr. 70, sowie Nr. 87 bis 96).

Für Zwecke der Anwendung ist es meist vorteilhafter, dem Lagrangeschen Prinzip unter Einbeziehung des Newtonschen Grundgesetzes die Form zu geben

$$\mathop{\mathrm{S}} dm\bar{w} \cdot \delta\bar{r} = \mathop{\mathrm{S}} d\bar{k} \cdot \delta\bar{r}.$$

Die virtuelle Arbeit der Massenbeschleunigungen ist stets gleich der virtuellen Arbeit der eingeprägten Kräfte.

Es ist nun wichtig zu bemerken, daß dieses Lagrangesche Prinzip die beiden anderen enthält. Denn soll Gleichgewicht herrschen, so muß jedenfalls $\bar{w} = 0$ sein, also auch

$$\mathop{\mathrm{S}} d\bar{k} \cdot \delta\bar{r} = 0.$$

Und daß umgekehrt diese Bedingung hinreichend ist, das Gleichgewicht zu garantieren, folgt daraus, daß bei $\mathop{\mathrm{S}} d\bar{k} \cdot \delta\bar{r} = 0$ auch

$$\mathop{\mathrm{S}} dm\bar{w} \cdot \delta\bar{r} = 0$$

ist, woraus man beweisen kann, daß für skleronome Systeme, und nur bei solchen kann von Gleichgewicht die Rede sein, Ruhe bleibt, wenn Ruhe war.

Für skleronome Systeme gehört nämlich in das System der virtuellen $\delta\bar{r}$ auch das wirkliche $d\bar{r}$. Also folgt aus

$$\mathop{\mathrm{S}} d\bar{k} \cdot \delta\bar{r} = 0,$$

$$\mathop{\mathrm{S}} dm\bar{w} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} = 0,$$

d. h. da die linke Seite $\frac{dE}{dt}$ ist,

$$E = \text{const.}$$

War nun zu Anfang Ruhe, so ist die Konstante Null, also dauernd

$$E = 0.$$

Da aber

$$E \equiv \frac{1}{2} \mathsf{S}\, dm \bar{v}^2$$

ist, kann E nur Null sein, wenn alle $\bar{v} = 0$ sind. Daß ferner im allgemeinen Falle aus dem Lagrangeschen Prinzip eine bestimmte Bewegung sich eindeutig ergibt, wenn noch Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit gegeben sind und wenn die eingeprägten Kräfte als bekannt angesehen werden dürfen, kann hier in diesem elementaren Buche nicht bewiesen werden; es sei erlaubt, auf des Verfassers Aufsatz in den mathematischen Annalen: „Über die Grundlagen der Mechanik" hinzuweisen.

Fassen wir zusammen:

Das d'Alembertsche und das Prinzip der virtuellen Arbeiten sind bewiesen, wenn das Lagrangesche Prinzip: $\mathsf{S}\, d\bar{s} \cdot \delta\bar{r} = 0$ *bewiesen ist.*

Denn kennt man bereits das Prinzip der virtuellen Arbeiten, so ist ja das Lagrangesche Prinzip nichts anderes als eine neue Form des d'Alembertschen Prinzips.

317. Beweis des Lagrangeschen Prinzips. Wir beschränken uns auf den Fall, daß das System aus einer endlichen Anzahl von starren Körpern besteht, die sich gegenseitig berühren, und von festen oder in bestimmter Weise bewegten starren Stützflächen gehalten wird.

Dann haben wir folgende Reaktionskräfte:

1. Die inneren Spannungen der starren Körper.
2. Die Normaldrucke zwischen den starren Körpern und den Stützflächen.
3. Die Haftreibungen gegen Gleiten, Rollen und Bohren, wenn diese Bewegungen als ausgeschlossen gelten.
4. Die Kräfte unter Nr. 2 und 3 zwischen den einzelnen starren Körpern.

Gehen wir zum Beweis über, daß diese Reaktionskräfte insgesamt keine Arbeit leisten, bei irgendeiner erlaubten Verschiebung, die zeitlos erfolgt, d. h. bei der die Stützflächen in ihrer augenblicklichen Lage gelassen werden.

1. Die inneren Kräfte leisten bei keiner möglichen Verschiebung eines starren Körpers Arbeit (siehe Nr. 286).

2. Der Normaldruck zwischen einer ruhenden Fläche und einem darüberhin bewegten Körper leistet keine Arbeit, weil er senkrecht

zur Berührungsebene steht, jede mögliche Verschiebung des Angriffspunktes, d. h. des Berührungspunktes, aber parallel zur Ebene erfolgt, $d\bar{N}$ und das zugehörige $\delta\bar{r}$ also senkrecht aufeinander stehen.

3 a). Ist an der ruhenden Führungsfläche noch Haftreibung gegen Gleiten vorhanden, so erhält der Angriffspunkt derselben überhaupt keine Verschiebung: $\delta\bar{r}$ ist Null und also auch $d\bar{R}\cdot\delta\bar{r}$.

b) Übt die ruhende Führungsfläche ein Moment $\bar{M}$ aus, so ist deren Arbeit $\bar{M}\cdot\delta\bar{\vartheta}$, wo $\delta\bar{\vartheta}$ eine virtuelle Drehung um den Punkt bedeutet. Ist nun Rollen ausgeschlossen, so steht $\delta\bar{\vartheta}$ senkrecht zur Fläche, das Moment der Rollreibung liegt aber in der Ebene, also ist seine Arbeit null; ist Bohren ausgeschlossen, so liegt $\delta\bar{\vartheta}$ in der Ebene, $\bar{M}$ aber steht senkrecht darauf: abermals ist

$$\bar{M}\cdot\delta\bar{\vartheta}\equiv\delta A=0.$$

Weil die Führungsfläche bei der Vornahme der virtuellen Verrückung in Ruhe zu lassen ist, macht es nichts aus, ob sie in Wirklichkeit ruht oder bewegt ist.

4. Berühren sich die Körper 1. und 2. in einem Punkte und hat dieser als Punkt von 1. die Verschiebung $\delta\bar{r}_1$, als Punkt von 2. die Verschiebung $\delta\bar{r}_2$, während $\delta\bar{\vartheta}_1$ und $\delta\bar{\vartheta}_2$ die Drehungen sind; sind ferner $\bar{k}$ und $\bar{M}$ die Reaktion auf 1. an der betreffenden Stelle, so ist nach dem Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung, die gesamte Arbeit dieser Kräfte

$$\bar{k}\cdot(\delta\bar{r}_1-\delta\bar{r}_2)+\bar{M}\cdot(\delta\bar{\vartheta}_1-\delta\bar{\vartheta}_2),$$

d. h. sie berechnet sich so, als ob der zweite Körper ruhte, die Kraftwirkungen $\bar{k}$ und $\bar{M}$ auf den ersten ausübte und dieser erste nur die Relativbewegung

$$\delta\bar{r}_1-\delta\bar{r}_2 \quad\text{und}\quad \delta\bar{\vartheta}_1-\delta\bar{\vartheta}_2$$

gegen den zweiten hätte.

Damit ist aber Fall 4. auf die Fälle 2. und 3. zurückgeführt und der Satz vollständig bewiesen.

Einige allgemeinere Fälle des Satzes (Idealfaden, inkompressible Flüssigkeiten) werden wir noch später kennen lernen.

318. Plötzliche Änderungen der kinematischen Konstitution. Die vorstehenden Sätze gelten auch noch, wenn Momentankräfte (Impulsionen) auftreten, denn es macht natürlich nichts aus, wie groß die Kräfte sind. Doch muß während des Stoßes die kinematische Konstitution dieselbe bleiben. Ändert sich diese aber plötzlich, werden z. B. Fixierungen vorgenommen, finden Zusammenstöße statt oder zerreißt eine Bindung plötzlich, so wäre es falsch zu glauben, daß jetzt die auftretenden Reaktionsstöße keine Arbeit leisteten. So wissen wir ja schon, daß der unvollkommen elastische Stoß zweier fester Körper Energie verzehrt. Beschränkt man sich jedoch auf diejenigen virtuellen Verschiebungen, welche sowohl vor als auch während und nach dem Stoß möglich sind, so ist es klar, daß bei diesen die Reaktionsstöße keine Arbeit leisten. Denn diese Verschiebungsmöglichkeiten werden ja eben beim Stoße nicht geändert.

§ 55. Die allgemeine Energiegleichung der Mechanik für skleronome Systeme.

319. Beweis des Energiesatzes. Ist das System skleronom (siehe Nr. 312), so kann man die wirklichen Verschiebungen zu den virtuellen rechnen; das Lagrangesche Prinzip gibt sofort

$$\mathsf{S}\, dm\bar{w} \cdot d\bar{r} = \mathsf{S}\, d\bar{k} \cdot d\bar{r}.$$

Nun ist aber

$$\frac{dE}{dt} = \mathsf{S}\, dm\bar{w} \cdot \bar{v} = \frac{\mathsf{S}\, dm\bar{w} \cdot d\bar{r}}{dt},$$

also schließen wir

$$\frac{dE}{dt} = \mathsf{S}\, d\bar{k} \cdot \bar{v} \equiv L,$$

was wir auch integrieren können:

$$E - E_0 = \int_{t_0}^{t} d\bar{k} \cdot d\bar{r} = A.$$

Die Änderung der kinetischen Energie eines skleronomen Systems ist gleich der Arbeit der eingeprägten Kräfte. Haben diese Kräfte ein Potential U, so ist

$$E + U = \text{const.}$$

Daß Stützkräfte, also Reaktionskräfte, bei nicht skleronomen Systemen, d. h. wenn die Stützflächen in gegebener Weise bewegt sind, sehr wohl Arbeit übertragen können, z. B. mittels des Normaldruckes, ist wohl anschaulich klar. Es soll aber noch an einem Beispiel gezeigt werden.

Nehmen wir das Erdbebenpendel von Nr. 73, doch lassen wir der Einfachheit halber die Dämpfung weg. Der Massenpunkt hat die Geschwindigkeitskomponenten

$$\dot{c} + l\dot{\vartheta} \cos\vartheta \quad \text{und} \quad l\dot{\vartheta} \sin\vartheta.$$

Folglich ist seine kinetische Energie

$$\frac{1}{2} m [\dot{c}^2 + 2\dot{c}l\dot{\vartheta} \cos\vartheta + l^2\dot{\vartheta}^2] = E.$$

Dagegen ist die Arbeit der einzigen eingeprägten Kraft, nämlich der Schwerkraft, ihr negatives Potential

$$mgl \cos \vartheta + \text{const.}$$

Für kleine ϑ, $\dot{\vartheta}$ ist mit Beibehaltung von Größen zweiter Ordnung

$$E = \frac{1}{2} m [\dot{c}^2 + 2\dot{c}l\dot{\vartheta} + l^2\dot{\vartheta}^2],$$

$$U = \frac{1}{2} mgl\vartheta^2 + \text{const.}$$

Dagegen folgt aus der Bewegungsgleichung

$$m(l\ddot{\vartheta} + \ddot{c}) = -mg\vartheta$$

durch Multiplikation mit $l\dot{\vartheta}$ und Integration

$$\frac{1}{2} ml^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} mlg\vartheta^2 + ml\int \ddot{c}\dot{\vartheta}dt = \text{const.}$$

Es unterscheidet sich also der linksstehende Ausdruck von $E + U$ um

$$ml\int \ddot{c}\dot{\vartheta}dt - m\dot{c}l\dot{\vartheta} - \frac{1}{2} m\dot{c}^2,$$

und das ist nicht konstant, denn der Differentialquotient ist

$$-ml\dot{c}\ddot{\vartheta} - m\ddot{c} \cdot \dot{c}$$

oder nach der Differentialgleichung

$$mg\vartheta \cdot \dot{c}.$$

Dieser Ausdruck stellt die Leistung L_0 der im Punkte O wirkenden Reaktionskraft dar.

Denn denken wir uns das Pendel frei und somit die Reaktionskraft in O künstlich zur eingeprägten Kraft gemacht, so gilt jetzt, wo das System skleronom ist, natürlich der Energiesatz in der Form, daß die Änderungsgeschwindigkeit der kinetischen Energie des Pendelpunktes gleich ist der Leistung der Schwerkraft und derjenigen der Reaktionskraft in O, oder

$$\frac{d(E + U)}{dt} = L_0.$$

Und dieses L_0 haben wir mit Benutzung der Bewegungsgleichung zu

$$L_0 = mg\vartheta\dot{c}$$

berechnet.

Ist die horizontale Komponente der Reaktionskraft in O gleich H, so muß natürlich auch

$$L_0 = H\dot{c}$$

sein, also ist (bis auf Glieder höherer Ordnung)

$$H = mg\vartheta.$$

Aufgabe 141: Man beweise direkt unter Anwendung des Schwerpunktsatzes auf den materiellen Punkt, daß

$$H \doteq mg\vartheta$$

ist.

320. Anwendung auf die Dampfmaschine. Hat das System nur einen Freiheitsgrad, wie z. B. die Dampfmaschine, so gibt der Energiesatz bereits die reine Bewegungsgleichung in einmal integrierter Form.

Wir nehmen das Problem genau so wie in Nr. 305. Danach ist die kinetische Energie des ganzen Systems, die sich natürlich aus denen der drei einzelnen starren Körper zusammensetzt, mit Anwendung der Resultate von Nr. 245

$$E = \frac{1}{2} T_{\mathrm{I}} \omega^2 + \frac{1}{2} T_{\mathrm{II}} \dot{\eta}^2 + \frac{1}{2} m_{\mathrm{II}} (\dot{x}_{\mathrm{II}}^{*2} + \dot{y}_{\mathrm{II}}^{*2}) + \frac{1}{2} m_{\mathrm{III}} \dot{x}_{\mathrm{III}}^2.$$

Nehmen wir die Ergebnisse aus Nr. 306 hinzu, so bekommt E die Gestalt

$$E = \frac{1}{2}\Big(T_{\mathrm{I}} + G(\vartheta)\Big)\omega^2,$$

wo

$$G(\vartheta) = T_{\mathrm{II}} \eta'^2 + m_{\mathrm{II}}(\xi^2 + \zeta^2) + m_{\mathrm{III}} u^2 \tag{1}$$

eine wohlbekannte Funktion von ϑ ist.

Aus dem Widerstandsmoment W der Arbeitsmaschine und der Dampfkraft P als einzigen eingeprägten Kräften berechnet sich die Arbeit zu

$$A = \int(-W d\vartheta - P dx_{\mathrm{III}})$$

oder da

$$dx_{\mathrm{III}} = -u(\vartheta) d\vartheta = -r \frac{\sin(\vartheta + \eta)}{\cos \eta} d\vartheta$$

war,

$$A = -\int(W - rT) d\vartheta.$$

Kennen wir W und den Tangentialdampfdruck T als Funktion von ϑ, so können wir $-A = U(\vartheta)$ a priori berechnen, und der Energiesatz nimmt die Form an

$$E + U = h,$$

$$\frac{1}{2}[T_{\mathrm{I}} + G(\vartheta)]\omega^2 + U(\vartheta) = h, \tag{I}$$

dies ist die reine Bewegungsgleichung.

Aus ihr muß durch Differentiation die frühere reine Bewegungsgleichung

$$[T_{\mathrm{I}} + G(\vartheta)]\dot{\omega} + H(\vartheta)\omega^2 = -W + rT$$

folgen. Tatsächlich folgt aus (I)

$$[T_{\mathrm{I}} + G(\vartheta)]\dot{\omega} + \frac{1}{2}G'(\vartheta)\omega^2 = -W + rT.$$

Da die rechten Seiten identisch sind, müssen es auch die linken sein, also folgt nicht nur, daß das neue $G(\vartheta)$ dieses Paragraphen das alte ist, sondern daß auch noch

$$H(\vartheta) = \frac{1}{2}G'(\vartheta) \tag{2}$$

ist. Damit haben wir eine viel bequemere Methode zur Berechnung der Funktionen G und H gefunden.

Nach (I) kann die Lösung der Aufgabe auf Quadraturen zurückgeführt werden. Hat man U aus

$$U = \int_0^{\vartheta}(W - rT)d\vartheta \tag{3}$$

durch Integration gefunden, so gibt (I)

$$\omega = \sqrt{\frac{2h - 2U(\vartheta)}{T_{\mathrm{I}} + G(\vartheta)}}, \tag{4}$$

woraus wegen $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$ folgt

$$t = \int_0^{\vartheta}\sqrt{\frac{T_{\mathrm{I}} + G(\vartheta)}{2h - 2U(\vartheta)}}\,d\vartheta. \tag{5}$$

321. Die wichtigsten kinetischen Probleme der Dampfmaschine und ihre Hauptschwierigkeiten beginnen aber jetzt erst. In der vorstehenden Gleichung darf man wohl U und $G(\vartheta)$ im allgemeinen als bekannte Funktionen ansehen, aber wie steht es mit h und T_{I}?

h ist nach (I) gleich dem Werte von $E + U$ an einer bestimmten Stelle, z. B. an der inneren Totpunktlage ($\vartheta = 0$). Ist für diese $\omega = \omega_1$ so folgt, wenn man das Integral in Gleichung (3) von $\vartheta = 0$ an erstreckt,

$$\left[\frac{1}{2}T_{\mathrm{I}} + G(0)\right]\omega_1^2 = h. \tag{6}$$

Nun kennen wir aber nicht ω_1, sondern aus Versuchen das mittlere ω, das aus der Tourenzahl definiert ist, d. h.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau_0},$$

wo τ_0 die Umlaufszeit, d. h. nach (5) gleich ist

$$\tau_0 = \int_0^{2\pi} d\vartheta \sqrt{\frac{T_{\mathrm{I}} + G(\vartheta)}{2h - 2U(\vartheta)}}.$$

Wir haben also die (erste) Aufgabe zu lösen, aus

$$\frac{2\pi}{\omega_0} = \int_0^{2\pi} d\vartheta \sqrt{\frac{T_{\mathrm{I}} + G(\vartheta)}{2h - 2U(\vartheta)}} \tag{a}$$

h, oder unter Berücksichtigung von (6), ω_1 bei gegebenem mittlerem ω_0 auszurechnen.

Das wäre die Aufgabe, wenn wir eine fertige Maschine vor uns haben. Denn ist ω_1 resp. h bekannt, so kann man den Gang der Maschine nach den Formeln (4) oder (5) in allen Einzelheiten verfolgen.

Bei projektierten Maschinen aber entsteht noch die Hauptaufgabe, T_{I}, d. h. das Schwungrad so zu berechnen, daß der Ungleichförmigkeitsgrad

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}}$$

unterhalb einer vorgeschriebenen Grenze liegt.

Man kann sich nun aus (4) prinzipiell $\omega_{\max}$ und $\omega_{\min}$ als Funktionen von T_{I} und h berechnet denken; es habe sich daraus

$$\delta = \Delta(T_{\mathrm{I}}, h) \tag{b}$$

ergeben.

Dann lautet die Aufgabe:

Man soll bei gegebenen $G(\vartheta)$, $U(\vartheta)$ und ω_0 das Trägheitsmoment T_{I} des Schwungrades so bestimmen, daß

1. $$\Delta(T_{\mathrm{I}}, h) \leqq \delta_{\max},$$

wo $\delta_{\max}$ vorgeschrieben ist,

2. h wiederum mit T_{I} durch die Gleichung (a)

$$\frac{2\pi}{\omega_0} = \int_0^{2\pi} d\vartheta \sqrt{\frac{T_{\mathrm{I}} + G(\vartheta)}{2h - 2U(\vartheta)}}$$

verknüpft ist.

Die üblichen Vernachlässigungen, die man zur Vereinfachung dieser Aufgabe eintreten läßt, bestehen nun darin, daß man

1. ω_1, die Totpunktgeschwindigkeit in erster Annäherung gleich der mittleren Geschwindigkeit ω_0 setzt, womit die Bestimmung von h nach Gleichung (6) schon erledigt ist,

2. daß man ebenfalls

$$\frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2} = \omega_0$$

setzt,

3. Daß man die früher genannten Radingerschen Vernachlässigungen macht:

a) man streicht $G(\vartheta)$ gegen T_I in dem Gliede mit $\dot{\omega}$, aber nicht $\frac{1}{2} G'(\vartheta)\omega^2$ gegen $\frac{dU}{d\vartheta}$ (im Gegensatz zur älteren Theorie).

b) Man setzt jedoch in dem Gliede $\frac{1}{2} G'(\vartheta)\omega^2$ statt ω^2 das mittlere ω_0^2.

c) Man berücksichtigt bei der Berechnung von $G'(\vartheta)$ nur noch Glieder erster Ordnung in λ (siehe Nr. 308).

Die Vernachlässigungen 1., 2. und 3. sind sicher erlaubt, wenn man δ_{max} als klein ansieht und man Größen zweiter Ordnung wegläßt gegen Größen erster Ordnung, oder was dasselbe ist, Größen erster Ordnung gegen endliche Größen.

Nach diesen, auch von Radinger akzeptierten Vernachlässigungen nimmt (I) nach Berücksichtigung von (6) die Form an

$$\frac{1}{2} T_I(\omega^2 - \omega_0^2) = \frac{1}{2}(G(0) - G(\vartheta))\omega_0^2 - U(\vartheta) \equiv F(\vartheta). \qquad (I')$$

Man zeichne sich die bekannte rechte Seite als Funktion von ϑ und bestimme Maximum und Minimum:

$$\frac{1}{2} T_I(\omega_{max}^2 - \omega_0^2) = F_{max},$$

$$\frac{1}{2} T_I(\omega_{min}^2 - \omega_0^2) = F_{min}.$$

Durch Subtraktion erhält man

$$\frac{1}{2} T_I(\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2) = F_{max} - F_{min},$$

und indem man wieder $\frac{1}{2}(\omega_{max} + \omega_{min})$ und ω_0 verwechselt,

$$T_I(\omega_{max} - \omega_{min}) = \frac{F_{max} - F_{min}}{\omega_0},$$

$$T_I\delta = \frac{F_{max} - F_{min}}{\omega_0^2}.$$

Daraus folgt, wegen $\delta < \delta_{max}$,

$$T_I > \frac{F_{max} - F_{min}}{\omega_0^2} \frac{1}{\delta_{max}}$$

als Schlußergebnis der Radingerschen Methode der Schwungradberechnung. (Die Funktion F ist in (I') definiert.)

Man hat neuerdings versucht, die durch die oben genannten Vernachlässigungen gemachten Fehler abzuschätzen und die Methode zu vervollkommnen für den Fall, daß die Radingersche nicht exakt genug sein sollte.

Nachdem schon Wittenbauer in dieser Richtung erfolgreich gearbeitet hatte, gab v. Mises eine vollständige Diskussion und allgemeine Methode zur Behandlung des Problems.

Wittenbauer hat auch das Verdienst, eine graphische Durchführung des Problems angegeben zu haben. Alles das muß dem Privatstudium überlassen bleiben. Es sei verwiesen auf

Radinger: Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit.

Heun: Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik (Referat für die deutsche Math.-Ver.).

Wittenbauer: Graphische Dynamik der Getriebe (Zeitschrift f. Math. u. Phys., Bd. 50, 1904; auch Z. d. V. d. I.).

v. Mises: Die Ermittlung der Schwungmassen. Z. d. öst. Ing.- u. Arch.-Ver., 1906.

Als Lehrbücher seien genannt

Tolle: Regelung der Kraftmaschinen.

Lorenz, Hans: Dynamik des Kurbelgetriebes.

Endlich der Enzyklopädieartikel IV, 10 v. Mises.

322. Aufgabe (Schaukel). Man stelle die Energiegleichung für die gezeichnete Schaukel auf. Die parallelen Stangenpaare der Länge l mögen je die Masse m_I und das Trägheitsmoment T_I, das Schaukelbrett die Masse m_{II} haben. S, S' in den Abständen s, s' von O bzw. O' seien die Schwerpunkte der Stangenpaare.

Wie ändert sich der Ausdruck der kinetischen Energie, wenn sich noch ein Punkt m' im variabeln Abstande x von O parallel den Stangen hin und her bewegt?

Will man jetzt den Energiesatz aufstellen, so muß man noch die Arbeitsleistung der inneren, zwischen m' und der Schaukel wirkenden Kraft berücksichtigen.

Da man aber diese aus der vorausgesetzten Bewegung des Punktes m' berechnen kann, so tue man es und stelle nun den Energiesatz für das ganze System auf. Man beachte dabei, daß die Kraft doppelt Arbeit leistet, einmal auf den Punkt und dann auf die Schaukel. Nach Nr. 317 genügt es deshalb, die Arbeit der Kraft auf den Punkt bei der Relativbewegung des Punktes zur Schaukel zu berechnen.

Man beachte nun, daß bei periodischer Bewegung des x auf und ab das einzige nicht notwendigerweise periodische Glied das Arbeitsintegral

$$-m'\int (x\omega^2)\,dx$$

auf der rechten Seite ist.

Soll der Punkt m' (der Schaukler) durch seine Bewegung beständig Arbeit zuführen, so muß er dafür sorgen, daß im Mittel

$$-\int (x\omega^2)\,dx = -\int (x\omega^2)\,\dot{x}\,dt$$

positiv ist, d. h. daß bei großen ω, $\dot{x} < 0$ sei, bei kleinem ω dagegen $\dot{x} > 0$ (weil x periodisch sein soll, lassen sich positive $\dot{x}$ nicht vermeiden!). Der Schaukler muß sich also in der Mitte der Schwingung aufrichten ($\dot{x} < 0$), an den Enden (ω klein) dagegen niederducken, um die Energie der Schaukelbewegung zu vermehren.

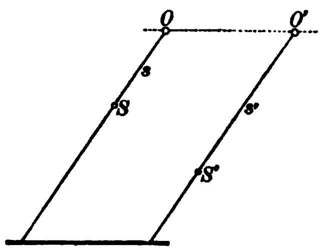


Fig. 245.

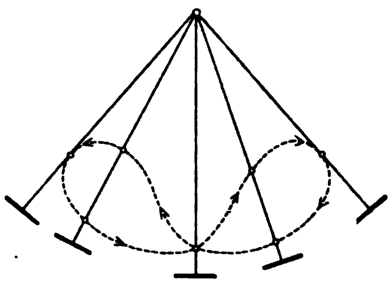


Fig. 246.

Man verallgemeinere die Untersuchung auf den Fall, daß der Punkt m' eine beliebige periodische Relativbewegung in geschlossener Bahn ausführt, also auch noch einen variabeln Seitenabstand y von der Stange hat. Will der Schaukler jetzt beständig Energie zuführen, so muß

$$-\int \omega^2(x\,dx + y\,dy) - \int \dot{\omega}\,(y\,dx - x\,dy) = -\frac{1}{2}\int \omega^2\,d(x^2 + y^2) + 2\int \dot{\omega}\,dF$$

im Mittel positiv sein, d. h. nur an den Umkehrpunkten der Schwingung wird er seine Entfernung von O vergrößern sie sonst verkleinern und des weiteren bei positivem $\dot{\omega}$ eine Fläche rückwärts, d. h. von oben über hinten unten vorne nach oben zurück, ($dF > 0$) bei negativem $\dot{\omega}$ eine Fläche vorwärts beschreiben. Der wirkliche Schaukelvorgang entspricht dieser Behauptung (siehe Fig. 246).

323. Dirichlets Stabilitätssatz. Dirichlet hat in einer genialen Arbeit vom Jahre 1846 bewiesen, daß das Gleichgewicht, falls die eingeprägten Kräfte ein Potential haben, dann und nur dann stabil ist, wenn der Potentialwert ein Minimum ist (z. B. der Schwerpunkt am tiefsten liegt).

Wir legen der Betrachtung folgende Definition der Stabilität zugrunde: Eine Gleichgewichtslage heißt stabil, wenn bei hinreichend kleiner Störung, d. h. hinreichend kleiner Anfangsentfernung aus der Ruhelage und Erteilung einer hinreichend kleinen Geschwindigkeit an alle Punkte, die Störung dauernd beliebig klein bleibt, d. h. die Bewegung in einem beliebig klein vorgeschriebenen Bereiche und die Geschwindigkeiten aller Punkte unterhalb einer beliebig kleinen Grenze bleiben.

Das Gegenteil bezeichnen wir als labil oder unstabil, wenn sich nämlich das System auch bei noch so kleiner Störung endlich weit entfernt oder endlich große Geschwindigkeiten erreicht, deren Größe mit der Kleinheit der Störung nicht gegen Null geht.

Wir beschränken uns beim Beweise auf ein System von n starren Körpern, deren Lage wir durch Vektoren $\bar{c}$ und je drei Eulersche Winkel bestimmen.

Wir können annehmen, daß für die Gleichgewichtslage

$$U = 0 \tag{1}$$

sei, denn es kommt bei U nicht auf eine additive Konstante an. Dann ist die Gleichgewichtslage nur dann eine Minimalstelle für U, wenn in der ganzen Umgebung

$$U > 0 \tag{2}$$

ist, mit Ausschluß des Gleichheitszeichens.

Wird nun das Gleichgewicht gestört, so ist für das System bei der eintretenden Bewegung

$$E + U = h. \tag{3}$$

Dabei ist h beliebig klein und positiv, wenn die Störung beliebig klein ist, denn dann ist ja wegen der Stetigkeit von U natürlich U zu Anfang nur ein wenig größer als Null und dasselbe gilt für $E = \frac{1}{2} \mathfrak{S}\, d\, m\, v^2$.

Da aber U und E nicht negativ werden können, so kann man aus (3) schließen

$$E \leqq h,$$
$$U \leqq h.$$

Weil ferner in der ganzen Umgebung der Gleichgewichtsstelle $U > 0$ ist, für diese selbst aber gleich Null, so wird bei hinreichend kleinem h die Gleichung

$$U = h$$

ein Gebiet für die n Vektoren $\bar{c}$ und die $3n$ Eulerschen Winkel begrenzen, das sich bei kleiner werdendem h auf die eine Gleichgewichtslage zusammenzieht. In diesem Gebiet muß nun aber wegen

$$U \leqq h$$

das System bleiben. Und damit ist die erste Hälfte des Satzes bewiesen.

Aus

$$E \leqq h$$

aber folgt wegen

$$E = \sum_{\nu=1}^{n} E_\nu = \sum \frac{1}{2} m_\nu \bar{c}_\nu^{\,2} + \frac{1}{2} \sum T_\nu \omega_\nu^{\,2},$$

daß jedenfalls jedes

$$\bar{c}_\nu^{\,2} \leq \frac{2h}{m_\nu}$$

und jedes

$$\omega_\nu^{\,2} \leq \frac{2h}{T_\nu},$$

d. h. daß bei kleinem h auch

$$\bar{c}_\nu \quad \text{und} \quad \bar{\omega}_\nu$$

und wegen der Eulerschen Formel

$$\bar{v} = \bar{c}_\nu + \overline{\omega_\nu (r - c_\nu)}$$

auch jedes $\bar{v}$ beliebig klein bleibt.

Damit ist der Beweis für Systeme der vorausgesetzten Art durchgeführt.

Auf Systeme, für welche alle Punkte frei verschiebbar sind (elastische, flüssige usw.), ist der Beweis nicht übertragbar. Es kann zwar geschlossen werden, daß

$$E = \frac{1}{2} \mathsf{S}\, dm \bar{v}^2 < h,$$

d. h. beliebig kein bleibt, aber es könnte doch sein, daß ein sehr kleiner Teil des Systems m' eine große Durchschnittsgeschwindigkeit v' bekommt, und v nur für das Gros des Systems klein bleibt. Ist nur m' so klein, daß trotz großen v' immer noch $\frac{1}{2} m'v'^2$ hinreichend klein bleibt, so wird nicht gegen

$$E < h$$

verstoßen. Diese Schwierigkeit ist sachlich begründet, die Stabilität läßt sich tatsächlich in dem oben ausgesprochenen Sinne nicht mehr behaupten: es ist z. B. möglich, daß durch eine geeignete, beliebig kleine Störung der Oberfläche ruhenden Wassers, ein hinreichend kleines Tröpfchen endlich weit in die Höhe gespritzt wird.

Ist für die Gleichgewichtslage U kein wirkliches Minimum, sondern ein Maximum oder stationär ($\delta U = 0$), so ist für alle praktisch wichtigen Fälle bewiesen, daß das Gleichgewicht instabil ist. Bereits Lagrange erledigte in seiner mécanique analytique die meisten Fälle nach der Methode der kleinen Schwingungen (siehe § 57). Neuere Arbeiten findet man in der kleinen Note des Verfassers: „Über die Instabilität der Gleichgewichtslage eines Systems von zwei Freiheitsgraden" in den Math. Annalen, Bd. 57 zitiert.

Mit der Stabilität der Bewegungen beschäftigte sich zuerst das kleine grundlegende Buch von Routh, On the stability of motion.

Man vergleiche auch sein Lehrbuch, sowie Bemerkungen in Klein-Sommerfeld: Theorie des Kreisels.

Beispiel: Ein Zylinder liege horizontal und parallel auf einem festen Zylinder. Wann wird diese Lage stabil sein?

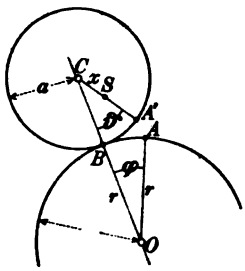


Fig. 247.

In der Ruhelage liegen die Mittelpunkte und der Schwerpunkt des beweglichen Zylinders übereinander. Liege er in der Entfernung x unter dem Mittelpunkte des beweglichen. Seien r und a die Radien und werde nun der obere Zylinder aus der Ruhelage gedreht, so besteht zwischen den beiden Drehwinkeln ϑ, φ die Beziehung

$$r\varphi = a\vartheta,$$

weil die Bogen BA und BA' einander gleich sein müssen.

Die Höhe z des Schwerpunktes über O ist demnach

$$(r + a)\cos\varphi - x\cos(\vartheta + \varphi)$$

oder

$$(r + a)\cos\varphi - x\cos\left(\varphi\,\frac{a+r}{a}\right).$$

Für $\varphi = 0$ ist die erste Ableitung Null, weil $\varphi = 0$ einer Ruhelage entspricht. Bilden wir die zweite, so wird dieselbe

$$-(r + a)\cos\varphi + x\left(\frac{a+r}{a}\right)^2\cos\left(\varphi\,\frac{a+r}{a}\right).$$

Soll z ein Minimum haben für $\varphi = 0$, die Gleichgewichtslage also stabil sein, so muß diese zweite Ableitung für $\varphi = 0$ positiv sein, d. h.

$$-(r + a) + x\left(\frac{r+a}{a}\right)^2 > 0,$$

d. h.

$$x > \frac{a^2}{a + r}.$$

Für $r = \infty$, d. h. wenn die obere Walze auf einer Ebene ruht, genügt demnach

$$x > 0,$$

d. h. der *Schwerpunkt muß unterhalb des Krümmungsmittelpunktes liegen.*

Da es nur auf die erste und zweite Ableitung ankommt, läßt sich der Satz in der schon ausgesprochenen Form auf beliebig gestaltete Berührungsflächen übertragen. Darauf beruht die Konstruktion der bekannten Aufstehmännchen.

§ 56. Die Lagrangeschen Gleichungen.

324. Holonome und nichtholonome Systeme. Will man nun mit Hilfe des Lagrangeschen Prinzips die reinen Bewegungsgleichungen aufstellen, so bedarf es noch einer wichtigen Unterscheidung der Systeme.

Es kann sein, daß es möglich ist, die allgemeinste Lage des Systems und seine allgemeinste Form der Bewegung dadurch zu beschreiben, daß für jeden Punkt

$$\bar{r} = \bar{r}(\bar{a};\; q_1, \ldots, q_n, t) \tag{1}$$

ist, wo $\bar{a}$, von der Zeit unabhängig, den einzelnen Punkt individualisiert — es mag z. B. für irgendeine mögliche Lage direkt $\bar{r} = \bar{a}$ sein — die q dagegen sogenannte Systemkoordinaten sind, d. h. in jedem Zeitmoment für alle Punkte dieselben Werte haben, aber von der Zeit abhängen. Und zwar sollen die q vollständig frei veränderlich sein, wenn die ganze Bewegungsmöglichkeit des Systems umfaßt werden soll; es seien aber auch keine q zuviel da, d. h. es soll keine Veränderung δq geben, für die das System nicht seine Lage wechselte, oder mathematisch gesprochen:

$$\delta \bar{r} = \sum \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_\lambda} \delta q_\lambda \tag{2}$$

kann nur dann für alle $\bar{a}$ verschwinden, wenn alle δq_λ Null sind.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so heiße das System holonom, weil man das Gesetz seiner Bewegungsmöglichkeiten, seine kinematische Konstitution, durch einen endlichen (ganzen) Ausdruck (1) darstellen kann (ὁλος νομος) und keine Differentiale dazu braucht.

Durch Gleichung (2) sind dann alle möglichen virtuellen Verschiebungen gegeben, wenn man die Verhältnisse der $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ zueinander alle Werte annehmen läßt.

Fehlt t in (1), so ist das System skleronom (andernfalls rheonom); denn es besteht dann, wenn man die q festhält, keine von außen aufgezwungene Bewegung $\frac{\partial \bar{r}}{\partial t}$, und es gehören die wirklichen, allgemein durch

$$d\bar{r} = \sum \frac{\partial \bar{r}}{\partial q} dq + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} dt \tag{3}$$

gegebenen Verschiebungen in diesem Falle zu den virtuellen, man braucht nur die ganz willkürlichen δq gleich den dq zu nehmen. Ist aber $\frac{\partial \bar{r}}{\partial t}$ nicht identisch Null, so unterscheiden sich (3) und (2) stets durch das Glied $\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} dt$. Ist n die Anzahl der q, so sagt man, das System habe n Freiheitsgrade.

Beispiele: 1. Ein holonomes System von einem Freiheitsgrad ist das Schubkurbelgetriebe, denn die Koordinaten eines jeden Punktes lassen sich durch den Kurbelwinkel ϑ und durch Konstante ausdrücken. Das System ist skleronom.

2. Das Pendel, dessen Stativ in gegebener Weise bewegt wird, ist ein holonomes System von einem Freiheitsgrad, aber rheonom.

3. Das Doppelpendel mit fester Drehachse O ist holonom von zwei Freiheitsgraden (ϑ, φ) und skleronom.

4. Der freie starre Körper in der Ebene hat drei Freiheitsgrade, im Raum sechs; er ist holonom (siehe die Formeln in den Nr. 219 und 261) und skleronom.

Es gibt aber auch nicht-holonome Systeme.

Beispiel: Ein Reifen, der auf horizontalem Boden rollt, ohne zu gleiten. Seine Lage ist zwar eindeutig gegeben, wenn man die Koordinaten x, y des Berührungspunktes, den Winkel ϑ der Berührungstangente mit der x-Achse, den Neigungswinkel ψ der Reifenebene gegen die Vertikale und endlich noch den Winkel φ kennt, den der Radius nach einem bestimmten Peripheriepunkte etwa mit der Horizontalen in der Reifenebene einschließt. Auch gehören zu verschiedenen x, y, ϑ, ψ, φ verschiedene Lagen des Reifens. Aber die δx, δy, $\delta\vartheta$, $\delta\varphi$, $\delta\psi$ sind vermöge der Bedingung des reinen Rollens ohne Gleiten nicht unabhängig voneinander. Rollt vielmehr der Reifen um $\delta\varphi$ vorwärts, so hat sich der Bogen $r\delta\varphi$ (r der Radius) auf dem Boden in der Richtung ϑ abgewälzt und es ist dem zufolge

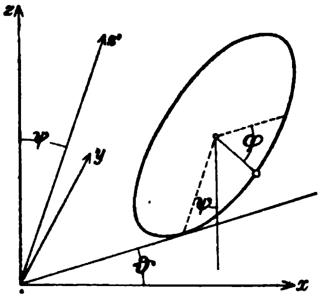


Fig. 248.

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= \cos\vartheta\, r\,\delta\varphi, \\ \delta y &= \sin\vartheta\, r\,\delta\varphi\,. \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

Diese Differentialbedingungen, die also noch bestehen, lassen sich aber nicht zu zwei ganzen, d. h. von den Differentialen freien Gesetzen umwandeln. Denn bestände auch nur ein solches:

$$f(x, y, \vartheta, \varphi) = 0,$$

so müßte

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial\vartheta}\delta\vartheta + \frac{\partial f}{\partial\varphi}\delta\varphi = 0$$

vermöge obiger Differentialgleichungen erfüllt sein; man erhielte, wenn man δx, δy einsetzt und bedenkt, daß dann $\delta\varphi$, $\delta\vartheta$ unabhängig sind

$$\frac{\partial f}{\partial\vartheta} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} r\cos\vartheta + \frac{\partial f}{\partial y} r\sin\vartheta + \frac{\partial f}{\partial\varphi} = 0.$$

Differentiiert man die letzte Gleichung ein- und zweimal nach ϑ und beachtet, daß nach der ersten f, also auch seine Ableitungen, von ϑ frei sind, so erhält man

$$-\frac{\partial f}{\partial x}\sin\vartheta + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\vartheta = 0,$$

$$-\frac{\partial f}{\partial x}\cos\vartheta + -\frac{\partial f}{\partial y}\sin\vartheta = 0,$$

woraus

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

und demnach auch $\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$ folgte.

Es bedeuten eben die Gleichungen (a) nur eine Bewegungsbeschränkung im Unendlichkleinen, nicht auch im Endlichen: man kann das System durch geeignete Bewegung in jede Lage bringen, ohne (a) zu verletzen.

Wir beschränken uns hier im folgenden auf holonome Systeme, trotz der augenscheinlichen Wichtigkeit der nichtholonomen Systeme.[1]) Gleichungen, welche eine naturgemäße Verallgemeinerung der Lagrangeschen Gleichungen auf nichtholonome Systeme darstellen, gaben unabhängig voneinander V. Volterra in den Atti di Torino, Bd. XXXIII, 1898, P. Woronetz (in russischer Sprache) 1901, und der Verfasser: „Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik". Zeitschrift f. Math. u. Phys., Bd. 50, 1904.

Beschäftigt hat man sich schon früher mit solchen Systemen. Der Name holonom stammt von H. Hertz. (Weitere Literaturangaben in der genannten Arbeit des Verfassers.)

325. Die Bewegungsgleichungen. Setzen wir den Ausdruck (2) für die virtuelle Verschiebung in den Ausdruck des Lagrangeschen Prinzips ein:

$$\mathfrak{S}\, dm\bar{w} \cdot \delta\bar{r} = \mathfrak{S}\, d\bar{k} \cdot \delta\bar{r},$$

so erhalten wir, da die δq ganz willkürlich sind, gerade n Gleichungen

$$\mathfrak{S}\, dm\bar{w} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_\lambda} = \mathfrak{S}\, d\bar{k} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_\lambda} \tag{I}$$

$$\lambda = 1, 2, \ldots, n.$$

Diese n Gleichungen sind bereits die gesuchten n Bewegungsgleichungen, d. h. die Lagrangeschen Gleichungen in unentwickelter Form.

Man könnte sie danach aufstellen:

Die sogenannte Lagrange-Kraftkomponente

$$K_\lambda \equiv \mathfrak{S}\, d\bar{k} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_\lambda}$$

kann man sofort berechnen, wenn man die eingeprägten Kräfte $d\bar{k}$ und Gleichung (1), d. h. das System wirklich kennt, um die Lagrangesche Beschleunigungskomponente

$$Q_\lambda \equiv \mathfrak{S}\, dm\bar{w} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q}$$

---

1) Fast alle Fahrzeuge, die nicht gleiten sollen, gehören dazu.

als explizite Funktion von q, $\dot{q}$, $\ddot{q}$ und t aufzustellen, braucht man nur die (3) entsprechende Gleichung

$$\bar{v} = \sum \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_\lambda} \dot{q}_\lambda + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \tag{3'}$$

noch einmal zu differentiieren und das Resultat in den Ausdruck für Q_λ einzusetzen.

Lagrange hat aber zur Berechnung von Q_λ eine sehr viel elegantere Methode gegeben, die wir gleich nachher kennen lernen wollen.

Was die K_λ angeht, so gestaltet sich ihre Berechnung nur dann einfacher, wenn ein Potential vorhanden ist. Ist

$$d\bar{k} = -\frac{\partial U}{\partial \bar{r}},$$

wo U von allen $\bar{r}$, sonst höchstens noch von t abhängt, so ist

$$\delta A = \mathsf{S}\, d\bar{k} \cdot \delta \bar{r} = -\mathsf{S} \frac{\partial U}{\partial \bar{r}} \cdot \delta \bar{r} = -\delta U.$$

Da aber auch

$$\delta A = \mathsf{S}\, d\bar{k} \cdot \delta \bar{r} = \mathsf{S}\, \Sigma\, d\bar{k} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_\lambda} \delta q_\lambda = \Sigma K_\lambda \delta q_\lambda,$$

so ist

$$\Sigma K_\lambda \delta q_\lambda = -\delta U.$$

Und da vermöge (1) auch U nur eine Funktion von

$$q_1 \ldots q_n, t$$

ist, also

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial q_\lambda} \delta q_\lambda,$$

so folgt:

Für den Fall, daß die eingeprägten Kräfte ein Potential haben, ist

$$K_\lambda = -\frac{\partial U}{\partial q_\lambda}.$$

Ehe wir zur Berechnung der Q_λ übergehen, lösen wir

326. Das Impulsionsproblem. Wirken Stoßkräfte $d\bar{h}$, so folgt aus dem Lagrangeschen Prinzip durch Integration über die Stoßzeit — man kann für diese kurze Zeit die $\delta \bar{r}$ als konstant ansehen, wenn durch den Stoßprozeß die kinematische Konstitution nicht geändert wird, was wir annehmen wollen —

$$\Delta \mathsf{S}\, dm \bar{v} \cdot \delta \bar{r} = \mathsf{S}\, d\bar{h} \cdot \delta \bar{r}.$$

Setzt man darin (2) ein, so bekommt man wegen der Willkür der δq_λ, wie in der vorigen Nummer

$$\Delta \left(\mathsf{S}\, dm \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_\lambda} \right) = \mathsf{S}\, d\bar{h} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_\lambda}, \tag{II}$$

$$\lambda = 1, 2, \ldots, n.$$

Dabei wollen wir

$$\mathsf{S}\, d\bar{h} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_\lambda} \equiv H_\lambda,$$

die Lagrange-Stoßkraftkomponente

$$\mathsf{S}\, dm\bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_\lambda} \equiv P_\lambda$$

eine Lagrangesche Impulskomponente nennen.

Gleichungen (II) lauten nach diesen Abkürzungen

$$\Delta P_\lambda = H_\lambda. \tag{II'}$$

Man beachte die analoge Bildung aller der Größen Q_λ, K_λ, P_λ, H_λ aus $\bar{w}$, $d\bar{k}$, $\bar{v}$, $d\bar{h}$.

Nun kann man aber die Impulskomponente P_λ leicht berechnen, wenn man den Ausdruck der kinetischen Energie kennt.

Aus der Gleichung für die Geschwindigkeit

$$\bar{v} = \sum \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_\lambda} \dot{q}_\lambda + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \tag{3'}$$

folgt nämlich durch Differentiation nach $\dot{q}_\lambda$ (die $\dot{q}_\lambda$, q_λ und t alle als unabhängige Variabele angesehen)

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_\lambda} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_\lambda}. \tag{4}$$

Also ist

$$P_\lambda = \mathsf{S}\, dm\bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_\lambda} = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_\lambda},$$

da ja $E = \frac{1}{2} \mathsf{S}\, dm\bar{v}^2$.

Nun ist nach dieser Gleichung und nach (3') E eine quadratische Funktion der $\dot{q}_\lambda$, deren Koeffizienten wiederum Funktionen der q_λ und der Zeit t sind.

Hat man sich so E als Funktion der $\dot{q}_\lambda$, q_λ, t verschafft, so ist die λte Impulskomponente die partielle Ableitung von E nach der λten Geschwindigkeitskomponente $\dot{q}_\lambda$, wobei die andern $\dot{q}_\lambda$ sowie alle q_λ und t als Konstante anzusehen sind:

$$P_\lambda = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_\lambda}. \tag{A}$$

Darum und wegen der Relation

$$\mathsf{S}\, dm\bar{v} \cdot \delta\bar{r} = \Sigma P_\lambda \delta q_\lambda$$

als auch wegen Gleichung (II) heißen die P_λ auch Impulskomponenten (vergleiche die Relation zwischen $\bar{J}$ und E_r beim starren Körper).

Ehe wir nun zur Berechnung der Q_λ übergehen, brauchen wir eine Hilfsbetrachtung.

327. Die Gleichung $d\delta\bar{r} - \delta d\bar{r} = 0$. Verfolgen wir einen Punkt auf seiner Bahn, so ist es klar, was $d\bar{r}$ ist, es ist $\bar{v}\,dt$. Auch wissen wir, was $\delta\bar{r}$ ist, es ist eine mögliche Verschiebung, die jeder Zeit hinzugedacht werden kann, mit den Bedingungen des Systems verträglich und zeitlos ist, d. h. es ist

$$\delta\bar{r} = \sum \frac{\partial\bar{r}}{\partial q_\lambda}\delta q_\lambda,$$

wo $\delta q_\lambda = \varepsilon \cdot w_\lambda(t)$, ε eine unendliche kleine Konstante, $w_\lambda(t)$ eine willkürliche Funktion der Zeit ist.

Danach ist auch klar, was

$$d\delta\bar{r}$$

ist, es ist

$$d\delta\bar{r} = \varepsilon\sum\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_\lambda}\right)w_\lambda(t)dt + \varepsilon\sum\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_\lambda}w_\lambda'(t)\cdot dt. \tag{a}$$

Dagegen ist $\delta d\bar{r}$ noch ganz undefiniert, oder da natürlich

$$\delta d\bar{r} = \sum\delta\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_\lambda}\right)dq_\lambda + \delta\frac{\partial\bar{r}}{\partial t}dt + \sum\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_\lambda}\delta dq_\lambda \tag{b}$$

sein wird: man weiß noch nicht, was δdq_λ heißen soll.

Man kann nur sagen, daß $\delta d\bar{r}$ eine Variation des Bogenelementes $d\bar{r}$ bedeutet, d. h. es wird dem Bogenelement $d\bar{r}$ das Bogenelement $d\bar{r} + \delta d\bar{r}$ zugeordnet.

Wir setzen nun willkürlich[1]) fest: Wird dem Punkte P der Nachbarpunkt P_1, dem Punkte P' der Nachbarpunkt P_1' zugeordnet, so soll dem Bogenelement $d\bar{r} = \overline{PP'}$ als Bogenelement $\overline{P_1P_1'}$ zugeordnet werden. Dieses ist also definitionsgemäß mit $d\bar{r} + \delta d\bar{r}$ zu bezeichnen.

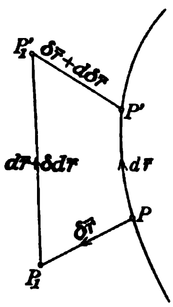


Fig. 249.

Nun folgt aber aus der Geschlossenheit der Figur $PP'P_1'P_1P$

$$d\bar{r} + \delta\bar{r} + d\delta\bar{r} - (d\bar{r} + \delta d\bar{r}) - \delta\bar{r} = 0$$

oder

$$d\delta\bar{r} - \delta d\bar{r} = 0. \tag{5}$$

Daraus folgt aber auch, daß

$$d\delta q = \delta dq \tag{6}$$

gesetzt werden muß.

Denn wegen der leicht durch Ausrechnen nachzuweisenden Relation

$$\sum_\lambda\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_\lambda}\right)dt\delta q_\lambda = \sum_\lambda\delta\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_\lambda}\right)dq_\lambda + \delta\frac{\partial\bar{r}}{\partial t}\cdot dt$$

1) Daß diese Festsetzung wirklich willkürlich und also streng genommen unnötig ist, hat Verfasser in der Note bewiesen: „Über die virtuellen Verschiebungen in der Mechanik". Math. Annalen, Bd. 59. Siehe auch die Darstellung in Heuns Kinematik.

folgt aus (a) und (b) durch Subtraktion

$$d\delta\bar{r} - \delta d\bar{r} = \sum \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_\lambda}(d\delta q_\lambda - \delta d q_\lambda).$$

Ist nun die linke Seite Null, so ist auch

$$\sum \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_\lambda}(d\delta q_\lambda - \delta d q_\lambda) = 0$$

für alle $\bar{a}$, und daraus folgt nach einer Bemerkung in Nr. 324 betreffend Gleichung (2), daß

$$d\delta q - \delta d q = 0$$

sein muß.

Das Umgekehrte ist klar.

Wir nehmen nun eine Umformung des Lagrangeschen Prinzips vor, die schon Lagrange selbst vollzogen hat:

328. Die Lagrangesche Zentralgleichung. Es ist identisch

$$\mathrm{S}\, dm\bar{w} \cdot \delta\bar{r} \equiv \frac{d}{dt}(\mathrm{S}\, dm\bar{v} \cdot \delta\bar{r}) - \mathrm{S}\, dm\bar{v} \cdot \frac{d}{dt}\delta\bar{r},$$

wie man durch Ausdifferentiieren des ersten Gliedes rechts erkennt. Nach der Festsetzung der vorigen Nummer ist aber

$$\frac{d}{dt}\delta\bar{r} = \frac{\delta d\bar{r}}{dt} = \delta\bar{v},$$

da $\delta dt = 0$, weil der δ-Prozeß die Zeit ganz unberührt läßt.

Also wird

$$\mathrm{S}\, dm\bar{w} \cdot \delta\bar{r} = \frac{d}{dt}(\mathrm{S}\, dm\bar{v} \cdot \delta\bar{r}) - \delta E$$

und das Lagrangesche Prinzip formt sich in die Lagrangesche Zentralgleichung um:

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{S}\, dm\bar{v} \cdot \delta\bar{r}) - \delta E = \mathrm{S}\, d\bar{k} \cdot \delta\bar{r}.$$

Nun ist es leicht, die Q_λ zu berechnen. (Der Name „Zentralgleichung" stammt von Heun.)

329. Berechnung der Lagrangeschen Beschleunigungskomponenten. Es war nach Nr. 326:

$$\mathrm{S}\, dm\bar{v} \cdot \delta\bar{r} = \Sigma P_\lambda \delta q_\lambda$$

und da ferner identisch in allen δq_λ

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{S}\, dm\bar{v} \cdot \delta\bar{r}) - \delta E = \Sigma Q_\lambda \delta q_\lambda$$

ist (nach Nr. 325 und 328), außerdem

$$\delta E = \sum \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_\lambda} \delta \dot{q}_\lambda + \sum \frac{\partial E}{\partial q_\lambda} \delta q_\lambda = \sum P_\lambda \delta \dot{q}_\lambda + \sum \frac{\partial E}{\partial q_\lambda} \delta q_\lambda,$$

so folgt

$$\frac{d}{dt}\left(\sum P_\lambda \delta q_\lambda\right) - \sum P_\lambda \delta \dot{q}_\lambda - \sum \frac{\partial E}{\partial q_\lambda} \delta q_\lambda \equiv \sum Q_\lambda \delta q_\lambda.$$

Differentiiert man aus und beachtet Gleichung (6) aus Nr. 327, so bleibt wegen der Willkür der δq_λ

$$Q_\lambda \equiv \frac{d P_\lambda}{dt} - \frac{\partial E}{\partial q_\lambda}, \tag{B}$$

und die Lagrangeschen Gleichungen lauten in der fertigen Form

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_\lambda}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_\lambda} = K_\lambda, \tag{III}$$

wo $K_\lambda = \mathfrak{S} d\bar{k} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_\lambda}$ ist.

Um also die linke (kinematische) Seite der Lagrangeschen Gleichungen zu erhalten, hat man sich erst die λte Impulskomponente P_λ durch partielle Differentiation nach $\dot{q}_\lambda$ aus E zu bilden, diese dann total nach der Zeit zu differentiieren, wobei alle $\dot{q}_\lambda$, q_λ und t als variabel anzusehen sind, und endlich vom Resultat die partielle Ableitung von E nach q_λ — wobei alle $\dot{q}_\lambda$ und alle anderen q sowie die Zeit konstant zu halten sind — abzuziehen. Ist ein Potential vorhanden, so steht auf der rechten Seite $-\frac{\partial U}{\partial q_\lambda}$.

330. Beispiele. Die Lagrangeschen Gleichungen sind die Bewegungsgleichungen für alle holonomen, skleronomen und nichtskleronomen Systeme. Sie sind also von großer Tragweite und Anwendungsfähigkeit und das gegebene Hilfsmittel bei schwierigeren Problemen. Sie beweisen zugleich — für den Fall holonomer Systeme — daß das Lagrangesche Prinzip gerade die erforderliche Anzahl von Bewegungsgleichungen gibt. Man kann nämlich zeigen, daß diese Gleichungen stets voneinander unabhängig sind. Doch wollen wir uns hier mit der Behauptung begnügen. Gehen wir zu Beispielen über.

1. Das Schubkurbelgetriebe. Es war die lebendige Kraft desselben nach Nr. 320

$$E = \frac{1}{2}\,\omega^2[T_{\mathrm{I}} + T_{\mathrm{II}}\eta'^2 + m_{\mathrm{II}}(\xi^2 + \zeta^2) + m_{\mathrm{III}}u^2],$$

$$= \frac{1}{2}\,\omega^2(G(\vartheta) + T_{\mathrm{I}}),$$

$$U = \int (W - rT)\,d\vartheta.$$

Also ist

$$P = \frac{\partial E}{\partial \omega} = \omega[G(\vartheta) + T_{\mathrm{I}}],$$

$$\frac{dP}{dt} = \dot{\omega}[G(\vartheta) + T_{\mathrm{I}}] + \omega^2 G'(\vartheta),$$

$$\frac{\partial E}{\partial \vartheta} = \frac{1}{2}\omega^2 G'(\vartheta),$$

$$K = -\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = -W + rT.$$

Mithin lautet die Lagrangesche Gleichung

$$\dot{\omega}[T_{\mathrm{I}} + G(\vartheta)] + \frac{1}{2}\omega^2 G'(\vartheta) = -W + rT$$

und das ist genau unsere frühere Gleichung.

2. Das Doppelpendel besteht aus zwei starren Körpern, die eine ebene Bewegung vollführen. Danach ist die gesamte kinetische Energie

$$E = \frac{1}{2} T_{\mathrm{I}}\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} T_{\mathrm{II},s}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_{\mathrm{II}}(\dot{x}_{\mathrm{II}}^{*2} + \dot{y}_{\mathrm{II}}^{*2}).$$

Nun war aber

$$x_{\mathrm{II}}^* = c\cos\vartheta + b\cos\varphi,$$

$$y_{\mathrm{II}}^* = c\sin\vartheta + b\sin\varphi,$$

also

$$\dot{x}_{\mathrm{II}}^* = -c\sin\vartheta\cdot\dot{\vartheta} - b\sin\varphi\cdot\dot{\varphi},$$

$$\dot{y}_{\mathrm{II}}^* = c\cos\vartheta\cdot\dot{\vartheta} + b\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}$$

und somit ist

$$E = \frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2[T_{\mathrm{I}} + m_{\mathrm{II}}c^2] + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2[T_{\mathrm{II},s} + m_{\mathrm{II}}b^2] + m_{\mathrm{II}}cb\cos(\vartheta - \varphi)\dot{\vartheta}\dot{\varphi}.$$

Also

$$P_\vartheta = \frac{\partial E}{\partial \dot{\vartheta}} = \dot{\vartheta}[T_{\mathrm{I}} + m_{\mathrm{II}}c^2] + m_{\mathrm{II}}cb\cos(\vartheta - \varphi)\dot{\varphi},$$

$$P_\varphi = \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}[T_{\mathrm{II},s} + m_{\mathrm{II}}b^2] + m_{\mathrm{II}}cb\cos(\vartheta - \varphi)\dot{\vartheta},$$

$$\frac{\partial E}{\partial \vartheta} = -m_{\mathrm{II}}cb\sin(\vartheta - \varphi)\dot{\vartheta}\dot{\varphi},$$

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = m_{\mathrm{II}}cb\sin(\vartheta - \varphi)\dot{\vartheta}\dot{\varphi},$$

Endlich ist das Potential der Schwere

$$U = -m_{\mathrm{I}}ga\cdot\cos\vartheta - m_{\mathrm{II}}g(c\cos\vartheta + b\cos\varphi),$$

also

$$K_\vartheta = -\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = -m_{\mathrm{I}} g a \sin\vartheta - m_{\mathrm{II}} g c \sin\vartheta,$$

$$K_\varphi = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -m_{\mathrm{II}} g b \sin\varphi.$$

Somit lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\ddot{\vartheta}[T_{\mathrm{I}} + m_{\mathrm{II}} c^2] + m_{\mathrm{II}} c b \cos(\vartheta - \varphi)\ddot{\varphi} - m_{\mathrm{II}} c b \sin(\vartheta - \varphi)\dot{\varphi}^2 = -(m_{\mathrm{I}} g a + m_{\mathrm{II}} g c)\sin\vartheta,$$

$$\ddot{\varphi}[T_{\mathrm{II},s} + m_{\mathrm{II}} b^2] + m_{\mathrm{II}} c b \cos(\vartheta - \varphi)\ddot{\vartheta} - m_{\mathrm{II}} c b \sin(\vartheta - \varphi)\dot{\vartheta}^2 = -m_{\mathrm{II}} g b \sin\varphi.$$

Das sind aber genau die Gleichungen aus Nr. 310.

331. Die Wage als Mittel zur experimentellen Bestimmung von Deviationsmomenten. Der Körper wird mit der Achse, für welche das Deviationsmoment bestimmt werden soll, parallel dem Wagebalken einer Wage auf diese gelagert. Der Körper sei zentriert und der Schwerpunkt liege in der Schneide der Wage (so nehmen wir der Einfachheit halber an, diese Voraussetzung ist aber unwesentlich). Pendelt nun die Wage mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\vartheta}$, während der Körper relativ zur Wage die Winkelgeschwindigkeit ω hat, so hat letzterer absolut die Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse des Wagebalkens, $\dot{\vartheta}$ quer dazu und horizontal.

Wir nehmen nun im Körper fest ein Achsenkreuz: z in der Drehachse parallel dem Wagebalken, y und x senkrecht dazu. Diese Achsen können wir so wählen, daß $D_{x,y}$ null wird: wir brauchen ja nur die x- und y-Achse in die Hauptachsen der Schnittellipse des Trägheitsellipsoides mit der xy-Ebene zu legen. Bilde nun die x-Achse den Winkel φ mit der nach vorne gerichteten Horizontalen, in der $\dot{\vartheta}$ liegt, so daß

$$\omega = \dot{\varphi}$$

ist, so hat ω die Komponenten

$$\omega_x = \dot{\vartheta}\cos\varphi, \quad \omega_y = -\dot{\vartheta}\sin\varphi, \quad \omega_z = \dot{\varphi}$$

und es ist nach Nr. 270 die kinetische Energie des aufgesetzten Körpers

$$\frac{1}{2}\{T_x\dot{\vartheta}^2\cos^2\varphi + T_y\dot{\vartheta}^2\sin^2\varphi + T_z\dot{\varphi}^2 - 2D_{xz}\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos\varphi + 2D_{yz}\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\sin\varphi\}.$$

Dazu kommt die lebendige Kraft der Wage:

$$\frac{1}{2}T\dot{\vartheta}^2.$$

Da das Potential der Schwere

$$U = mgs\cos\vartheta$$

ist, so lauten die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}[T_z\cdot\dot\varphi - D_{x,z}\dot\vartheta\cos\varphi + D_{y,z}\dot\vartheta\sin\varphi] - [-T_x\dot\vartheta^2\cos\varphi\sin\varphi + T_y\dot\vartheta^2\cos\varphi\sin\varphi + D_{x,z}\dot\vartheta\dot\varphi\sin\varphi + D_{y,z}\dot\vartheta\dot\varphi\cos\varphi] = 0,$$

und

$$\frac{d}{dt}[T\dot\vartheta + T_x\dot\vartheta\cos^2\varphi + T_y\dot\vartheta\sin^2\varphi - D_{x,z}\dot\varphi\cos\varphi + D_{y,z}\dot\varphi\sin\varphi] = -mgs\sin\vartheta.$$

Differentiiert man aus, so gibt die erste Gleichung

$$T_z\ddot\varphi - D_{x,z}\ddot\vartheta\cos\varphi + D_{y,z}\ddot\vartheta\sin\varphi + (T_x - T_y)\dot\vartheta^2\cos\varphi\sin\varphi = 0.$$

Zur Vereinfachung des Problems wollen wir nun annehmen, daß auf den rotierenden Körper eine Kraft — etwa vermittels elektrischen Antriebes — so wirke, daß $\dot\varphi = \omega_0$ konstant bleibt. Dann tritt auf die rechte Seite der vorstehenden Gleichung nicht Null, sondern die erforderliche Kraftkomponente K_φ, die sicher ein Drehmoment ist, weil ihre Arbeit $K_\varphi\,\delta\varphi$ ist. Die zweite Gleichung aber vereinfacht sich wegen

$$\dot\varphi = \omega_0,$$

$$\varphi = \omega_0 t$$

zu

$$[T + T_x\cos^2\varphi + T_y\sin^2\varphi]\ddot\vartheta - 2(T_x - T_y)\cos\varphi\sin\varphi\,\omega_0\dot\vartheta + (D_{x,z}\sin\varphi + D_{y,z}\cos\varphi)\,\omega_0^2 + mgs\vartheta = 0.$$

Es ist dies nun eine lineare Differentialgleichung für ϑ, deren Koeffizienten jedoch variabel sind. In ihrer Theorie hat Poincaré bedeutende Fortschritte erzielt, über die man das Wichtigste in seinen „Nouvelles methodes de la mécanique céleste" findet. Wir erstreben hier nur eine erste Annäherung.

Das nicht von ϑ abhängige Glied

$$(D_{x,z}\sin\omega_0 t + D_{y,z}\cos\omega_0 t)\,\omega_0^2$$

ist periodisch von der Periode $\frac{2\pi}{\omega_0}$. Es steht zu erwarten, daß es eine periodische Bewegung desselben Rhythmus hervorruft, die allerdings durch Schwingungen doppelter, dreifacher usw. Schwingungszahl überlagert sein wird. Wir berechnen nur die Grundschwingung, indem wir für die Koeffizienten von $\ddot\vartheta$, $\dot\vartheta$ die Mittelwerte setzen: nämlich $T + \frac{1}{2}T_x + \frac{1}{2}T_y$ resp. Null, von denen sich die wahren Werte der

Koeffizienten um die rein periodischen Glieder $\frac{1}{2}(T_x - T_y)\cos 2\varphi$ resp. $(T_x - T_y)\sin 2\varphi \cdot \omega_0$ von der Periode $\frac{\pi}{\omega_0}$ unterscheiden. Diese Glieder werden also nur Anlaß zu Oberschwingungen $\left(\text{also Schwingungen der Periode } \frac{2\pi}{n\omega_0}\right)$ geben.

Also betrachten wir die angenäherte Gleichung zur Berechnung der Grundbewegnng

$$\left(T + \frac{1}{2}T_x + \frac{1}{2}T_y\right)\ddot{\vartheta} + mgs\vartheta = -\omega_0^2(D_{x,z}\sin\omega_0 t + D_{y,z}\cos\omega_0 t)$$
$$\equiv \beta \sin(\omega_0 t + \varepsilon),$$

wo

$$\beta = \omega_0^2\sqrt{D_{x,z}^2 + D_{y,z}^2}$$

$$\sin\varepsilon = \frac{-D_{y,z}}{\sqrt{D_{x,z}^2 + D_{y,z}^2}}, \quad \cos\varepsilon = \frac{-D_{x,z}}{\sqrt{D_{x,z}^2 + D_{y,z}^2}}$$

ist. Diese Gleichung ist aber die typische Gleichung der erzwungenen Schwingungen (siehe § 16).

Die Beobachtung der Amplitude der erzwungenen Schwingungen gestattet also, wenigstens bei bekannten T_x, T_y, einen Rückschluß auf $\sqrt{D_{x,z}^2 + D_{y,z}^2}$ und damit wenigstens eine Messung der gesamten Deviation. Kennt man auch die Dämpfung so genau, daß ein Rückschluß aus der Phasendifferenz möglich ist, so wären $D_{x,z}$ und $D_{y,z}$ einzeln der Beobachtung zugänglich.

332. Der Schiffskreisel. Wir betrachten folgendes System. Ein Schiff, d. h. ein starrer Körper, der sich um seine Längsachse drehen (rollen) kann, der Winkel sei φ (positiv bei Kippen nach links). In dem Schiffe kann sich um eine Querachse ein Rahmen bewegen, der Ausschlagwinkel sei ϑ gegen die vertikale Querebene. Um eine im Rahmen gelagerte Achse senkrecht zur Drehachse des Rahmens (also für $\vartheta = 0$, $\varphi = 0$, um eine vertikale Achse) drehe sich im Rahmen ein symmetrischer Kreisel, der Drehwinkel sei ψ. Macht man die Längsachse des Schiffes zur z-Achse, die gewöhnliche (d. h. horizontale) Lage der Querachse (Rahmenachse) zur x-Achse, die nach oben gerichtete Vertikale zur y-Achse, die Symmetrieachse des Kreisels, die normalerweise nach oben zeigt, zur z'-Achse, so kann man $\frac{\pi}{2} - \vartheta$, $\pi - \varphi$, ψ mit den Eulerschen Winkeln des starren Körpers identifizieren (siehe Nr. 260). Also ist für den Kreisel nach Nr. 265

$$\omega_{x'} = -\cos\psi\dot{\vartheta} - \sin\psi\cos\vartheta\dot{\varphi},$$
$$\omega_{y'} = +\sin\psi\dot{\vartheta} - \cos\psi\cos\vartheta\dot{\varphi},$$
$$\omega_{z'} = -\sin\vartheta\dot{\varphi} + \dot{\psi}$$

und da die x'-, y'-, z'-Achsen Hauptachsen sind, außerdem $A = B$, ist seine kinetische Energie

$$E_K = \frac{1}{2} A_K(\dot{\vartheta}^2 + \cos^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} C_K(\dot{\psi} - \sin\vartheta\,\dot{\varphi})^2.$$

Den Rahmen können wir als einen Kreisel ansehen, für den $\psi = 0$ und $\dot{\psi} = 0$ ist, während er die Bewegungen ϑ und φ mitmacht, also ist für ihn

$$E_R = \frac{1}{2} A_R\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} B_R \cos^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} C_R(-\sin\vartheta\,\dot{\varphi})^2.$$

Endlich ist für das Schiff

$$E_S = \frac{1}{2} A_S\dot{\varphi}^2.$$

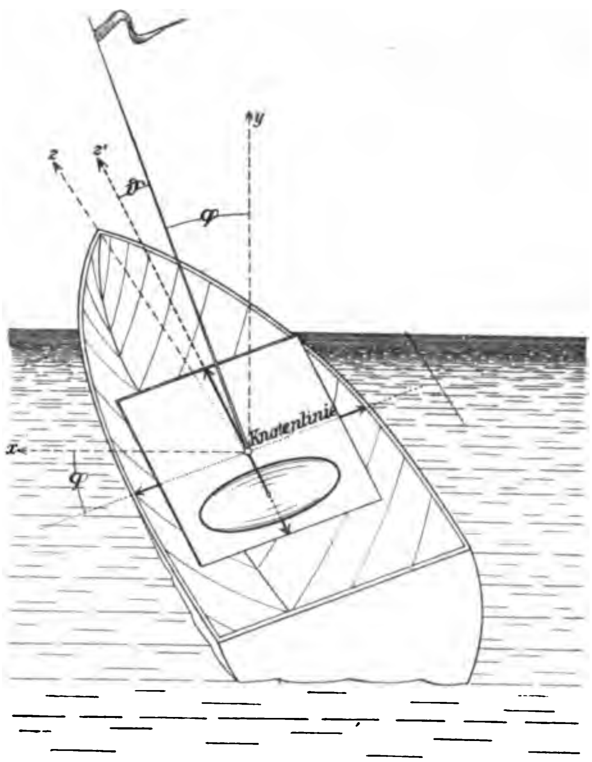


Fig. 250.

Nehmen wir nun an, daß ϑ, φ, $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$ dauernd klein sind, während $\dot{\psi}$ durch einen auf die Kreiselachse aufgesetzten Elektromotor auf der konstanten Stärke ω_0 gehalten wird, so nimmt die gesamte kinetische Energie des Systems die Gestalt an

$$E = \frac{1}{2} T\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} A\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} C(\omega_0^2 - 2\omega_0\vartheta\dot{\varphi}), \tag{1}$$

wo $T = A_S + A_K + B_R$ wegen der überwiegenden Größe von A_S wesentlich das Trägheitsmoment des Schiffes um die Längsachse darstellt,

$$A = A_K + A_R,$$

$$C = C_K,$$

durch die Massen des Kreisels und des Rahmens bedingt sind. An Kräften wirken nun

1. das aufrichtende Moment von Auftrieb und Schwere auf das Schiff, das in erster Annäherung $-\varphi$ proportional sein wird, etwa

$$M = -\varphi \cdot mgh,$$

wo mg das Gewicht des Schiffes, h eine Länge, die sogenannte metazentrische Höhe bedeutet. M ist ein Moment um die Längsachse, seine Arbeit $M\delta\varphi$, also $M = K_\varphi$.

2. Die Schwerewirkung auf den Kreisel.

Liegt dessen Schwerpunkt im normalen Zustand die Strecke s unter der Rahmenachse, so ist für ihn $z^{*\prime} = -s$, $x^{*\prime} = 0$, $y^{*\prime} = 0$; also nach Nr. 261

$$y^* = -\cos\varphi \cos\vartheta \cdot s.$$

Deshalb ist mit Einschluß von Größen zweiter Ordnung das Potential

$$U = m'gy^* = -m'gs\left(1 - \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2}\vartheta^2\right).$$

Infolgedessen lauten die Lagrangeschen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} T\ddot{\varphi} - C\omega_0\dot{\vartheta} + (mgh + m'gs)\varphi &= 0 \\ A\ddot{\vartheta} + C\omega_0\dot{\varphi} + m'gs\vartheta &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

Läuft der Kreisel nicht, ist $\omega = 0$, so haben wir für die Schiffsschwingung φ und die Rahmenschwingung ϑ zwei gewöhnliche Schwingungsgleichungen, die ganz unabhängig voneinander sind. Läuft aber der Kreisel, so sind beide Gleichungen durch Glieder der Form

$$-C\omega_0\dot{\vartheta} \quad \text{resp.} \quad C\omega_0\dot{\varphi}$$

miteinander gekoppelt. Man nennt solche Glieder gyroskopische Terme.

Wir wollen nun die Gleichungen (I) noch dahin verallgemeinern, daß wir sowohl für das Schiff als auch für den Kreisel je eine unabhängige Dämpfung einführen:

$$-2\sigma\dot{\varphi} \text{ für das Schiff,}$$

$$-2\tau\dot{\vartheta} \text{ für den Kreisel,}$$

d. h. je ein der Geschwindigkeit entgegengesetztes und proportionales Drehmoment; außerdem mag auf das Schiff noch von den Wogen ein Drehmoment ausgeübt werden, das der Einfachheit halber als eine Sinusfunktion der Zeit angesetzt sei:

$$p \sin \nu t.$$

$\frac{2\pi}{\nu}$ ist dann die Schwingungsdauer einer Woge. Die so verbesserten Gleichungen lauten, wenn wir noch

$$mgh + m'gs = a$$
$$m'gs = c$$

setzen:

$$\left.\begin{aligned} T\ddot{\varphi} - C\omega_0\dot{\vartheta} + a\varphi + 2\sigma\dot{\varphi} &= p \sin \nu t \\ A\ddot{\vartheta} + C\omega_0\dot{\varphi} + c\vartheta + 2\tau\dot{\vartheta} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I}')$$

In die Behandlung dieser Gleichungen gehen wir im nächsten Paragraphen ein.

Über die praktische Bedeutung des Systems haben wir schon in Nr. 280 gesprochen.

Wir wollen jetzt noch eine elementare Ableitung der vorstehenden Gleichungen kennen lernen.

332a. Elementare Ableitung der Gleichungen des Schiffskreisels. Befindet sich der Kreisel in seiner normalen Lage und rollt das Schiff mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ nach links, so wäre nach Nr. 278 und 283 zum Mitführen des Kreisels ein Moment der Größe $C\omega_0\dot{\varphi}$ um die dritte Achse, also die Querachse nötig und zwar von solchem Sinne, daß sich die Rotationsachse des Kreisels (die z'-Achse) auf den Momentvektor zu bewegt. Also ist ein Moment, in der Querachse nach links gelegen, notwendig. Ein solches Moment kann aber nicht das Schiff (bei reibungsfreien Drehachsen!), sondern nur der Rahmen hergeben: also erfährt letzterer vom Kreisel ein Drehmoment $C\omega_0\dot{\varphi}$, das in der Querachse nach rechts liegt, also ϑ zu verkleinern sucht. Passiert andererseits der Kreisel die Normallage mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\vartheta}$ (was eine Drehung um die Querachse bedeutet), so ist dazu nach derselben Regel vom Deviationswiderstand ein nach vorne gelegenes Moment der Größe $C\omega_0\dot{\vartheta}$ nötig, das jetzt aber nicht der Rahmen, sondern nur das Schiff hergeben kann. Dieses wird also selber ein nach hinten gelegenes Moment $C\omega_0\dot{\vartheta}$ erfahren, das φ zu vergrößern strebt.

Befindet sich der Kreisel nicht gerade in der Normallage ($\vartheta = 0$), so werden statt der soeben betrachteten Momente solche auftreten, welche für $\vartheta = 0$ in jene übergehen, sich also nur um Größen zweiter Ordnung — die Momente selbst sind ja schon erster Ordnung klein — von jenen unterscheiden, so daß wir bei Beibehaltung von Größen erster Ordnung allein jene Momente stets als wirksam ansehen dürfen.

Betrachten wir nun Schiff und Kreisel mit Rahmen als je ein Pendel, das kleine Schwingungen ausführt, auf welche außer der Schwere, einer Dämpfung und dem Moment der Wogen noch die eben besprochenen Momente infolge des rotierenden Kreisels wirken, so können wir die Schlußgleichungen der vorigen Nummer sofort hinschreiben.

333. Literatur zur analytischen Mechanik. Der Begründer der analytischen Methoden ist Lagrange, dessen mécanique analytique zuerst 1788 erschien. Dieses Werk bildet die Basis für die ganze theoretische Fortentwicklung der Mechanik im 19. Jahrhundert, die man vor allem Poisson, Hamilton, Jacobi (dessen Vorlesungen über Dynamik klassisch geworden sind), William Thomson, Routh, Helmholtz, Appell u. a. verdankt. Es gibt sehr viele Lehrbücher dieser Richtung: Außer Lagrange, Jacobi selbst enthalten fast alle in der Einleitung (Nr. 9) genannten die analytischen Methoden, besonders Appell, Heun, Whittaker. Namentlich die französische und italienische Literatur ist reich an entsprechenden Lehrbüchern: Außer Despeyrous und Marcolongo seien die Namen Delaunay, Duhamel, Sturm, Maggi genannt. Ein Teil dieser Bücher ist ins Deutsche übersetzt. Von deutschen Büchern sei vor allem noch genannt: Boltzmann, Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik. Aus der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften kommen die noch nicht erschienenen Referate von Stäckel (Bd. IV, 11, 12, 13) in Betracht.

§ 57. Kleine Schwingungen von zwei Freiheitsgraden.

334. Die allgemeinsten Gleichungen für kleine Schwingungen bei zwei Freiheitsgraden können lauten

$$A\ddot{\vartheta} + B\ddot{\varphi} + 2\varkappa\dot{\vartheta} + 2\lambda\dot{\varphi} + \alpha\vartheta + \beta\varphi = F(t),$$
$$B'\ddot{\vartheta} + A'\ddot{\varphi} + 2\lambda'\dot{\vartheta} + 2\varkappa'\dot{\varphi} + \beta'\vartheta + \alpha'\varphi = F'(t).$$

Linear nämlich werden im allgemeinen die Gleichungen sein, da ja die Variabeln nebst ihren Ableitungen klein sein sollen und wir bei Gliedern erster Ordnung stehen bleiben wollen. Es könnte nur sein, daß in den exakten Gleichungen alle Glieder erster, zweiter bis ν^{ter} Ordnung fortfielen, dann wären die Gleichungen in ϑ, φ, $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$ usw. $\nu + 1^{\text{ter}}$ Ordnung. Wir wollen aber, der bisherigen Praxis entsprechend, $\nu = 0$ annehmen, d. h. voraussetzen, daß in den exakten Gleichungen nicht alle Glieder erster Ordnung verschwinden.

Als mechanische Gleichungen werden die Gleichungen gerade noch Ableitungen zweiter Ordnung enthalten. Die Koeffizienten könnten zunächst noch Funktionen von t sein.

Nun wollen wir aber gewisse Beschränkungen eintreten lassen:

Die Gleichungen mögen einem mechanischen skleronomen System von eigentlich drei Freiheitsgraden angehören: es sei aber eine Koordinate ψ eine sogenannte zyklische, d. h. sie komme selbst weder in E noch in den Kraftgrößen vor, außerdem werde $\dot{\psi} = \omega_0$ konstant gehalten. (Beispiel: der umlaufende Kreisel im System von Schiff und

Rahmen.) Ist $\omega_0 = 0$, so erhalten wir das allgemeine System von zwei Freiheitsgraden, das also in unserem Ansatz enthalten ist. ω_0 ist nicht klein, so daß der allgemeinste Ausdruck der kinetischen Energie, der bei einem skleronomen System in $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$, ω_0 homogen quadratisch sein muß, bei Beibehaltung von Gliedern zweiter Ordnung lautet

$$E = \frac{1}{2}\left\{A\dot{\vartheta}^2 + 2B\dot{\vartheta}\dot{\varphi} + C\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\vartheta}\omega_0(\varkappa\vartheta + \lambda\varphi) + 2\dot{\varphi}\omega_0(\mu\vartheta + \nu\varphi) \right.$$
$$\left. + \omega_0^2(\alpha\vartheta^2 + 2\beta\vartheta\varphi + \gamma\varphi^2)\right\}.$$

Man kann ein Glied mit $\dot{\vartheta}\omega_0$ oder $\dot{\varphi}\omega_0$ mal einer Konstanten fortlassen, da es bei Bildung der Lagrangeschen Gleichungen keinen Beitrag liefern würde, desgleichen ein Glied mit ω_0^2 mal einer Konstanten. Dagegen dürfen Glieder mit ω_0^2 mal einer linearen Funktion von ϑ, φ nicht vorkommen, da sie in die Lagrangeschen Gleichungen endliche Konstante additiv hineinbringen würden.

Die eingeprägten Kräfte mögen in zwei Gruppen zerfallen: Erstens sogenannte konservative Kräfte, d. h. solche, die ein Potential haben, das natürlich die Form haben muß

$$U = \frac{1}{2}(a'\vartheta^2 + 2b'\vartheta\varphi + c'\varphi^2),$$

da auch hier lineare Glieder aus demselben Grunde ausgeschlossen sind wie oben in E.

Zweitens seien sogenannte dissipative Kräfte vorhanden, d. h. Kräfte, die Lagrangesche Kraftkomponenten erzeugen, welche von den Geschwindigkeiten $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$ linear abhängen und die Eigenschaft haben, daß sie stets Energie verzehren. Seien also diese Lagrangeschen Kraftkomponenten

$$-2\varrho\dot{\vartheta} - 2\sigma\dot{\varphi},$$
$$-2v\dot{\vartheta} - 2\tau\dot{\varphi},$$

so ist ihre Leistung $-2\varrho\dot{\vartheta}^2 - 2(\sigma + v)\dot{\vartheta}\dot{\varphi} - 2\tau\dot{\varphi}^2$. Die muß also stets negativ sein, d. h. $\varrho > 0$, $\tau > 0$, $(\sigma + v)^2 < 4\varrho\tau$.

Für die Leistung kommt also nur $\sigma + v$ in Frage, wir wollen daher annehmen, daß $\sigma = v$ sei. Wir dürfen das um so mehr tun, als man ja jedenfalls z. B. das Glied $2\sigma\dot{\varphi}$ auch schreiben kann

$$(\sigma + v)\dot{\varphi} + (\sigma - v)\dot{\varphi},$$

dann das Glied

$$2v\dot{\vartheta} = (\sigma + v)\dot{\vartheta} - (\sigma - v)\dot{\vartheta}$$

und wir sehen werden, daß wir Glieder der Form $(\sigma - v)\dot{\varphi}$ resp. $-(\sigma - v)\dot{\vartheta}$ ohnehin in die Gleichungen bekommen werden.

Ist $\sigma = v$, so nennt man die Funktion $\varrho\dot{\vartheta}^2 + 2\sigma\dot{\vartheta}\dot{\varphi} + \tau\dot{\varphi}^2$, wo $\sigma^2 < \varrho\tau$ ist, die Dissipationsfunktion (nach Lord Rayleigh: Theory of sound).

Wir können nunmehr die Lagrangeschen Gleichungen aufstellen: Sie lauten:

$$A\ddot{\vartheta} + B\ddot{\varphi} + \omega_0(\varkappa\dot{\vartheta} + \lambda\dot{\varphi}) - \omega_0\dot{\vartheta}\varkappa - \omega_0\dot{\varphi}\mu - \alpha\omega_0^2\vartheta - \beta\omega_0^2\varphi$$
$$= -a'\vartheta - b'\varphi - 2\varrho\dot{\vartheta} - 2\sigma\dot{\varphi}$$

und

$$B\ddot{\vartheta} + C\ddot{\varphi} + \omega_0(\mu\dot{\vartheta} + \nu\dot{\varphi}) - \omega_0\dot{\vartheta}\lambda - \omega_0\dot{\varphi}\nu - \omega_0^2\beta\vartheta - \omega_0^2\gamma\varphi$$
$$= -b'\vartheta - c'\varphi - 2\sigma\dot{\vartheta} - 2\tau\varphi.$$

Durch Zusammenziehung entsprechender Glieder nehmen diese Gleichungen die Form an:

$$\left.\begin{aligned} A\ddot{\vartheta} + B\ddot{\varphi} + D\omega_0\dot{\varphi} + 2\varrho\dot{\vartheta} + 2\sigma\dot{\varphi} + a\vartheta + b\varphi = 0 \\ B\ddot{\vartheta} + C\ddot{\varphi} - D\omega_0\dot{\vartheta} + 2\sigma\dot{\vartheta} + 2\tau\dot{\varphi} + b\vartheta + c\varphi = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{I}$$

wo $D = -\mu + \lambda$

$$a = a' - \alpha\omega_0^2,$$
$$b = b' - \beta\omega_0^2,$$
$$c = c' - \gamma\omega_0^2$$

ist.

Wirken noch Kräfte, die lediglich Funktionen der Zeit sind, so treten auf die rechte Seite noch gegebene Funktionen der Zeit.

Die Gleichungen (I) sind natürlich in den ganz allgemeinen Gleichungen enthalten, die Spezialisierung besteht in folgendem: 1. Alle Koeffizienten sind konstant. 2. Es ist $B = B'$, $A > 0$, $AC - B^2 > 0$ wegen $E > 0$. 3. Es ist $\beta = \beta' = b$ (rührt daher, daß ein Potential der vom Orte abhängigen Kräfte als vorhanden angenommen wurde). 4. Es sind $\varkappa = \varrho$ und $\varkappa' = \tau$ positiv, und $(\lambda + \lambda')^2 = 4\sigma^2 \leqq 4\varkappa\varrho$. 5. Die Glieder mit $2\lambda\dot{\varphi}$ und $2\lambda'\dot{\vartheta}$ sind zerlegt in $2\sigma\dot{\varphi} + D\omega_0\dot{\varphi}$ und $2\sigma\dot{\vartheta} - D\omega_0\dot{\varphi}$, wo $2\sigma = \lambda + \lambda'$, $D\omega_0 = -\lambda' + \lambda$ gesetzt ist. Das ist keine Spezialisierung, sondern eine durch die Natur der Sache bedingte Zerlegung: die Terme mit $2\sigma\dot{\varphi}$ resp. $2\sigma\dot{\vartheta}$ rühren von Widerstandskräften her, d. h. von solchen, die Energie verzehren, während die Glieder $+D\omega_0\dot{\varphi}$ und $-D\omega_0\dot{\vartheta}$ die sogenannten gyroskopischen Terme, etwa die Wirkung eines eingebauten symmetrischen Kreisels darstellen (vergleiche das Beispiel des Schiffskreisels aus Nr. 332, 333). Es ist zu beachten, daß diese Glieder keine Arbeit leisten. Denn

$$(+D\omega_0\dot{\varphi})\dot{\vartheta} + (-D\omega_0\dot{\vartheta})\dot{\varphi} = 0.$$

Der Name „gyroskopische Terme" stammt von Lord Kelvin (William Thomson).

335. Integration der Gleichungen (I). In bekannter Weise versuchen wir es mit dem Ansatze

$$\vartheta = \Theta e^{ut}, \quad \varphi = \Phi e^{ut}$$

und erhalten für Θ, Φ die beiden homogenen Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}(Au^2+2\varrho u+a)\Theta + (Bu^2+D\omega_0 u+2\sigma u+b)\Phi = 0\\ (Bu^2-D\omega_0 u+2\sigma u+b)\Theta + (Cu^2+2\tau u+c)\Phi = 0\end{array}\right\}. \tag{a}$$

Sollen diese beiden Gleichungen von Null verschiedene Lösungen haben, so muß die Determinante verschwinden:

$$\begin{vmatrix} Au^2+2\varrho u+a & Bu^2+D\omega_0 u+2\sigma u+b \\ Bu^2-D\omega_0 u+2\sigma u+b & Cu^2+2\tau u+c \end{vmatrix} = 0,$$

es ist dies eine Gleichung vierten Grades für u:

$$\begin{aligned} u^4(AC-B^2) &+ 2u^3(A\tau+\varrho C-2B\sigma) \\ &+ u^2(Ac+aC+4\varrho\tau-2bB+D^2\omega_0^2-4\sigma^2) \\ &+ 2u(\varrho c+a\tau-2b\sigma)+ac-b^2=0. \end{aligned} \tag{II}$$

Sei nun eine Wurzel dieser determinierenden Gleichung

$$u = x+iy,$$

so gibt es Lösungen, die

$$e^{ut} = e^{xt}(\cos yt + i\sin yt)$$

proportional sind.

Sollen also bei der Bewegung dauernd ϑ, φ klein bleiben, soll also insbesondere die Gleichgewichtslage $\vartheta = 0$, $\varphi = 0$ stabil sein, so muß $x \leqq 0$ sein, d. h. alle vier Wurzeln der determinierenden Gleichung müssen negative reelle Bestandteile haben (die Null eingeschlossen).

Sind $u_1 u_2 u_3 u_4$ die vier Wurzeln, so lautet das allgemeine komplexe Integral

$$\vartheta = \sum_{\nu=1}^{4}\Theta_\nu e^{u_\nu t}, \quad \varphi = \sum_{\nu=1}^{4}\Phi_\nu e^{u_\nu t},$$

wo jedes Paar Θ_ν und Φ_ν miteinander durch eine der Gleichungen (a) verknüpft ist.

Will man die reellen Lösungen haben, so braucht man nur den reellen Bestandteil für sich zu nehmen; denn genügt $\vartheta = \vartheta_1 + i\vartheta_2$ einer linearen Differentialgleichung mit reellen Koeffizienten, so genügt ihr auch ϑ_1 (ebenso ϑ_2) allein.

Da die Gleichung (II) reelle Koeffizienten hat, sind immer je zwei Wurzeln konjugiert (falls nicht zwei von ihnen oder alle vier reell sind)

$$u_1 = x_1 + iy_1, \quad u_2 = x_2 + iy_2,$$
$$u_3 = x_1 - iy_1, \quad u_4 = x_2 + iy_2,$$

infolgedessen lauten die reellen Integrale

$$\vartheta = \sum_{\nu=1,2} e^{x_\nu t}(\alpha_\nu \cos y_\nu t + \beta_\nu \sin y_\nu t),$$

$$\varphi = \sum_{\nu=1,2} e^{x_\nu t}(\varkappa_\nu \cos y_\nu t + \lambda_\nu \sin y_\nu t),$$

wo

$$\alpha_\nu = \quad \Re(\Theta_\nu + \Theta_{\nu+2}),$$
$$\beta_\nu = -\Im(\Theta_\nu - \Theta_{\nu+2})$$

und $\varkappa_\nu$, λ_ν entsprechend aus den Φ gebildet sind. (Ist $z = x + yi$, so heißt $x = \Re(z)$, $y = \Im(z)$.)

336. Vereinfachung der Gleichungen. Zum Zwecke der Diskussion der Wurzeln kann man eine bedeutende Vereinfachung der Gleichungen vornehmen.

Zunächst ist klar, daß das Problem in seinem ganzen Charakter nicht geändert wird, wenn man statt ϑ, φ irgend zwei homogene lineare Kombinationen ϑ', φ' mit konstanten Koeffizienten und mit nicht verschwindender Determinante als neue Variable einführt. Denn die Kleinheit der Variabeln wird dadurch nicht berührt, auch behalten E und U ihre Gestalt. Dabei transformieren sich wegen der Konstanz der Koeffizienten die $\dot\vartheta$, $\dot\varphi$ genau so wie die ϑ, φ.

Man kann nun diese lineare Transformation bekanntlich so wählen, daß die positiv definite Form

$$A\dot\vartheta^2 + 2B\dot\vartheta\dot\varphi + C\dot\varphi^2$$

die Gestalt $\dot\vartheta'^2 + \dot\varphi'^2$ annimmt. Man braucht ja nur zunächst das Koordinatensystem so zu drehen, daß $B = 0$ wird, dann eine affine Transformation vorzunehmen, welche die Ellipsen $A\vartheta^2 + C\varphi^2 = \text{const.}$ in Kreise überführt. Endlich kann man dann noch in der ϑ', φ'-Ebene eine solche Drehung des Koordinatensystems vornehmen, daß die Schar der Mittelpunktskurven

$$a\vartheta^2 + 2b\vartheta\varphi + c\varphi^2 = \text{const.}$$

auf die Hauptachsen transformiert wird, daß also $b = 0$ wird.

Kurz man kann durch Einführung neuer Variablen erreichen, daß $A = C = 1$, $B = b = 0$ wird, ohne daß sich sonst der Charakter des Problems ändert.

Die determinierende Gleichung lautet dann

$$u^4 + 2u^3(\tau + \varrho) + u^2(a + c + 4\varrho\tau + D^2\omega_0^2 - 4\sigma^2)$$
$$+ 2u(\varrho c + a\tau) + ac = 0. \qquad \text{(II')}$$

Soll nun die Bewegung klein bleiben, d. h. sollen alle Wurzeln dieser Gleichung negativ reelle Bestandteile haben, so muß jedenfalls $ac \geqq 0$ *sein, d. h.* a *und* c *müssen gleiches Zeichen haben oder das Potential*

$$-\frac{1}{2}(a\vartheta^2 + c\varphi^2)$$

an der Nullstelle ein Maximum oder Minimum besitzen.

Denn bekanntlich ist ac gleich dem Produkte $u_1 u_2 u_3 u_4$ aller vier Wurzeln. Sind diese alle reell, so müssen alle u negativ sein, sind zwei reell, etwa $u_3 < 0$, $u_4 < 0$, also $u_1 = x_1 + iy_1$, $u_2 = x_1 - iy_1$, so ist das Produkt $(x_1^2 + y_1^2)u_3 u_4 > 0$, sind endlich alle vier zu je zweien konjugiert komplex, so ist das Produkt $(x_1^2 + y_1^2)\,(x_1^2 + y_1^2) > 0$. Machen wir also hinfort die Annahme

$$ac \geqq 0.$$

337. Diskussion der nichtgedämpften Schwingungen. Sind σ, ϱ, τ null, sehen wir also von der Dämpfung ab, so lautet die determinierende Gleichung

$$u^4 + u^2(a + c + D^2\omega_0^2) + ac = 0.$$

Daraus folgt

$$u^2 = -\frac{(a+c+D^2\omega_0^2)}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a + c + D^2\omega_0^2)^2 - 4ac},$$
$$= -\frac{(a+c+D^2\omega_0^2)}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2 + D^4\omega_0^4 + 2D^2\omega_0^2(a+c)}.$$

1. Sind a und c beide positiv, so ist auf jeden Fall, auch für $\omega_0 = 0$, die halbe Quadratwurzel reell, aber absolut kleiner als das erste Glied, also sind beide u^2 reell und negativ, alle vier Wurzeln u also imaginär. Seien die beiden Werte

$$u^2 = -y_1^2 \quad \text{und} \quad u^2 = -y_2^2,$$

wo y_1, y_2 reell, so sind $\frac{2\pi}{y_1}$ und $\frac{2\pi}{y_2}$ die Schwingungsdauern beider Schwingungen, aus deren Überlagerung die ganze Bewegung besteht. Sei $y_1 > y_2$, so entspricht y_2 die langsamere Schwingung.

Ist $\omega_0 = 0$, so werden selbstverständlich die beiden Werte von y gleich $\sqrt{a}$ resp. $\sqrt{c}$. Man sieht weiter, daß ein nicht verschwindendes ω_0 das y_1 vergrößert, dagegen y_2 verkleinert.

Die Gleichung zwischen Φ und Θ nimmt die Gestalt an

$$(u^2 + a)\Theta + D\omega_0 u\Phi = 0,$$

oder wenn $u = iy$ gesetzt wird

$$(-y_\nu^2 + a)\Re(\Theta_\nu) - D\omega_0 y_\nu \Im(\Phi_\nu) = 0,$$

sowie

$$(-y_\nu^2 + a)\Im(\Theta_\nu) + D\omega_0 y_\nu \Re(\Phi_\nu) = 0.$$

Gelten diese Gleichungen für Θ_ν, Φ_ν, so gelten für $\Theta_{\nu+2}$, $\Phi_{\nu+2}$, weil ihnen $u = -iy$ entspricht

$$(-y_\nu^2 + a)\Re(\Theta_{\nu+2}) + D\omega_0 y_\nu \Im(\Phi_{\nu+2}) = 0,$$
$$(-y_\nu^2 + a)\Im(\Theta_{\nu+2}) - D\omega_0 y_\nu \Re(\Phi_{\nu+2}) = 0.$$

Also, wenn man die ersten und die zweiten Gleichungen addiert

$$\left.\begin{aligned}(-y_\nu^2 + a)\alpha_\nu + D\omega_0 y_\nu \lambda_\nu = 0\\ -(-y_\nu^2 + a)\beta_\nu + D\omega_0 y_\nu \varkappa_\nu = 0\end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Ist $\omega_0 = 0$, so folgt daraus entweder $y_\nu^2 = a$, α, β beliebig oder $\alpha = \beta = 0$, d. h.

Ist das Problem durch die Einführung geeigneter Koordinaten in der in Nr. 336 angegebenen Weise vereinfacht und findet weder Dämpfung noch Kreiselwirkung statt, so vollführen beide Koordinaten ganz unabhängig voneinander je eine Schwingung mit beliebiger Amplitude und Phase, wenn die Konstanten a und c beide positiv sind.

Durch einen eingebauten Kreisel werden hingegen beide Koordinaten gekoppelt, der Art, daß beide eine Bewegung machen, die aus einer Überlagerung beider Schwingungen besteht, die Amplituden und Phasen der zweiten Koordinate (λ, $\varkappa$) stehen jedoch mit denen der ersten Koordinate (α, β) in der Beziehung (1).

Der eingebaute Kreisel hat ferner die Wirkung, daß er die langsame Schwingung verlangsamt, die schnelle beschleunigt.

338. Fortsetzung: Brennans Einschienenbahn. 2. Seien nun a und c beide negativ oder null. Ist dann $\omega_0 = 0$, so ist

$$u_1^2 = -a; \quad u_2^2 = -c,$$

also sind von den zwei Wurzeln mindestens zwei positiv reell oder Null, die Gleichgewichtslage ist sicher instabil, ϑ, φ wachsen über alle Grenzen. Das gilt auch, wenn zwei Wurzeln Null sind, z. B. $a = 0$ ist. Denn man weist sofort aus den ursprünglichen Gleichungen nach, daß dann eine beliebige lineare Funktion von t Integral ist, das mit wachsendem t unendlich wird. Beide Koordinaten sind in diesem Falle nicht unabhängig voneinander.

Nun sei aber ein Kreisel eingebaut. Kann er die Bewegung stabilisieren?

Soll das der Fall sein, so muß jedenfalls die Quadratwurzel reell sein, denn wäre

$$u^2 = a + bi,$$
$$u = \pm\sqrt{a + bi},$$

so hätte sicher die eine dieser beiden Wurzeln einen positiv reellen Bestandteil. Es kann also nur Stabilität herrschen, wenn u rein imaginär ist, also u^2 reell und negativ. Folglich muß

$$|a + c + D^2\omega_0^2| > \sqrt{4ac}$$

sein. Aber es muß auch $a + c + D^2\omega_0^2 > 0$ sein, denn sonst wäre das erste Glied von u^2 positiv, und da das zweite Glied absolut kleiner ist als das erste, so wäre ein u^2 positiv. Also muß

$$a + c + D^2\omega_0^2 > 2\sqrt{ac}$$

sein,

$$D^2\omega_0^2 > 2\sqrt{ac} - a - c = (\sqrt{-a} + \sqrt{-c})^2,$$
$$D\omega_0 > \sqrt{-a} + \sqrt{-c}; \tag{2}$$

wo beide Wurzeln positiv zu nehmen sind.

Ist die Bedingung (2) erfüllt, so werden tatsächlich alle vier u rein imaginär, es kommen also kleine Schwingungen zustande, die Nullage ($\vartheta = \varphi = 0$) ist stabil.

Das Gleichheitszeichen von (2) genügt nicht; denn dann hat die determinierende Gleichung Doppelwurzeln, und es darf wohl der Satz als bekannt angesehen werden, daß falls $u = yi$ eine Doppelwurzel ist, $\cos yt$, $\sin yt$, aber auch $t \cos yt$ und $t \sin yt$ Integrale sind, und die beiden letzteren werden ja unendlich (vgl. Nr. 72, c).

Ein eingebauter Kreisel kann eine Gleichgewichtslage, für die an sich Instabilität hinsichtlich beider Koordinaten stattfindet (a *und* $c < 0$) *stabil machen; er muß nur so rasch rotieren, daß die Ungleichheit* (2) *erfüllt ist.*

(William Thomson hat allgemein bewiesen, daß man durch eingebaute Kreisel immer nur eine gerade Anzahl von Freiheitsgraden stabilisieren kann.)

Der Grenzfall, daß a oder c Null ist, läßt sich allerdings nicht stabilisieren, da dann zwei Wurzeln u Null werden, also eine lineare Funktion von t Integral ist.

Beispiel: die Brennansche Einschienenbahn (vgl. Nr. 280). Ist hier der Kreisel so montiert, wie auf dem Schiffe, so lassen sich die Gleichungen (I) aus Nr. 332 für den Schiffskreisel sofort herübernehmen. Nur ist hier $a < 0$, da das Fahrzeug an sich instabil ist, also muß auch $c < 0$ sein, d. h. der Schwerpunkt des Kreisels muß in der Normallage oberhalb der Drehachse des Rahmens liegen. Läuft der Kreisel dann so schnell, daß Bedingung (2) erfüllt ist, so steht der Wagen stabil aufrecht.

Nun ist allerdings die von Brennan vorgeschlagene Montierung eine andere. Der Rahmen dreht sich um eine vertikale Achse, der Kreisel im Rahmen um eine horizontale Querachse, d. h. es ist das Vorderrad eines Zweirades noch einmal als besonderes stabilisierendes Organ auf das Fahrzeug genommen. Der Leser mag nachweisen, daß die Gleichungen dieselben bleiben, nur daß $c = 0$ ist; da das aber nicht sein darf, so denkt sich Brennan (in seinen ersten Entwürfen) die erforderliche Kraft durch Menschenhand hervorgerufen, wie es ja beim Vorderrad des Zweirades auch der Fall ist. Ob aber die Anordnung wie beim Schiffskreisel als automatisch wirkend nicht vorzuziehen wäre? Wir werden sehen, daß gute Gründe dagegen sprechen (siehe Nr. 340). Auf die automatische Regulierung, wie sie später von Brennan und Scherl vorgeschlagen worden ist, können wir hier nicht weiter eingehen. Siehe etwa Klein-Sommerfeld Bd. IV.

339. Wirkung der Dämpfung auf an sich stabile Systeme. Sei das System an sich stabil, d. h. $a > 0$, $c > 0$. Multiplizieren wir dann die erste der beiden Bewegungsgleichungen mit $\dot{\vartheta}$, die zweite mit $\dot{\varphi}$ und integrieren, so erhalten wir das Integral der lebendigen Kraft

$$E + U + 2\int^{t} F \cdot dt = \text{const},$$

wo $E = \frac{1}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2)$, $U = \frac{1}{2}(a\vartheta^2 + c\varphi^2)$ und $F = \varrho\dot{\vartheta}^2 + 2\sigma\dot{\vartheta}\dot{\varphi} + \tau\dot{\varphi}^2$ die Dissipationsfunktion ist.

Da letztere stets positiv ist, so folgt

$$E + U \leqq \text{const},$$

und daraus läßt sich bei positiv definitem U, d. h. wenn U an der Stelle $\vartheta = \varphi = 0$ ein wahres Minimum hat, genau nach dem Dirichletschen Verfahren stets auf Stabilität schließen.

Aber noch mehr:

$\int^{t} F dt$ wächst beständig, also nimmt $E + U$ dauernd ab, also

Ist das System an sich stabil, so haben die Wurzeln der determinierenden Gleichung negativ reelle Bestandteile, die nicht null sind.

Ist keine der Wurzeln reell, was bei hinreichend kleiner Dämpfung der Fall sein wird — denn für fehlende Dämpfung sind sie ja rein imaginär —, so besteht die Bewegung einer jeden Koordinate aus zwei gedämpften Schwingungen.

340. Wirkung der Dämpfung auf an sich labile, durch Kreisel stabilisierte Systeme. Wir wollen beweisen, daß

an sich labile Systeme bei Vorhandensein von Dämpfung durch eingebaute Kreisel ***nicht*** *stabilisiert werden können* (Lord Kelvin).

Sei das System an sich labil, also $a < 0$, $c < 0$ — sonst ist ja Stabilisierung sicher unmöglich —, aber

$$D\omega_0^2 > \sqrt{-a} + \sqrt{-c},$$

so daß das System mit Kreisel bei fehlender Dämpfung stabil wäre. Nun hat aber der Koeffizient von u in der determinierenden Gleichung

$$a\tau + c\varrho$$

sicher ein negatives Zeichen ($\tau > 0$, $\varrho > 0$!).

Wir zeigen, daß es positiv sein müßte, wenn die determinierende Gleichung lauter Wurzeln mit negativ reellen Bestandteilen hätte.

Seien die Wurzeln zunächst alle konjugiert komplex:

$$-x_1 + iy_1, \quad -x_1 - iy_1, \quad -x_2 + iy_2, \quad -x_2 - iy_2,$$

und alle x positiv. Dann ist bekanntlich der in Rede stehende Koeffizient die negative Summe aller Produkte aus je drei verschiedenen Faktoren der vier Wurzeln. Bildet man diese Summe, so erhält man

$$x_1(x_2^2 + y_2^2) + x_2(x_1^2 + y_1^2),$$

und das ist tatsächlich positiv.

In analoger Weise beweist man den Satz, wenn nur zwei konjugiert komplexe und zwei reelle oder aber wenn vier reelle Wurzeln da sind.

Damit ist der zu Anfang dieser Nummer ausgesprochene Satz bewiesen. Die Bewegung kann also nicht stabil sein. Würde man daher ein Brennansches Fahrzeug mit einem stehenden Kreisel ausrüsten, so würde es sich langsam auf die Seite legen. Denn sind τ, ϱ klein, so werden natürlich auch die positiv reellen Bestandteile der Wurzeln klein sein.

Ein schwerer, auf der Spitze laufender Kreisel genügt für die Bewegung in der Nähe der aufrechten Lage genau denselben Gleichungen wie ein Fahrzeug mit stehendem Kreisel, man braucht ja nur die Masse des Rahmens und des Fahrzeugs Null zu setzen, um einen bloßen, stehenden Kreisel zu erhalten.

Ein schwerer auf der Spitze laufender Kreisel wird also jedenfalls infolge des Luftwiderstandes langsam umsinken.

Allerdings wird die wirkliche Bewegung noch ganz wesentlich durch Reibungserscheinungen an der Spitze modifiziert.

Auch ist angenommen, daß die Rotationsbewegung des Kreisels um seine Symmetrieachse ungeändert bleibt. Sie wird jedenfalls schwächer gedämpft als die anderen Bewegungen, weil sich der Kreisel (er ist als Rotationskörper gedacht) in sich dreht und dabei natürlich sehr wenig Widerstand erfährt.

Unter anderen Annahmen und auch mit anderem Resultat haben Klein und Sommerfeld den Einfluß des Luftwiderstandes behandelt (siehe Bd. III, Kap. VII, § 7).

Die allgemeine Theorie der kleinen Schwingungen wollen wir hiermit abschließen. Wegen weiterer Einzelheiten sei auf die Literatur verwiesen.

Die Methode der kleinen Schwingungen geht auf Lagrange zurück.

Die besten Ausführungen über kleine Schwingungen findet man sonst in dem schon oft genannten Werke von Routh, Bd. I, Kap. IX und Bd. II, Kap. II, III, VI, VII. Routh ist auch der erste gewesen, der kleine Schwingungen um einen Bewegungszustand (siehe unser elementares Beispiel in Nr. 67) in seiner Preisschrift: „On the stability of steady motion“ betrachtet hat.

Allerdings hatte schon vorher Maxwell sich mit Regulatorschwingungen beschäftigt (siehe die Literatur zum Regulatorproblem in Nr. 200).

Hurwitz hat in den Math. Annalen Bd. 46 die vollständigen Bedingungen dafür aufgestellt, wann die Wurzeln einer Gleichung negativ reelle Bestandteile haben.

Neuerdings ist ein kleines Buch von W. Hort erschienen: „Technische Schwingungslehre“, das zu einer ersten Einführung dienen kann.

Wir wenden uns jetzt noch zu einigen Anwendungen.

341. Das Problem von Glocke und Klöppel. Kann es vorkommen, daß Glocke und Klöppel so schwingen, daß kein Anschlag stattfindet? Dieses Problem stellte das Versagen der Kölner Kaiserglocke 1876.

Glocke und Klöppel bilden ein Doppelpendel. Die Bewegungsgleichungen für ein solches haben wir schon wiederholt aufgestellt (siehe Nr. 310 und 330); nehmen wir die Schwingungen klein — treten keine kleinen relativen Schwingungen des Klöppels gegen die Glocke ein, so treten auch sicherlich keine großen auf — und setzen wir

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{I}} + m_{\mathrm{II}} c^2 &= A, \\ m_{\mathrm{II}} c b &= B, \\ T_{\mathrm{II},s} + m_{\mathrm{II}} b^2 &= C, \end{aligned}$$

a statt $m_{\mathrm{I}} g a + m_{\mathrm{II}} g c$, c statt $m_{\mathrm{II}} g b$, so lauten die Gleichungen

$$A\ddot{\vartheta} + B\ddot{\varphi} + a\vartheta = 0,$$
$$B\ddot{\vartheta} + C\ddot{\varphi} + c\varphi = 0.$$

Setzen wir $\vartheta = \Theta e^{ut}$, $\varphi = \Phi e^{ut}$ an, so bekommen wir die charakteristische Gleichung

$$u^4(AC - B^2) + u^2(Ac + aC) + ac = 0.$$

Es gibt zwei reelle ungedämpfte Schwingungen, deren Schwingungsdauern

$$\frac{2\pi}{y_1} \text{ für die langsame,}$$

$$\frac{2\pi}{y_2} \text{ für die schnellere}$$

sind, wo

$$y_1^2 = \frac{Ac + aC}{2(AC - B^2)} - \frac{1}{2(AC - B^2)}\sqrt{(Ac - aC)^2 + 4acB^2},$$

$$y_2^2 = \frac{Ac + aC}{2(AC - B^2)} + \frac{1}{2(AC - B^2)}\sqrt{(Ac - aC)^2 + 4acB^2}.$$

Setzt man demnach

$$\vartheta = (\alpha_1 \cos y_1 t + \beta_1 \sin y_1 t) + (\alpha_2 \cos y_2 t + \beta_2 \sin y_2 t),$$
$$\varphi = (\varkappa_1 \cos y_1 t + \lambda_1 \sin y_1 t) + (\varkappa_2 \cos y_2 t + \lambda_2 \sin y_2 t),$$

so bestehen zwischen α_ν und $\varkappa_\nu$, ebenso aber zwischen β_ν und λ_ν die Gleichungen, die man durch Einsetzen in die erste Bewegungsgleichung erhält und die den allgemeinen Gleichungen (1) aus Nr. 337 entsprechen

$$\left.\begin{aligned} \alpha_\nu(-Ay_\nu^2 + a) - \varkappa_\nu B y_\nu^2 = 0, \\ \beta_\nu(-Ay_\nu^2 + a) - \lambda_\nu B y_\nu^2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

Soll nun bei einer Schwingung keine relative Bewegung zustande kommen, so muß dauernd

$$\vartheta = \varphi$$

sein. Bei der langsamen Schwingung etwa gibt das

$$\alpha_1 = \varkappa_1$$

und

$$\beta_1 = \lambda_1.$$

Beide Gleichungen bedingen nach (a) die eine

$$(A + B)y_1^2 - a = 0.$$

Man kann darin den obigen Wert von y_1^2 einsetzen. Bequemer verfährt man jedoch so, daß man die aus der zweiten Bewegungsgleichung resultierenden Gleichungen

$$-\alpha_\nu B y_\nu^2 + \varkappa_\nu(-C y_\nu^2 + c) = 0$$

hinzunimmt, die für $\alpha_1 = \varkappa_1$ ergeben

$$(B + C) y_1^2 - c = 0.$$

Eliminiert man aus ihr und aus

$$(A + B) y_1^2 - a = 0$$

y_1^2, so erhält man

$$(B + C) a - (A + B) c = 0.\text{[1]}$$

Führt man die ursprünglichen Bedeutungen von A, B, C, a, c ein und setzt

$$T_{\mathrm{I}} = m_{\mathrm{I}} a \cdot l_{\mathrm{I}},$$
$$C = m_{\mathrm{II}} b \cdot l_{\mathrm{II}},$$

wo l_{I}, l_{II} die reduzierten Pendellängen beider Körper sind, so lautet die vorstehende Gleichung nach dem Abstande c der beiden Drehpunkte aufgelöst

$$c = \frac{l_{\mathrm{II}} - l_{\mathrm{I}}}{1 + \frac{m_{\mathrm{II}}}{m_{\mathrm{I}}} \frac{l_{\mathrm{II}} - b}{a}}.$$

Man wird, weil $m_{\mathrm{I}} \gg m_{\mathrm{II}}$, den Nenner gleich 1 setzen dürfen und erhält somit sicheres Versagen der Glocke, wenn

$$c \doteq l_{\mathrm{II}} - l_{\mathrm{I}}$$

ist.

Nun war, als man nachmaß, tatsächlich bei der Kaiserglocke $l_{\mathrm{II}} - l_{\mathrm{I}} = 65{,}3$ cm, dagegen $c = 66{,}7$ cm. Durch zweckentsprechende Abänderung der Masse konnte die Glocke zum Läuten gebracht werden (siehe Veltmann: „Über die Bewegung einer Glocke" in Dinglers polytechn. Journal, Bd. 220, 1876).

342. Erledigung eines Einwandes. Man kann gegen die vorstehende Veltmannsche Theorie einwenden, daß sich nur bei einer Schwingung Glocke und Klöppel wie ein starrer Körper bewegen, daß es aber bei der anderen anders sein könnte. Tatsächlich werden wir sehen, daß sich gerade beim Erfülltsein der Bedingung

$$(B + C) a - (A + B) c = 0$$

---

1) Diese Gleichung kann auch direkt aus den Bewegungsgleichungen erhalten werden; setzt man in diese $\vartheta = \varphi$, so geben beide Gleichungen nur dann nicht $\vartheta = \varphi = 0$, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} A + B & a \\ B + C & c \end{vmatrix} = 0$$

ist

nur bei der langsamen Schwingung kein Anschlagen, bei der schnellen Schwingung hingegen eine besonders starke relative Bewegung ausbildet.

Denn ist obige Bedingung erfüllt, also

$$aC - Ac = B(c - a),$$

so folgt

$$y_1^2 = \frac{c}{B + C},$$

wie es sein muß, wenn für die langsame Schwingung kein Anschlag stattfinden soll, dagegen

$$y_2^2 = \frac{ac}{Ca - Bc}.$$

Dafür aber berechnet sich

$$\frac{\lambda_2}{\beta_2} = \frac{\varkappa_2}{\alpha_2} = \frac{a - A y_2^2}{B y_2^2} = -\frac{a}{c} < 0,$$

d. h. die *Schwingung des Klöppels ist gerade um eine halbe Schwingung gegen die der Glocke zurück.* Schlägt die Glocke links aus, so pendelt der Klöppel nach rechts und umgekehrt.

Denn ist

$$\vartheta = \gamma \sin(y_1 t + \varepsilon),$$

so ist

$$\varphi = \frac{a}{c} \gamma \sin(y_2 t + \varepsilon - \pi).$$

Es mußte also möglich sein, durch eine geeignete Antriebsvorrichtung die Kaiserglocke zum Läuten zu bringen. (Ob allerdings die schnelle Schwingung der Absicht entsprochen hätte, ist eine andere Frage.) Wir wollen uns noch überzeugen, daß eine Antriebsvorrichtung, die mit der primitiven Art des Läutens große Ähnlichkeit hat, die schnelle Schwingung nicht hervorruft.

Wir denken uns die Glocke durch einen ersten Zug am Seil in einen gewissen Ausschlag ϑ_0 gebracht, während der Klöppel nur eine Parallelbewegung gemacht habe, d. h. φ wesentlich Null geblieben sei. Dann lassen wir das System los. Welche Bewegung wird eintreten?

Aus den Anfangsbedingungen $\vartheta = \vartheta_0$, $\varphi = 0$, $\dot\vartheta = 0$, $\dot\varphi = 0$ folgen für die α, β, $\varkappa$, λ die Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= \vartheta_0, \\ \varkappa_1 + \varkappa_2 &= 0, \\ \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 &= 0, \\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Dazu kommen die Gleichungen zwischen α, $\varkappa$, denen auch β, λ genügen, und die sich in dem angenommenen Sonderfall, wo

$$aC - Ac = B(c - a)$$

ist, auf

$$\varkappa_1 = \alpha_1,$$

$$\beta_1 = \lambda_1,$$

$$\varkappa_2 = -\frac{a}{c}\alpha_2,$$

$$\lambda_2 = -\frac{a}{c}\beta_2$$

reduzieren.

Man erkennt sofort, daß alle β, λ Null sind, während sich

$$\varkappa_1 = -\varkappa_2$$

und infolgedessen

$$\alpha_1 = \frac{a}{c}\alpha_2$$

ergeben.

Man bekommt also für die Glocke

$$\vartheta = \alpha_2\left(\frac{a}{c}\cos y_1 t + \cos y_2 t\right),$$

für den Klöppel

$$\varphi = \varkappa_2(-\cos y_1 t + \cos y_2 t).$$

Nun ist a wesentlich größer als c. Denn es war a statt $m_{\mathrm{I}}ga + m_{\mathrm{II}}gc$, dagegen c statt $m_{\mathrm{II}}gb$ gesetzt und es ist $m_{\mathrm{I}} \gg m_{\mathrm{II}}$, während a, b von derselben Größenordnung sein werden.

Während also beim Klöppel beide, die schnelle und die langsame Schwingung gleich stark einsetzen werden, wird an der Glocke nur die langsame Schwingung deutlich erkennbar sein.

Ist nun die Bewegung mit diesem Vorwiegen der langsamen Schwingung eingeleitet, so wird der Mann am Strang im langsamen, für ihn fühlbaren Rhythmus weiterziehen und infolgedessen nach den bekannten (siehe Nr. 76) Resonanzerscheinungen die langsame Schwingung das ganz entschiedene Übergewicht erhalten.

Wendet man aber ein Läutewerk an, das von vornherein mit der schnellen Schwingung in Resonanz gesetzt ist, so unterliegt es keinem Zweifel, daß die schnelle Schwingung in lebhaftem Maße eintreten und also die Glocke erklingen wird.

343. Ein anderer Spezialfall des Doppelpendels hat noch besonderes Interesse: der Fall nämlich, daß der angehängte Körper klein ist gegen den anderen ($m_{\mathrm{II}} \ll m_{\mathrm{I}}$), während die Eigenschwingungen beider Pendel nahezu übereinstimmen. Man kann dann mit Vernachlässigung von $m_{II}c^2$ gegen T_I setzen

$$A = T_I = m_I a \cdot l_I,$$
$$C = m_{II} b \cdot l_{II},$$

wo l_I und l_{II}, die reduzierten Pendellängen, fast einander gleich sind, des weiteren für a angenähert $m_I g a$ setzen, während c gleich $m_{II} g b$ bleibt.

Dann ist wegen

$$B = m_{II} c b$$

$$(Ac - Ca)^2 + 4acB^2 = [m_I m_{II} g a b (l_I - l_{II})]^2 + 4 m_I m_{II}^3 g^2 a b^3 c^2,$$

und das ist klein gegen

$$(Ac + Ca)^2 = [m_I m_{II} g a b (l_I + l_{II})]^2,$$

weil

$$l_I - l_{II} \ll l_I + l_{II}$$

und weil

$$m_{II} \ll m_I.$$

Infolgedessen werden sich y_1 und y_2 nur wenig voneinander unterscheiden: man kann setzen

$$y_2 = y_1 + \varepsilon,$$

wo ε klein ist gegen y_1.

Es wird also ϑ ebenso wie φ aus der Überlagerung zweier Schwingungen von wenig verschiedener Periode bestehen:

$$\vartheta = \alpha_1 \cos y_1 t + \beta_1 \sin y_1 t + \alpha_2 \cos(y_1 t + \varepsilon t) + \beta_2 \sin(y_1 t + \varepsilon t).$$

Indem man $\cos(y_1 t + \varepsilon t)$ in $\cos y_1 t \cos \varepsilon t - \sin y_1 t \sin \varepsilon t$ zerlegt und analog $\sin(y_1 t + \varepsilon t)$, kann man schreiben

$$\vartheta = a \cos y_1 t + b \sin y_1 t \equiv c \sin(y_1 t + \eta),$$

wo

$$a = \alpha_1 + \alpha_2 \cos \varepsilon t + \beta_2 \sin \varepsilon t,$$
$$b = \beta_1 - \alpha_2 \sin \varepsilon t + \beta_2 \cos \varepsilon t$$

oder

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$= \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 + 2(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)\cos \varepsilon t + 2(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)\sin \varepsilon t}.$$

Man kann also die Bewegung bei wenig verschiedenen Perioden auffassen als eine einzige Schwingung von derselben Periode, deren Amplitude aber langsam, nämlich mit der Periode $\frac{2\pi}{\varepsilon}$ zwischen einem größten und kleinsten Werte hin- und herschwankt.

Der größte Wert von c ist gegeben durch

$$c_m^4 = (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2)^2 + 4(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)^2 + 4(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2,$$

der kleinste durch

$$\begin{aligned} c_\mu^4 &= (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2)^2 - 4(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)^2 - 4(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 \\ &= (\alpha_1^2 + \beta_1^2 - \alpha_2^2 - \beta_2^2)^2. \end{aligned}$$

Richtet man es also so ein (durch passende Wahl der Anfangswerte), daß nahezu $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2$ ist, so wird jedes Pendel bald fast ganz stillzustehen scheinen, bald sich in heftigen Schwingungen befinden. Das andere Pendel macht die umgekehrte Bewegung,

denn die gesamte Energie muß ja erhalten bleiben und die potentielle Energie kann ja nur dann beträchtliche Wertdifferenzen zeigen, wenn die kinetische Energie erheblich ist. Dieses eigentümliche Alternieren beider Pendel läßt sich leicht experimentell dartun. In der Akustik nennt man die entsprechende Erscheinung, die beim Anschlagen zweier fast gleicher Töne auftritt und ein langsames An- und Abschwellen des Tones darstellt, Schwebung. Verwandt hiermit ist die Erscheinung sogenannter sympathischer Pendel. Die Aufhängepunkte zweier Pendel von fast gleicher Schwingungsdauer gehören einem elastischen, aber festen Material von geringer Masse an. Dieses wird die Schwingungen von dem einen Pendel, das man etwa angestoßen hat, auf das andere, das zu Anfang ruhte, übertragen bis dieses schwingt und das erste zu Ruhe kommt. Dann kehrt sich der Vorgang um: es findet ein beständiges Hin- und Herwandern der Schwingungsenergie statt.

344. Anwendung auf den Schiffskreisel. Wir haben den Schiffskreisel schon früher besprochen und die Differentialgleichungen der Bewegung aufgestellt (siehe Nr. 332 und 332a):

$$T\ddot{\varphi} - C\omega_0\dot{\vartheta} + 2\varrho\dot{\varphi} + a\varphi = \begin{cases} 0 \\ p \sin \nu t \end{cases}$$

$$A\ddot{\vartheta} + C\omega_0\dot{\varphi} + 2\tau\dot{\vartheta} + c\vartheta = 0$$

(φ Schiff, ϑ Kreisel).

Die allgemeine Theorie lehrte, daß von den beiden resultierenden Schwingungen durch den Schiffskreisel die langsame noch verlangsamt, die schnellere dagegen beschleunigt wird, wenn keine Dämpfung vorhanden ist. Nun hemmt Dämpfung eine jede Bewegung, sie wird also ihrerseits beide Schwingungen etwas verlangsamen.

Ferner ist wohl an sich klar und kann auch ähnlich wie bei Glocke und Klöppel bewiesen werden, daß bei einem Anstoß das Schiff hauptsächlich die Schwingung ausführen wird, die bei Anwachsen des ω_0 von Null an stetig aus der Eigenschwingung des

Schiffes (d. i. Schwingung ohne Kreisel und ohne Dämpfung) hervorgeht, deren Schwingungsdauer also durch

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{x_1}$$

gegeben ist, wo $x_1 = \sqrt{\frac{a}{T}}$.

Soll also vor allem einmal der Schiffskreisel die angenehme Wirkung haben, die Rollbewegung des Schiffes zu verlangsamen, so muß die Eigenschwingung des Kreisels rascher erfolgen als die des Schiffes, oder es muß

$$x_2 > x_1$$

sein, wo $x_2 = \sqrt{\frac{c}{A}}$.

Bei einem von Schlick angegebenen Beispiel ist

$$x_1^2 = 2{,}3, \quad x_2^2 = 4{,}7, \quad \tau_1 = \frac{2\pi}{2x_1} = 4{,}14 \text{ Sek.},$$

während die Schwingungsdauer bei Kreiselwirkung auf 6 Sek. heraufging. Bei einem von Föppl durchgearbeiteten Beispiel sind die Zahlen 0,16, 3,3, 15 Sek. und 19 bis 22 Sek je nach Dämpfung.

Die determinierende Gleichung (siehe Nr. 335) lautet

$$u^4 TA + 2u^3(T\tau + \varrho A) + u^2(Tc + aA + 4\varrho\tau + D^2\omega_0^2) \\ + 2u(\varrho c + a\tau) + ac = 0;$$

bei Vernachlässigung der Reibung, wenn wir noch

$$\frac{D^2\omega_0^2}{TA} = \gamma^2 = \gamma_1\gamma_2 \quad \left(\text{wo } \frac{D\omega_0}{T} = \gamma_1\right)$$

setzen, bekommen wir für $-u^2$ die beiden Werte

$$y_1^2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \gamma^2) - \frac{1}{2}\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \gamma^2)^2 - 4x_1^2x_2^2}$$

für die langsame und

$$y_2^2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \gamma^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \gamma^2)^2 - 4x_1^2x_2^2}$$

für die schnelle Schwingung. Setzen wir wieder

$$\varphi = \sum_{1,2}\alpha_\nu \cos y_\nu t + \sum_{1,2}\beta_\nu \sin y_\nu t,$$

$$\vartheta = \sum_{1,2}\varkappa_\nu \cos y_\nu t + \sum_{1,2}\lambda_\nu \sin y_\nu t,$$

so erhält man durch Einsetzen in die Bewegungsgleichungen zwischen den α, $\varkappa$, β, λ die Beziehungen:

$$(-y_\nu^2 + x_1^2)\alpha_\nu - \gamma_1\lambda_\nu y_\nu = 0,$$
$$(-y_\nu^2 + x_1^2)\beta_\nu + \gamma_1\varkappa_\nu y_\nu = 0.$$

Wir wollen nun weiter zeigen, daß jedenfalls der Kreisel die Wirkung eines einzelnen Wellenschlages abschwächt.

Zu dem Zwecke lösen wir das Impulsproblem: Ein Drehstoß D treffe das Schiff, welche Bewegung tritt ein?

Da mit den getroffenen Annähernngen

$$E = \frac{1}{2}(T\dot{\varphi}^2 + A\dot{\vartheta}^2),$$

so ist

$$P_\varphi = T\dot{\varphi} \quad \text{und} \quad P_\vartheta = A\dot{\vartheta},$$

also

$$T\dot{\varphi} = D,$$
$$A\dot{\vartheta} = 0,$$

woraus sich die Anfangswerte

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{D}{T}, \quad \dot{\vartheta} = 0$$

ergeben, die zusammen mit

$$\varphi_0 = 0, \quad \vartheta_0 = 0$$

genügen, die Konstanten α, β, γ, λ des Schwingungsproblems zu berechnen.

Aus

$$\varphi = \Sigma(\alpha_\nu \cos y_\nu t + \beta_\nu \sin y_\nu t)$$

und

$$\vartheta = \Sigma(\varkappa_\nu \cos y_\nu t + \lambda_\nu \sin y_\nu t)$$

und den Anfangsbedingungen folgen

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0,$$
$$\varkappa_1 + \varkappa_2 = 0,$$
$$\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 = \frac{D}{T},$$
$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0,$$

Gleichungen, die zusammen mit den Bedingungen zwischen den α, $\varkappa$ und β, λ:

$$(-y_\nu^2 + x_1^2)\alpha_\nu - \gamma_1\lambda_\nu y_\nu = 0,$$
$$(-y_\nu^2 + x_1^2)\beta_\nu + \gamma_1\varkappa_\nu y_\nu = 0$$

zeigen, daß alle α und λ Null sind, während sich die Amplituden β_1 und β_2 der beiden Schwingungen des Schiffes zu

$$\beta_1 = \frac{D}{a} y_1 \frac{y_2^2 - x_1^2}{y_2^2 - y_1^2},$$

$$\beta_2 = \frac{D}{a} y_2 \frac{x_1^2 - y_1^2}{y_2^2 - y_1^2}$$

berechnen.

Wegen

$$y_2^2 > x_2^2 > x_1^2 > y_1^2$$

sind β_1 und β_2 beide positiv.

Das Schiff bewegt sich nun nach der Gleichung

$$\varphi = \beta_1 \sin y_1 t + \beta_2 \sin y_2 t$$

weiter. Der höchste Wert, den der Ausschlag des Schiffes danach erreichen kann, ist $\beta_1 + \beta_2$ und im allgemeinen, wenn nämlich y_1 und y_2 in keinem rationalen Verhältnis zueinander stehen, kann der Ausschlag diesem Maximum auch beliebig nahe kommen. Denn man braucht nur einen solchen Wert t zu suchen, daß $y_1 t$ nahe bei $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, dagegen $y_2 t$ nahe bei $\frac{\pi}{2} + 2m\pi$ liegt, wo n, m irgend zwei ganze Zahlen sind. Das geht aber: man setze direkt

$$t = \frac{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}{y_1},$$

dann wird

$$y_2 t - \left(\frac{\pi}{2} + 2m\pi\right) = \frac{y_2}{y_1}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) - \left(\frac{\pi}{2} + 2m\pi\right),$$

soll das eine kleine Größe sein, so muß auch

$$(4n + 1)y_2 - (4m + 1)y_1$$

eine kleine Größe sein. Ist nun $y_1 : y_2$ nicht rational, so kann man zwei ganze Zahlen m und n so bestimmen, daß $(4n + 1)y_2 - (4m + 1)y_1$ beliebig klein wird. Man braucht ja nur einen Annäherungswert der Form $\frac{4m+1}{4n+1}$ für $\frac{y_2}{y_1}$ zu suchen. Daß es solche in beliebiger Schärfe gibt, ist klar, denn es gibt unzählige und beliebig scharfe der Form $\frac{4m \pm 1}{4n \pm 1}$. Hat man aber m, n hinreichend groß genommen, und ist z. B. $\frac{4m-1}{4n+1}$ ein Näherungswert, so ist es auch $\frac{4m+1}{4n+1}$. Also ist

$$\operatorname{Max} \varphi = \beta_1 + \beta_2 = \frac{D}{a} \frac{x_1^2 + y_2 y_1}{y_2 + y_1} = \frac{D}{a} x_1 \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2},$$

da ja $y_1 y_2 = x_1 x_2$ ist.

Läuft der Kreisel nicht, so ist $x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$, also der maximale Ausschlag $\frac{D}{a} x_1$; mithin verkleinert der Kreisel den Ausschlag im Verhältnis $x_1 + x_2 : y_1 + y_2$ und das ist in der Tat ein echter Bruch, denn es ist

$$y_1^2 + y_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + \gamma^2,$$

also wegen $y_1 y_2 = x_1 x_2$

$$(y_1 + y_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 + \gamma^2,$$

woraus $y_1 + y_2 > x_1 + x_2$ folgt.

Damit ist die ausgesprochene Behauptung erwiesen: Der Kreisel schwächt die Wirkung eines einzelnen Wellenschlags im Verhältnis $(x_1 + x_2) : (y_1 + y_2)$ ab.

345. Weiteres über den Schiffskreisel. Wie wirkt nun der Schiffskreisel bei kontinuierlichem Wellengang, d. h. wie wirkt er auf die durch Wogen erzwungene Schwingung, wenn wir annehmen, daß die Wogen ein periodisch schwankendes Drehmoment $p \sin \nu t$ auf das Schiff ausüben?

Um diese erzwungene Schwingung, d. h. ein Integral der durch das Glied $p \sin \nu t$ inhomogen gemachten Differentialgleichungen zu finden, machen wir analog wie in Nr. 75 den Ansatz

$$\varphi = \Phi \sin (\nu t + \varepsilon),$$
$$\vartheta = \Theta \sin (\nu t + \eta).$$

Gehen wir damit in die Differentialgleichungen hinein, so erhalten wir vier gewöhnliche Gleichungen für Φ, Θ, ε, η, aus denen sich diese vier Größen in der Tat berechnen lassen. Uns interessieren Φ und Θ. Die angegebene elementare Rechnung ergibt

$$\Phi = \frac{p}{a} x_1^2 \frac{\sqrt{(\nu^2 - x_2^2)^2 + 4\nu^2\lambda'^2}}{\sqrt{N}},$$

$$\Theta = \frac{p}{a} x_1^2 \sqrt{\frac{T}{A}} \frac{\gamma\nu}{\sqrt{N}}.$$

Dabei ist

$$2\lambda = \frac{2\varrho}{T},$$

$$2\lambda' = \frac{2\tau}{A}$$

und

$$N = [(\nu^2 - x_1^2)(\nu^2 - x_2^2) - \nu^2\gamma^2]^2 + 4\nu^2\lambda'^2(\nu^2 - x_1^2)^2 + 4\nu^2\lambda^2(\nu^2 - x_2^2)^2$$
$$+ 8\nu^4\gamma^2\lambda\lambda' + 16\nu^4\lambda^2\lambda'^2.$$

Wir haben hier die Dämpfung als ein wesentliches Moment mit berücksichtigt. Namentlich die Dämpfung des Kreisels ist gewöhnlich recht groß, gewöhnlich ist sogar $\lambda' > x_2$, also der Kreisel aperiodisch gedämpft. Diese starke Dämpfung hat den weiteren Effekt, daß die freien Schwingungen, die zu der soeben berechneten erzwungenen hinzukommen, und mit ihr zusammen die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen darstellen, rasch abklingen, so daß wir uns nur um die erzwungene Schwingung zu kümmern brauchen.

Nun definieren wir einen Wirkungsfaktor ϱ des Kreisels auf das Schiff, indem wir setzen

$$\varrho = \frac{\Phi}{\Phi_{\gamma=0}} = \frac{\sqrt{N_0}}{\sqrt{N}} = \frac{\sqrt{(\nu^2 - x_1^2)^2 + 4\nu^2\lambda^2} \cdot \sqrt{(\nu^2 - x_2^2)^2 + 4\nu^2\lambda'^2}}{\sqrt{N}}.$$

$\Phi_{\gamma=0}$ heißt dabei die Amplitude der erzwungenen Schwingung bei festgestelltem Kreisel ($\gamma = 0$).

Soll der Kreisel günstig wirken, so muß $\varrho < 1$ sein. Suchen wir deshalb die Stellen, wo $\varrho = 1$ ist.

Man sieht, daß das zunächst zutrifft für $\nu = 0$ und $\nu = \infty$. Außerdem aber noch, wenn

$$(\nu^2 - x_1^2)(\nu^2 - x_2^2) - \nu^2\left(\frac{1}{2}\gamma^2 + 4\lambda\lambda'\right) = 0,$$

d. h.

$$\nu^4 - \nu^2\left(x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 + 4\lambda\lambda'\right) + x_1^2 x_2^2 = 0$$

ist.

Diese Gleichung hat nun für ν^2 zwei reelle positive Wurzeln: ν_1^2 und ν_2^2 — es sei ν_2^2 die größere — welche das Intervall x_1 bis x_2 in sich schließen: es ist

$$\nu_2^2 > x_2^2 > x_1^2 > \nu_1^2$$

und das Intervall ν_1^2 bis ν_2^2 ist um so größer, je größer

$$\frac{1}{2}\gamma^2 + 4\lambda\lambda',$$

d. h. je stärker die Kreiselwirkung und die Dämpfung ist.

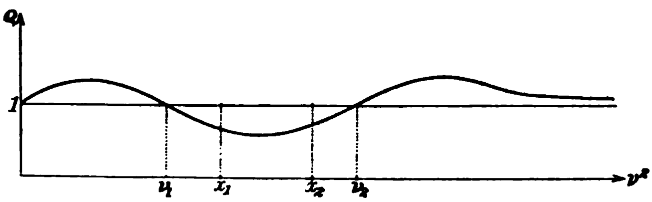


Fig. 251.

Man sieht endlich leicht ein, daß für

$$\nu_1^2 < \nu^2 < \nu_2^2$$

$\varrho < 1$, sonst aber $\varrho > 1$ ist.

Nicht für jede Wellenbewegung ist die Kreiselwirkung günstig, sondern nur für Wellen in einem gewissen Intervall ihrer Schwingungsdauer, das die Schwingungszeiten des Schiffes und des Kreisels umfaßt und zwar um so stärker umfaßt, je größer die Kreiseldrehung und die Dämpfung ist.

Da die Dämpfung λ des Schiffs gewöhnlich klein ist, während λ' groß gehalten wird, und da für $\nu = x_1$

$$\varrho = \frac{2x_1\lambda\sqrt{(x_1^2 - x_2^2)^2 + 4x_1^2\lambda'^2}}{\sqrt{x_1^4\gamma^4 + 4x_1^2\lambda^2((x_1^2 - x_2^2)^2 + 4x_1^2\lambda'^2) + 8x_1^4\gamma^2\lambda\lambda'}}$$

klein wird, so ist in diesem Falle die Kreiselwirkung besonders günstig. $\nu = x_1$ ist aber der Fall der Resonanz, d. h. der Fall, in dem die eigene Rollperiode des Schiffes mit der Schwingungsdauer der Wellen übereinstimmt, in dem also an sich ein besonders heftiges Rollen des Schiffes zu erwarten steht.

Bei Resonanz zwischen der Rollbewegung des Schiffes und der Wellenbewegung, bei der also an sich das Schiff besonders heftig rollen würde, ist die Kreiselwirkung besonders vorteilhaft.

Die ganz frappierende Wirkung des Kreisels in dem von Schlick erprobten Beispiel — die Ausschläge gingen von 18° auf fast 1° zurück — scheint auf einer angenäherten Realisierung dieses Falles zu beruhen. Denn der auffallend kurzen Periode von 4,14 Sek. entspricht in tiefem Wasser eine Wellenlänge von etwa 100 engl. Fuß also ca. 30 m, eine plausible Zahl für Wellen in der Nähe der Küste. (Siehe Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, S. 431.)

Literatur zum Schiffskreisel. Schlick selbst hat nur kurze Mitteilungen über Konstruktion und Erfolge seines Kreisels gemacht, siehe Zeitschr. d. V. d. I. 1906, sowie Jahrbuch der schiffbautechnischen Gesellschaft 1909, Föppl (Z. d. V. d. I. 1904, siehe auch die neueste Auflage seines Lehrbuches) und Lorenz (Physikalische Zeitschrift 1903) entwickeln die Theorie der freien Schwingungen. Ende 1910, als das Manuskript dieses Buches fertiggestellt war, erschien die vierte Lieferung von Klein-Sommerfeld, „Theorie des Kreisels", in der sich eine ganz ausführliche Diskussion der Theorie und Wirkungsweise des Schiffskreisels sowie sonstiger technischer Anwendungen des Kreisels findet. Unsere obigen Resultate sind auch dort zu lesen. Siehe auch Enzyklopädie IV, 10 (v. Mises).

Kapitel XII.

Einleitung in die Kinetik deformierbarer Systeme.

§ 58. Faden und Seil.

346. Bewegungsgleichungen des vollkommen biegsamen Seiles. Wir betrachten einen Faden oder ein Seil, d. h. wie schon früher ausgeführt, einen Körper mit ausgezeichneter Mittellinie, die jede Gestalt annehmen kann. Auch mögen sich die äußern Kräfte, die an einem durch Querschnitte bestimmten unendlich kleinen Stücke des Seiles angreifen, auf Kräfte $d\bar{k} = \bar{\varkappa} ds$ an dem Element ds der Mittellinie reduzieren lassen.

Das Seil heißt dann vollkommen biegsam, wenn die Spannungen des Querschnitts, auf den Schnittpunkt mit der Mittellinie reduziert, weder ein Biegungsmoment noch ein Torsionsmoment haben.

Man beweist dann genau wie früher, daß auch keine Schubkraft da sein kann, sondern nur eine Spannung in Richtung des Seils. Man sieht sofort ein, daß eine Gestalt des Seiles nur dann stabil sein kann, wenn die Spannung ein Zug ist, da sonst bei der geringsten Störung Knickung eintreten würde. Die Zugspannung heiße $\bar{S}$. Betrachten wir nun ein Stück ds des Seiles, so gibt die Newtonsche Grundgleichung für dieses Stück

$$\mu ds \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{\varkappa} ds + \bar{S} + d\bar{S} - \bar{S}$$

oder

$$\mu \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{\varkappa} + \frac{d\bar{S}}{ds} \tag{I}$$

als Bewegungsgleichung des Seiles.

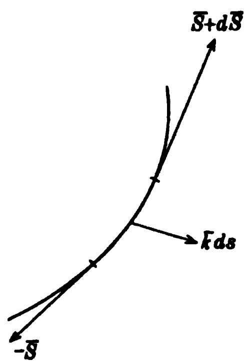


Fig. 252.

Ist das Seil unausdehnbar, so ist S eine unbekannte Reaktionskraft, andernfalls ist S eine experimentell zu bestimmende Funktion physikalischer Größen und insbesondere von der Ausdehnung des Seiles gegenüber dem Normalzustande ($S = 0$) abhängig.

Schwerpunkt- und Momentensatz sind jetzt schon von selbst für jedes endliche Stück erfüllt.

Denn zunächst folgt aus (I) nach Multiplikation mit dem Längenelement ds und Integration über ein beliebiges Stück $1 \ldots 2$ des Seils ($\mu ds = dm!$)

$$m\bar{w}^* \equiv \int_1^2 \mu \frac{d\bar{v}}{dt} ds = \int_1^2 \bar{\varkappa} ds + \bar{S}_2 - \bar{S}_1 .$$

Da jetzt rechts lauter äußere Kräfte stehen, haben wir den Schwerpunktsatz gewonnen.

Ebenso ergibt sich

$$\int_1^2 dm\,\overline{r\dot{w}} = \int_1^2 \overline{r\varkappa}\,ds + \int_1^2 \overline{r\frac{dS}{ds}}\,ds.$$

Nun ist aber wegen

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} = \bar{\sigma},$$

wo $\bar{\sigma}$ der Einheitsvektor in Richtung der Tangente, und wegen

$$\overline{\sigma S} = 0$$

das letzte Integral

$$\int \overline{r\frac{dS}{ds}}\,ds = \overline{rS}\Big|_1^2$$

und wir haben auch den Momentensatz:

$$\int_1^2 dm\,\overline{r\dot{w}} = \int_1^2 \overline{r\varkappa}\,ds + \overline{rS}\Big|_1^2.$$

347. Stationäre Bewegung. Ein Faden bewege sich in sich weiter, d. h. in einer festen Raumkurve. Dann kann man s als Bogenlänge dieser Raumkurve auffassen und $\bar{v}$ als Funktion von s und der Zeit t, d. h. des Ortes und der Zeit, statt wie bisher des Massenteilchens und der Zeit.

Differentiation nach t bei festgehaltenem Orte werde nun stets durch $\frac{\partial}{\partial t}$ bezeichnet.

Nun ist

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\bar{v}(s,t) = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial s}v.$$

Wir nennen die Bewegung stationär, wenn $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = 0$ ist, d. h. wenn die Geschwindigkeit an Ort und Stelle dauernd dieselbe ist, welches Massenteilchen auch immer den Ort passiert.

Für die stationäre Bewegung des Fadens in sich lautet also die Bewegungsgleichung

$$\mu\frac{\partial \bar{v}}{\partial s}\cdot v = \bar{\varkappa} + \frac{d\bar{S}}{ds}. \tag{II}$$

Setzt man noch $\bar{v} = v\cdot\bar{\sigma}$ und ebenso $\bar{S} = S\cdot\bar{\sigma}$, wo $\bar{\sigma}$ der Einheitsvektor in Richtung der Bahn ist, und beachtet, daß

$$\frac{\partial \sigma}{\partial s} = \frac{1}{\varrho}\bar{\nu}$$

war, wo $\bar{\nu}$ den Einheitsvektor der Hauptnormalen, ϱ den Krümmungsradius bedeutet (siehe Nr. 26), so zerlegt sich die Bewegungsgleichung nach dem natürlichen Koordinatensystem, bestehend aus Tangente ($\bar{\sigma}$), Normale ($\bar{\nu}$) und Binormale ($\bar{\nu}'$) der Bahn in

$$\left.\begin{aligned} \mu v \frac{\partial v}{\partial s} &= \varkappa_\sigma + \frac{dS}{ds} \\ \mu \frac{v^2}{\varrho} &= \varkappa_\nu + S \frac{1}{\varrho} \\ 0 &= \varkappa_{\nu'} \end{aligned}\right\} . \tag{II'}$$

Ist der Faden unausdehnbar, so muß noch $\frac{\partial v}{\partial s} = 0$ sein, da die Länge eines Fadenstückes bei Bewegung in einer festen Kurve nur dann erhalten bleiben kann, wenn die Endpunkte dasselbe v haben.

Anwendung auf den Treibriemen (Berücksichtigung der Zentrifugalwirkung).

Die Gleichungen (II') unterscheiden sich von den statischen in Nr. 179 nur durch das Glied $\mu \frac{v^2}{\varrho}$. Setzen wir $S - \mu v^2 = S'$, so ist wegen $\mu v^2 = \text{const.}$, $\frac{dS}{ds} = \frac{dS'}{ds}$ und für S' gelten dieselben Gleichungen wie früher für S. Es gilt also insbesondere die Eulersche Formel

$$S'_{2_{\max}} = S_1' \cdot e^{\alpha f}$$

für einen Treibriemen (siehe Nr. 180a).

Diese Bemerkung gilt allgemein:

Durch die Substitution $S' = S - \mu v^2$ gehen die Differentialgleichungen der stationären Bewegung in die des Gleichgewichts über.

Da ein kräftefreies ruhendes Seil jede Gestalt annehmen kann, so folgt, *daß sich ein Seil in jeder geschlossenen Kurve stationär bewegen kann, wenn es keinen äußeren Kräften unterworfen ist, es ist dann die Spannung $S = \mu v^2$.* Beim schweren Seil gilt offenbar dasselbe für eine widerstandsfreie Bewegung in einer horizontalen Kurve auf glattem Boden.

Außerdem wird die Gestalt stabil sein gegen kleine Störungen und um so mehr, je schneller das Seil läuft.

Denn sind kleine $\bar{\varkappa}$ vorhanden, so wird ihre Wirkung um so geringer sein, je größer die Spannung, je größer also $\frac{v^2}{\varrho}\mu$, d. h. je größer v ist. Darauf beruht die merkwürdige Erscheinung der Knetbarkeit rasch laufender Riemen oder Ketten: Man kann solchen Riemen irgendeine Gestalt geben, diese Gestalt wird dann im Raume stehen bleiben und der Riemen durch diese feste Kurve hindurchlaufen. Erst allmählich vermögen die äußeren Kräfte, Schwere, Reibungen usw., die dem Riemen aufgezwängte Gestalt zu ändern. Schon Radinger hat bei Triebriemen auf diese Erscheinung hingewiesen (siehe sein Buch über Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit). R. Skutsch hat Versuche mit Ketten angestellt, denen man bei raschem Umlauf in sich tatsächlich irgendeine Gestalt geben konnte, die sie lange (ruhend im Raume) beibehalten. (Siehe auch die Veröffentlichungen von Skutsch in den Verhandlungen zur Bef. des Gewerbefleißes 1898: „Ermittlung der Kräfte in Riemen und Seiltrieben".) Über den wesentlichen Einfluß der Elastizität und anderer Umstände siehe Enzykl. IV, 10, Nr. 20.

348. Erweiterung des Begriffs der stationären Bewegung. In einem weiteren Sinne nennen wir die Bewegung stationär, wenn die Gestalt der Kurve ungeändert bleibt, der Faden mit konstanter Geschwindigkeit v_r in dieser Kurve läuft, sich aber die Kurve als starres Ganzes irgendwie im Raume bewegen kann.

Denken wir uns mit der unveränderlichen Kurve einen starren Körper verbunden, dessen Translationsgeschwindigkeit $\dot{c}$, dessen Rotationsgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ sei, so ist nach den Gesetzen der Relativbewegung

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\mathfrak{d}\bar{v}_r}{\mathfrak{d}t} + 2\overline{\omega v_r} + \ddot{c} + \dot{\omega}(\overline{r-c}) + \omega(\omega(\overline{r-c})).$$

Dabei hat $\frac{\mathfrak{d}\bar{v}_r}{\mathfrak{d}t}$, die Relativbeschleunigung, nach der vorigen Nummer nur die Komponente $\frac{v_r^2}{\varrho}$ nach der Normalen der Bahn.

Betrachten wir z. B. die Legung eines Kabels in einem Meere konstanter Tiefe, so wird sich, wenn keine Störung eintritt, die Gestalt der freien Kabelkurve nicht ändern, sondern nur mit einer Geschwindigkeit fortschreiten, welche gleich der des Schiffes und auch gleich v_r ist, da sich natürlich das Kabel tangential an den Boden anlegen muß und sich immer ein Stück derselben Länge hinlegt, welche das Schiff durchlaufen hat.

Es ist also $\omega = 0$, $\dot{c} =$ const., also

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\mathfrak{d}\bar{v}_r}{\mathfrak{d}t},$$

die Gleichungen bleiben dieselben wie die des hängenden Fadens, nur daß die Spannung um μv_r^2 vermehrt ist.

Sehen wir also von allem Wasserwiderstand ab, so ist die Kabelkurve eine Kettenlinie, deren Scheitel den Boden berührt, vom spezifischen Gewicht ist natürlich das spezifische Gewicht des Wassers abzuziehen, die Spannung ist überall um μv_r^2 vermehrt.

349. Eine Umformung der Bewegungsgleichungen für unausdehnbare Fäden. Für tiefergehende Untersuchungen empfiehlt es sich, die Geschwindigkeit eines jeden Kettenpunktes relativ zu dem natürlichen Koordinatensystem der Kurve, bestehend aus Tangente ($\bar{\sigma}$), Hauptnormale ($\bar{\nu}$) und Binormale ($\bar{\nu}' = \overline{\sigma\nu}$) zu betrachten. Bezeichnen wir Änderungen relativ zu diesem System mit $\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}t}$, so ist nach den Sätzen der Relativbewegung

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\mathfrak{d}\bar{v}}{\mathfrak{d}t} + \overline{\omega v}, \tag{1}$$

wo

$$\bar{\omega} = \frac{d\bar{\chi}}{dt}, \tag{2}$$

die Drehgeschwindigkeit des natürlichen Koordinatensystems bedeutet. Es ist also

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dt} = \overline{\omega\sigma}, \quad \frac{d\bar{\nu}}{dt} = \overline{\omega\nu}, \quad \frac{d\bar{\nu}'}{dt} = \overline{\omega\nu'}. \tag{3}$$

Nun muß natürlich $\bar{\omega}$ noch in einer anderen Beziehung zu $\bar{v}$ stehen.

Um diese zu finden, beachten wir, daß

$$\left.\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \frac{d\bar{r}}{ds} \\ \bar{v} &= \frac{d\bar{r}}{dt} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ist, und daß man s und t als unabhängige Variable ansehen darf, wenn man s immer vom selben materiellen Punkte des Fadens aus zählt und wenn der Faden unausdehnbar ist, so daß dann s den materiellen Punkt charakterisiert. Also folgt aus (4)

$$\frac{d\bar{v}}{ds} = \frac{d\bar{\sigma}}{dt},$$

also nach (3)

$$\frac{d\bar{v}}{ds} = \overline{\omega\sigma}. \tag{5}$$

Nun gilt aber bezüglich $\frac{d}{ds}$ eine analoge Beziehung wie (1). Betrachten wir Änderungen eines Vektors längs der Kurve in einem festgehaltenen Zeitmoment, so können wir diese sowohl auf ein festes Koordinatensystem beziehen, als auch auf das natürliche, das sich längs der Kurve mitbewegt.

Schreiben wir letztere $\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}s}$, und sei $\bar{\omega}' = \frac{d\bar{\chi}}{ds}$, wo $\bar{\omega}' \cdot ds$ die unendlich kleine Drehung des natürlichen Koordinatensystems beim Fortgang längs der momentan festgehaltenen Kurve bedeutet, so ist

$$\frac{d\bar{v}}{ds} = \frac{\mathfrak{d}\bar{v}}{\mathfrak{d}s} + \overline{\omega' v},$$

also wird aus (5)

$$\frac{\mathfrak{d}\bar{v}}{\mathfrak{d}s} = \overline{\omega\sigma} - \overline{\omega' v}. \tag{6}$$

Wir haben also die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\mu\left(\frac{\mathfrak{d}\bar{v}}{\mathfrak{d}t}+\bar{\omega}\bar{v}\right)&=\frac{d}{ds}(\bar{\sigma}S)+\bar{x}\\ \frac{\mathfrak{d}\bar{v}}{\mathfrak{d}s}&=\overline{\omega\sigma}-\bar{\omega}'\bar{v}\end{aligned}\right\}. \qquad (\mathrm{I})$$

Etwas muß man aber beachten: Weil wir geschrieben haben

$$\bar{\omega}=\frac{d\bar{\chi}}{dt} \quad \text{und} \quad \bar{\omega}'=\frac{d\bar{\chi}}{ds},$$

muß man nicht glauben, daß $\frac{d\bar{\omega}}{ds}$ gleich $\frac{d\bar{\omega}'}{dt}$ wäre. Das liegt daran, daß es einen Winkelvektor $\bar{\chi}$ im allgemeinen nicht gibt.

Am besten betrachtet man in (I) als gesuchte Größen $\bar{v}$ und die Eulerschen Winkel ϑ, φ, ψ des natürlichen Koordinatensystem gegen ein festes. Dann kann man $\bar{\sigma}$ durch ϑ, φ, ψ; $\bar{\omega}$ durch ϑ, φ, ψ, $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ und analog $\bar{\omega}'$ durch ϑ, φ, ψ, $\frac{d\vartheta}{ds}$, $\frac{d\varphi}{ds}$, $\frac{d\psi}{ds}$ nach Nr. 265 ausdrücken.

Doch kann man auch noch für $\frac{d\bar{\omega}}{ds}-\frac{d\bar{\omega}'}{dt}$ einen Ausdruck finden.

Am einfachsten trifft man ihn so: Sei $\bar{z}$ ein mit dem natürlichen System fest verbundener Vektor, so ist nach der Eulerschen Formel einerseits

$$\frac{d\bar{z}}{dt}=\bar{\omega}\bar{z},$$

andererseits

$$\frac{d\bar{z}}{ds}=\bar{\omega}'\bar{z}.$$

Differentiiert man die erste Formel nach s, die zweite nach t und subtrahiert, so erhält man

$$0=\frac{d\bar{\omega}}{ds}\bar{z}-\frac{d\bar{\omega}'}{dt}\bar{z}+\bar{\omega}(\bar{\omega}'\bar{z})-\bar{\omega}'(\bar{\omega}\bar{z}).$$

Nun ist aber

$$\bar{\omega}(\bar{\omega}'\bar{z})+\bar{\omega}'(\bar{z}\bar{\omega})+\bar{z}(\bar{\omega}\bar{\omega}')=0$$

(siehe Anhang I, 6, d), also

$$0=\overline{\frac{d\omega}{ds}}z-\overline{\frac{d\omega'}{dt}}z+\overline{(\omega\omega')}z$$

und da das für alle $\bar{z}$ gilt

$$\frac{d\bar{\omega}}{ds}-\frac{d\bar{\omega}'}{dt}=\bar{\omega}'\bar{\omega}. \qquad (\mathrm{II})$$

Diese Gleichung kommt zu (I) *hinzu, womit man jetzt drei vektorielle Gleichungen zur Bestimmung von $\bar{v}$, $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}'$ hat. Man beachte, daß*

$$\frac{\mathfrak{d}\bar{\sigma}}{\mathfrak{d}t} = 0 \quad \textit{und ebenso} \quad \frac{\mathfrak{d}\bar{\sigma}}{\mathfrak{d}s} = 0$$

ist.

Man kann statt (II) auch

$$\frac{\mathfrak{d}\bar{\omega}}{\mathfrak{d}s} - \frac{\mathfrak{d}\bar{\omega}'}{\mathfrak{d}t} = -\overline{\omega'\omega} = \overline{\omega\omega'} \tag{II'}$$

schreiben, weil

$$\frac{d\bar{\omega}}{ds} = \frac{\mathfrak{d}\bar{\omega}}{\mathfrak{d}s} + \overline{\omega'\omega},$$

$$\frac{d\bar{\omega}'}{dt} = \frac{\mathfrak{d}\bar{\omega}}{\mathfrak{d}t} + \overline{\omega\omega}'$$

ist.

Übrigens läßt sich $\bar{v}$ ganz aus den Gleichungen eliminieren.

Differentiieren wir die erste der Gleichungen (I) nach s, nachdem wir sie durch μ dividiert haben, die zweite nach t und subtrahieren wir, benutzen wir dann abermals die Gleichungen (I) um $\frac{\mathfrak{d}\bar{v}}{\mathfrak{d}t}$ und $\frac{\mathfrak{d}\bar{v}}{\mathfrak{d}s}$ zu elimineren, beachten wir ferner Gleichung (II') und

$$(\overline{\omega\omega'})v + (\overline{v\omega})\omega' + (\overline{\omega' v})\omega = 0,$$

so erhalten wir

$$\frac{\mathfrak{d}\bar{\omega}}{\mathfrak{d}t}\sigma + \overline{\omega(\omega\sigma)} = \omega'\Phi + \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}s}\bar{\Phi}, \tag{III}$$

wo

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{\mu}\frac{d}{ds}(\bar{\sigma}S) + \frac{1}{\mu}\bar{\varkappa} = \frac{1}{\mu}\bar{\varkappa} + \frac{1}{\mu}\bar{\sigma}\frac{\mathfrak{d}S}{\mathfrak{d}s} + \frac{1}{\mu}\overline{\omega'\sigma}\cdot S$$

ist.

Gleichung (III) kann dann zusammen mit (II') zur Bestimmung von $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}'$ und S benutzt werden; es kommt dann noch die Bedingung hinzu, daß die Bogenlänge konstant bleibt. Doch brauchen wir diese nicht besonders auszudrücken; denn nach Anhang II, 4 ist $\bar{\omega}'$ nur durch zwei Stücke, die momentane Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ und die momentane Torsion $\frac{1}{\varrho'}$ der Bahn bestimmt

$$\bar{\omega}' = -\frac{1}{\varrho'}\bar{\sigma} + \frac{1}{\varrho}\bar{\nu}',$$

so daß die beiden vektoriellen Gleichungen (II'), (III) *die folgenden sechs Größen als abhängige Variable enthalten: $\bar{\omega}$, ϱ, ϱ' und S.*

Auch kann man nachweisen, daß die Unveränderlichkeit der Bogenlänge bereits durch die Gleichung (5) resp. (6) gewährleistet wird.

Beim **ebenen Problem** speziell stehen $\bar{\omega}$ und $\bar{\omega}'$ beide auf der Ebene senkrecht; daher ist $\omega\bar{\omega}' = 0$ und nach (II') kann man setzen:

$$\omega' = \bar{\nu}' \frac{\partial \vartheta}{\partial s},$$

$$\omega = \bar{\nu}' \frac{\partial \vartheta}{\partial t}.$$

Aus (III) wird dann durch Zerlegung nach der Tangenten- und Normalrichtung:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} - S\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right)^2 + \frac{\partial \varkappa_s}{\partial s} - \varkappa_\nu \frac{\partial \vartheta}{\partial s} + \mu\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)^2 = 0,$$

$$S\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2} + 2\frac{\partial S}{\partial s}\frac{\partial \vartheta}{\partial s} + \varkappa_\sigma \frac{\partial \vartheta}{\partial s} + \frac{\partial \varkappa_\nu}{\partial s} - \mu \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = 0.$$

Diese Gleichungen für die ebene Bewegung finden sich auch bei Routh, Bd. 2, Kap. XIII.

350. Allgemeine Kinetik der Drähte. Wir betrachten jetzt ein System — einen Draht — das kinematisch mit einem — dehnbaren oder nicht dehnbaren — Faden übereinstimmt, d. h. eine ausgezeichnete Mittellinie besitzt, die jede Gestalt annehmen kann. Die in einem Schnitt senkrecht zur Mittelachse vorhandenen Spannungen mögen die Summe $\bar{S}$, und bezogen auf den Schnittpunkt der Achse mit der Schnittebene das Moment $\bar{B}$ haben. Es sei also jetzt $\bar{B}$ nicht Null und infolgedessen braucht auch $\bar{S}$ nicht in die Richtung der Mittelachse zu fallen. $\bar{S}$ und $\bar{B}$ seien die Wirkungen von Teilen mit größerem s auf die vorhergehenden. Reduziert auf die Mittelachse mögen die äußeren Kräfte zum Längenelement ds die Resultierende $\bar{\varkappa} ds$ und das Moment $\bar{M} ds$ haben.

Der Schwerpunktsatz für ein Element ds gibt sofort

$$\mu \bar{w} = \bar{\varkappa} + \frac{d\bar{S}}{ds} \tag{I}$$

wie in Nr. 346.

Dagegen lautet der Momentensatz nun anders. Wir beziehen ihn auf den Anfangspunkt eines Elementes ds. Das Moment der Massenbeschleunigung des Schwerpunktes ist dann sicher wieder wie in Nr. 346 unendlich klein zweiter Ordnung.

Das Moment der Massenbeschleunigungen um den Schwerpunkt würde nun die Trägheitsmomente enthalten. Diese setzen sich aus der unendlich kleinen Masse μds und aus den Quadraten der Trägheitsradien multiplikativ zusammen. Diese Trägheitsradien sind höchstens gleich der halben Dicke des Drahtes. Sieht man also diese als klein gegen die anderen Dimensionen an, so kann man die Momente der Massenbeschleunigungen überhaupt vernachlässigen.

Wir wollen das aber nicht tun. Dann wird in der Grenze $ds = 0$ unser Element eine dünne Scheibe, die Richtung der Mittelachse also Hauptachse (Trägheitsmoment Γds); die beiden anderen Hauptachsen stehen senkrecht dazu und mögen die Hauptträgheitsmomente $A ds$ und $B ds$ besitzen. Dabei ist, wie stets für eine ebene Scheibe,

$$\Gamma = A + B$$

(siehe Nr. 253).

Sei nun $\bar{I} ds$ der Impulsvektor der Elemente, hat also $\bar{I}$, bezogen auf die Hauptachsen, die Komponenten

$$A\omega_x, \quad B\omega_y, \quad \Gamma\omega_z,$$

so lautet der Momentensatz (vergleiche Nr. 281)

$$\frac{\mathfrak{d}\bar{I}}{\mathfrak{d}t} + \overline{\omega I} = \bar{M} + \overline{\sigma S} + \frac{d\bar{B}}{ds}, \tag{II}$$

wo $\bar{\sigma}$ ein Einheitsvektor in Richtung der Tangente ist.

Für die Ruhe, bei Fehlen eines äußeren Moments $\bar{M}$, folgt

$$\overline{\sigma S} + \frac{d\bar{B}}{ds} = 0,$$

die Verallgemeinerung der Formel $\frac{dB}{ds} = H$ aus Nr. 184 für den Raum.

Was nun $\bar{\omega}$ angeht, so ist es die Winkelgeschwindigkeit des von den Hauptachsen des Querschnitts gebildeten Achsensystems. Das wird im allgemeinen ein anderes ω sein als das $\bar{\omega}$ der vorigen Nummer, also als das $\bar{\omega}$ des natürlichen Achsensystems aus Tangente, Hauptnormale und Binormale. Nennen wir dieses $\bar{\omega}$ jetzt $\bar{\omega}_1$:

$$\bar{\omega}_1 = \frac{d\bar{\chi}}{dt},$$

und bilde die A-Achse mit der Hauptnormalen den variablen Winkel ϑ, positiv gezählt von der Hauptnormalen zur Binormalen, so kommt die Veränderlichkeit dieses ϑ noch in Betracht, welche noch eine Drehung um die Mittelachse bedeutet. Also ist das wahre ω

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\sigma} \cdot \dot{\vartheta}.$$

Die Gleichungen der vorigen Nummer:

$$\frac{\mathfrak{d}\bar{v}}{\mathfrak{d}s} = \bar{\omega}_1 \sigma - \overline{\omega_1' v}$$

und

$$\frac{d\bar{\omega}_1}{ds} - \frac{d\bar{\omega}_1'}{dt} = \overline{\omega_1' \omega_1},$$

ebenso

$$\omega_1' = -\frac{1}{\varrho'}\bar{\sigma} + \frac{1}{\varrho}\bar{v}'$$

bleiben beim unausdehnbaren Draht in Gültigkeit, nur daß sie eben für $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_1'$ gelten, die Drehgeschwindigkeiten des natürlichen Koordinatensystems. ϱ und ϱ' sind Krümmungsradius und Torsionsradius der Mittelachse.

Soweit können wir allgemein etwas über die Kinetik der Drähte aussagen. Die weitere spezielle Betrachtung muß sich jetzt mit den Eigenschaften von $\bar{B}$ und $\bar{S}$ in ihrer Abhängigkeit von Gestalt und Gestaltsänderung des Drahtes befassen. Ein Beispiel stellen unsere Untersuchungen über steife Seile aus § 36 dar.

Die Kinematik der Drähte stammt von St. Vénant; siehe auch Thomson und Tait, Nat. Phil. I, oder Heun, Kinematik, Nr. 159. Die statischen Gleichungen ($\bar{I}$ vernachlässigt) finden sich auch in der Literatur (siehe die Bemerkungen von Heun in der Neuausgabe der Arbeiten Bernouillis und Eulers in Ostwalds Klassikern Nr. 175).

351. Kleine Schwingungen eines freihängenden belasteten, unausdehnbaren Seiles. Die Richtung abwärts sei die x-Achse.

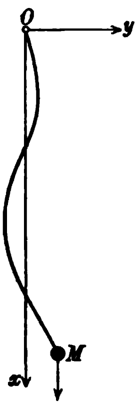


Fig. 253.

Das Seil hänge frei und trage unten die Masse M. Die Schwingungen seien klein, d. h. y klein erster Ordnung, desgleichen $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$. Infolgedessen wird $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ klein zweiter Ordnung sein, d. h. wir können die Höhenveränderungen der Punkte ganz vernachlässigen. Ebenso ist $\frac{dx}{ds} \doteq 1$, $\frac{dy}{ds}$ klein erster Ordnung. Dann lautet die erste Bewegungsgleichung (die Komponente in der x-Richtung), weil $\bar{\sigma}$ die Komponenten $\frac{dx}{ds}$ und $\frac{dy}{ds}$ hat (nach I, Nr. 346)

$$O = \frac{dS}{ds} + \gamma,$$

wo γ das spezifische Gewicht des Fadens ist, also ist

$$S \doteq -\gamma s + c$$

oder da $s \doteq x$,

$$S = -\gamma x + c.$$

Hängt nun unten das Gewicht Mg, so ist für $x = l$

$$S = Mg,$$

also

$$S = -\gamma x + \gamma l + Mg.$$

Die zweite Bewegungsgleichung dagegen ist (nach I, Nr. 346)

$$\mu \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dx}\left(S \cdot \frac{dy}{dx}\right)$$

(es ist wieder dx statt ds gesetzt!) oder

$$\mu \frac{d^2y}{dt^2} = (-\gamma x + \gamma l + Mg)\frac{d^2y}{dx^2} - \gamma \frac{dy}{dx}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{M}{\mu} + l = L,$$

so bekommen wir

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = g\left[(L-x)\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\right] = g\frac{d}{dx}\left[(L-x)\frac{dy}{dx}\right]. \tag{I'}$$

Ist nun M sehr groß gegen μl und also auch gegen μx, mithin L groß gegen x, so kann man in erster Annäherung statt (I) setzen (wir schreiben jetzt auch partielle Ableitungen)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = gL\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{I}$$

Diese partielle Differentialgleichung kann allgemein integriert werden. Setzen wir $gL = c^2$ und führen neue Variable u, v durch

$$x - ct = u,$$

$$x + ct = v$$

ein, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\partial y}{\partial u}c + \frac{\partial y}{\partial v}c,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - 2c^2\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} + c^2\frac{\partial^2 y}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}.$$

Setzt man das in (I') ein, so erhält man

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} = 0,$$

d. h.

$$y = f(u) + g(v),$$

wo f, g willkürliche Funktionen sind.

Also ist

$$y = f(x-ct) + g(x+ct)$$

das allgemeine Integral.

$f(x-ct)$ bleibt ungeändert, wenn sich x um irgend einen Wert a, t um den Wert $\frac{a}{c}$ vermehrt:

$$y_1 = f(x-ct)$$

bedeutet demnach eine fortschreitende Welle: ein bestimmter Wert y_1 pflanzt sich mit der Geschwindigkeit c fort.

Ebenso bedeutet

$$y_2 = g(x+ct)$$

eine rückschreitende Welle.

Nun soll für $x = 0$ dauernd $y = 0$ sein, also

$$f(-ct) + g(ct) = 0,$$

d. h.

$$g(ct) = -f(-ct),$$

$$g(ct + x) = -f(-ct - x)$$

und

$$y = f(x - ct) - f(-ct - x).$$

Sei für $t = 0$ gegeben

$$y = \varphi(x), \quad \dot{y} = \psi(x)$$

für $0 \leqq x \leqq l$, d. h. gibt man Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit der Kurve, so hat man zur Bestimmung von f:

$$f(x) - f(-x) = \varphi(x), \tag{a}$$

$$-cf'(x) + cf'(-x) = \psi(x), \tag{b}$$

für $l > x > 0$. Differentiiert man die erste Gleichung, so erhält man

$$f'(x) + f'(-x) = \varphi'(x),$$

also in Verbindung mit (b)

$$2f'(x) = \varphi'(x) - \frac{1}{c}\psi(x),$$

$$2f'(-x) = \varphi'(x) + \frac{1}{c}\psi(x),$$

womit $f'(x)$ für alle x definiert ist, für welche

$$-l \leqq x \leqq l.$$

Wir brauchen aber f für alle x. Wie findet man das?

352. Fortsetzung. Vollständige Bestimmung von f. Wir haben noch gar nicht die Bewegung der angehängten Last M betrachtet.

Für sie wird folgende reine Bewegungsgleichung bestehen: es muß die Massenbeschleunigung senkrecht zur Endrichtung des Fadens gleich der in diese Richtung fallenden Komponente der Schwerkraft sein.

Da nun die Richtungskosinus des Seiles $\frac{\partial x}{\partial s}$ und $\frac{\partial y}{\partial s}$ sind, aber

$$\frac{\partial x}{\partial s} \doteq 1, \quad \frac{\partial y}{\partial s} \doteq \frac{\partial y}{\partial x}$$

so lautet die Gleichung

$$M\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -Mg\frac{\partial y}{\partial x}$$

für $x = l$.

Das aber gibt, wenn man $y = f(x - ct) - f(-ct - x)$ einsetzt

$$c^2(f''(l - ct) - f''(-l - ct)) = -g(f'(l - ct) + f'(-l - ct)).$$

Setzen wir

$$l - ct = z,$$

$$-l - ct = z - 2l,$$

so wird daraus

$$f''(z-2l) - \frac{g}{c^2} f'(z-2l) = f''(z) + \frac{g}{c^2} f'(z).$$

Nun kennen wir bereits $f'(z)$ und $f''(z)$ für $-l \leqq z \leqq +l$; liegt aber z in diesem Intervall, so liegt $z - 2l$ zwischen $-3l$ und $-l$; wir kennen dann die rechte Seite und haben eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für $f'(z-2l)$ gefunden, die sich auf Quadraturen zurückführen läßt, nämlich

$$f'(z-2l) = e^{\frac{g}{c^2}z} \int e^{-\frac{g}{c^2}z} \left[f''(z) + \frac{g}{c^2} f'(z)\right] dz.$$

Die Integrationskonstante dient dazu, das so berechnete $f'(z)$ im Intervall von $-l$ bis $-3l$ stetig an die Werte im Intervall l bis $-l$ anzuschließen.

Nach demselben Verfahren kann man jetzt $f'(z)$ im Intervall von $-3l$ bis $-5l$ berechnen usw.; man besitzt somit $f(z)$ für das Intervall $l \geqq z \geqq -\infty$ und kennt y für $0 \leqq x \leqq l$ und $0 \leqq t \leqq \infty$. Wenn es Zweck hätte, könnte man auch y für alle vorhergehenden Zeiten finden, indem man die Hauptgleichung dieser Nummer in umgekehrter Weise benutzt.

353. Spezialfall: Reine Schwingungen. Sei für $t = 0$ und $0 \leqq x \leqq l$

$$f'(x) = \varphi'(x) = \cos \nu x,$$

$$\dot{y} = \psi(x) = 0,$$

so ist auch

$$f'(-x) = \cos \nu x.$$

Infolgedessen wird für $-l \leqq z \leqq l$

$$f'(z-2l) = e^{\alpha z} \int e^{-\alpha z} [-\nu \sin \nu z + \alpha \cos \nu z] dz + C e^{\alpha z},$$

wo

$$\alpha = \frac{g}{c^2}$$

gesetzt ist.

Man kann das Integral leicht ausrechnen und erhält

$$f'(z-2l) = \frac{\nu^2 - \alpha^2}{\nu^2 + \alpha^2} \cos \nu z + \frac{2\nu\alpha}{\nu^2 + \alpha^2} \sin \nu z + C e^{\alpha z}.$$

Da aber für $z = l$

$$f'(-l) = \cos \nu l$$

sein soll, bekommen wir

$$C = 2\alpha e^{-\alpha l} \frac{\alpha \cos \nu l - \nu \sin \nu l}{\alpha^2 + \nu^2}$$

und, wenn wir noch

$$\sin \beta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}}, \quad \cos \beta = \frac{\nu}{\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}}$$

(was möglich ist) also

$$\frac{\nu^2 - \alpha^2}{\nu^2 + \alpha^2} = \cos 2\beta \quad \text{und} \quad \frac{2\nu\alpha}{\alpha^2 + \nu^2} = \sin 2\beta$$

setzen

$$f'(z - 2l) = \cos(\nu z - 2\beta) + 2 \sin \beta \sin(\beta - \nu l) e^{\alpha(z-l)}$$

gültig für $-l \leqq z \leqq l$.

Es wird sich also die Funktion f im allgemeinen nicht analytisch fortsetzen, es wird $f'(z - 2l)$ nicht gleich $\cos \nu(z - 2l)$ sein, da eine Exponentialfunktion auftritt, die aber stets kleiner wie 1 ist, weil der Exponent negativ ist ($\alpha > 0$).

Soll aber wieder

$$f'(z - 2l) = \cos \nu(z - 2l)$$

sein, so daß sich die Funktion f analytisch fortsetzt, so muß sicher

$$\sin(\beta - \nu l) = 0$$

sein, d. h.

$$\beta = \nu l + n\pi. \tag{1}$$

Dann wird aber auch tatsächlich

$$f'(z - 2l) = \cos \nu(z - 2l).$$

Wegen

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\alpha}{\nu}$$

wird aus (1)

$$\frac{\alpha}{\nu} = \operatorname{tg} \nu l, \tag{2}$$

eine transzendente Gleichung zur Bestimmung von ν.

Setzen wir

$$\nu l = u,$$

so lautet sie

$$l\alpha = u \operatorname{tg} u.$$

Nun ist aber

$$l\alpha = l \frac{g}{c^2} = l \frac{1}{L} = \frac{1}{1 + \frac{M}{\mu l}}$$

und das ist klein, weil $M \gg \mu l$.

Setzen wir die kleine Größe

$$\alpha l = \varepsilon,$$

sodaß die transzendente Gleichung lautet

$$\varepsilon = u \operatorname{tg} u. \tag{2'}$$

Man kann die Lösungen **graphisch** finden, indem man die Kurven $y = \operatorname{tg} u$ und $y = \frac{\varepsilon}{u}$ zeichnet und zum Schnitt bringt.

Wir brauchen nur die positiven Wurzeln.

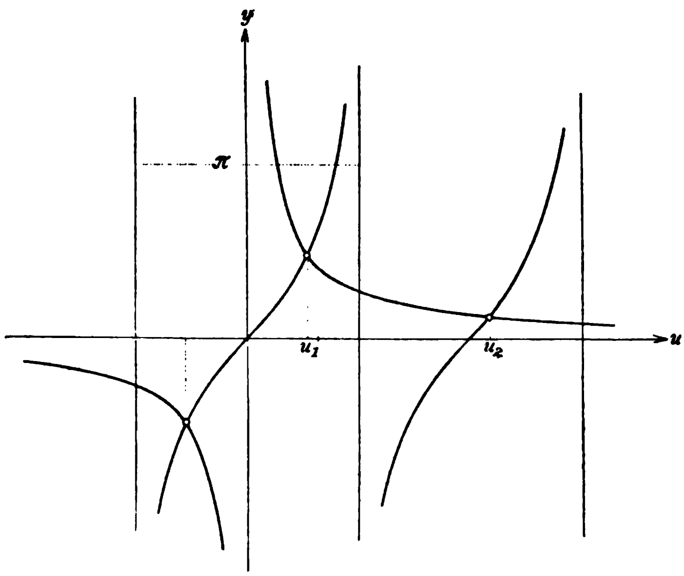


Fig. 254.

Angenähert kann man sie rechnerisch so finden:

Für die kleinste u_1 ist $\operatorname{tg} u_1 \doteq u_1$, also

$$u_1 \doteq \sqrt{\varepsilon}.$$

Für die anderen ist angenähert $u_n = (n-1)\pi$ etwa $u_n = (n-1)\pi + v_n$, wo v_n klein.

Dann ist für $n \geqq 2$, mit Beibehaltung von Gliedern erster Ordnung

$$(n-1)\pi \cdot v_n \doteq \varepsilon,$$

also

$$v_n \doteq \frac{\varepsilon}{(n-1)\pi}$$

für $n \geqq 2$.

2. Nehmen wir auch den Fall, daß für $-l \leqq z \leqq l$

$$f'(z) = \sin \nu z$$

sei, so ergibt eine analoge Rechnung

$$f'(z-2l) = \sin(\nu z - 2\beta) + 2\cos\beta \sin(\beta - \nu l) e^{\alpha(z-l)},$$

so daß

$$f'(z-2l) = \sin \nu(z-2l),$$

wenn wiederum dieselbe transzendente Gleichung (2) wie oben erfüllt ist.

Alle Funktionen der Art:

$$f(z) = \sum_n (A_n \cos \nu_n z + B_n \sin \nu_n z), \tag{I}$$

wo ν_n die Wurzeln der transzendenten Gleichung (2) *sind und wo die A_n, B_n willkürliche Konstante sind — vorausgesetzt, daß nur die Reihen konvergieren —, sind für* alle z *brauchbar, um vermöge*

$$y = f(x-ct) - f(-x-ct)$$

eine Lösung unseres Schwingungsproblems darzustellen.

Ist es die allgemeine Lösung?

Oder, was auf dasselbe hinauskommt: Läßt sich jede stetige und stetig differentiierbare Funktion $f(z)$ im Intervall $-l \leqq x \leqq l$ in der Form (1) darstellen?

Es soll im folgenden ein kurzer Ausblick auf die modernen Lösungsversuche dieses Beispiels eines großen Problems gegeben werden. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf die Lösungen $\cos \nu_n z$ und auf gerade Funktionen $f(z)$, für die also $f(z) = f(-z)$ ist. Oder, was auf dasselbe hinauskommt, wir fragen nur nach der Darstellbarkeit von $f(z)$ im Intervall 0 bis l, in der Form

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \nu_n z.$$

Dazu können wir uns dann ja $f(z)$ für das Intervall $-l$ bis 0 ergänzen, indem wir $f(-z) = f(z)$ definieren (wenn dann auch dieses neue $f(z)$ mit dem alten vielleicht nicht übereinstimmt).

§ 59. Etwas aus der Theorie der linearen Differential- und Integralgleichungen.

354. Unsere Partikularlösungen ein System von Orthogonalfunktionen. Unsere Partikularlösungen der letzten Nummern des vorhergehenden Paragraphen $\cos \nu_n z$ haben die Eigentümlichkeit, daß

$$\int_0^l \cos \nu_n z \cdot \cos \nu_m z \, dz = 0,$$

wenn $n \neq m$.

Integriert man nämlich, so erhält man

$$\frac{1}{\nu_n^2 - \nu_m^2} \{\nu_n \sin \nu_n l \cos \nu_m l - \nu_m \sin \nu_m l \cos \nu_n l\}$$

und das ist Null vermöge der transzendenten Gleichung

$$\nu \operatorname{tg} \nu l = \alpha. \tag{2}$$

Dagegen ist

$$\int_0^l \cos^2 \nu z \, dz = \frac{1}{4\nu} (\sin 2\nu l + 2\nu l),$$

was nach (2) auch gleich ist

$$\frac{1}{2} \frac{\alpha + l(\alpha^2 + \nu^2)}{\alpha^2 + \nu^2}.$$

Man nennt nun eine Reihe von Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, welche die Eigenschaft haben, daß

$$\int_0^l \varphi_\varkappa \varphi_\lambda dz = 0$$

ist für je zwei verschiedene $\varkappa, \lambda$ ein Orthogonalsystem. Man nennt es ferner normiert, wenn noch

$$\int_0^l \varphi_\varkappa^2 dz = 1$$

ist. Orthogonal ist also unser System, wir könnten es leicht normieren, wenn wir noch setzten

$$\frac{\sqrt{4\nu_n}}{\sqrt{\sin 2\nu_n l + 2\nu_n l}} \cos \nu_n z = \varphi_n(z).$$

Doch ist das nicht nötig.

Soll nun eine Darstellung der Form

$$f(z) = \sum A_n \varphi_n(z) \tag{I}$$

überhaupt möglich sein und die Reihe gleichmäßig konvergieren, so muß das Funktionensystem sicher noch eine Eigenschaft haben, die wir jetzt nachweisen wollen:

Nehmen wir einmal an, die hypothetische Reihe konvergiere gleichmäßig, dann dürfen wir gliedweise multiplizieren und integrieren.

Multiplizieren wir mit einem bestimmten φ_n und integrieren über das Intervall 0 bis l, so folgt wegen der Eigenschaften der φ

$$\int_0^l f(z)\varphi_n(z)dz = A_n. \tag{II}$$

Bei uns wird also speziell der Koeffizient von $\cos \nu_n z$

$$A_n' = \frac{\sqrt{4\nu_n}}{\sqrt{\sin 2\nu_n l + 2\nu_n l}} \cdot A_n = \frac{4\nu_n}{\sin 2\nu_n l + 2\nu_n l}\int_0^l f(z)\cos \nu_n z\,dz.$$

Hätte nun etwa $f(z)$ die Eigenschaft, daß alle $\int_0^l f(z)\cos \nu_n z\,dz$ verschwänden, so wären auch alle A_n Null und da die hypothetische Reihe gelten soll, so wäre auch f selbst Null.

Wir werden also von einem zur Darstellung (I) brauchbaren orthogonalen Funktionensystem verlangen müssen, daß es „vollständig“ oder „abgeschlossen“ sei, wie man sich ausdrückt, d. h. daß es keine von Null identisch verschiedene Funktion $f(z)$ gebe, für welche alle $\int_0^l f(z)\varphi_n(z)dz$ Null sind.

Auch haben wir für alle praktisch brauchbaren Fälle eine Methode gefunden, die Koeffizienten zu berechnen, nämlich die Formel (II). *Denn praktisch brauchbar sind nur gleichmäßig konvergente Reihenentwicklungen, weil man doch will, daß man durch eine genügende aber endliche Anzahl von Gliedern eine für das ganze Intervall gleichmäßig gute Darstellung erhält*, d. h. eine Darstellung, für welche der Fehler überall einen gleich minimalen Höchstbetrag hat.

Ist nun unser Funktionensystem vollständig?

Die Antwort werden wir in Nr. 361 geben.

355. Unsere Partikularlösungen als Integrale linearer Differentialgleichungen. Die Funktionen

$$y = A_n \cos \nu_n z$$

haben die folgenden Eigenschaften:

1. Sie genügen der linearen Differentialgleichung der kleinen Schwingungen

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \lambda y = 0,$$

wo der Parameter λ die Werte ν_n^2 der Reihe nach annimmt.

2. Sie genügen den Grenzbedingungen

$$\alpha y + \frac{dy}{dz}\Big|_{z=l} = 0$$

und

$$\frac{dy}{dz}\Big|_{z=0} = 0.$$

Denn es ist

$$\alpha y + \frac{dy}{dz} = \alpha A_n \cos \nu_n z - \nu_n A_n \sin \nu_n z$$

und das ist Null für $z = l$ vermöge der transzendenten Gleichung (2), der die ν_n genügen.

Die zweite Grenzbedingung ist ja klar.

Umgekehrt charakterisieren die obigen beiden Aussagen unsere Partikularlösungen vollständig.

Denn wegen der Differentialgleichung ist

$$y = A \cos \sqrt{\lambda} z + B \sin \sqrt{\lambda} z.$$

Setzt man darin die Grenzbedingungen ein, schreibt $\sqrt{\lambda} = \nu$, so erhält man aus der ersten

$$A(\alpha \cos \nu l - \nu \sin \nu l) + B(\alpha \sin \nu l + \nu \cos \nu l) = 0$$

und aus $\frac{dy}{dz}\Big|_{z=0} = 0$

$$\nu B = 0,$$

also $B = 0$ und $\alpha \cos \nu l - \nu \sin \nu l = 0$, d. h. die transzendente Gleichung für $\nu = \sqrt{\lambda}$:

$$\alpha - \nu \operatorname{tg} \nu l = 0.$$

356. Lineare Differentialgleichungen und ihre Greensche Funktion. Betrachten wir eine allgemeinere lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + (A(z) + \lambda) y = B(z). \tag{1}$$

wo $A(z)$, $B(z)$ gegebene, reguläre Funktion von z sind, λ ein Parameter, mit den homogenen Grenzbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 y + \beta_1 \frac{dy}{dz}\Big|_{z=l} &= 0 \\ \alpha_2 y + \beta_2 \frac{dy}{dz}\Big|_{z=0} &= 0 \end{aligned}\right\}; \tag{2}$$

für unser Beispiel ist $A = 0$, $B = 0$, $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 1$. Dann lehrt die allgemeine Theorie (siehe Hilbert, Zweite Mitteilung über lineare Integralgleichungen, Göttinger Nachrichten 1904), daß folgende Alternative besteht:

Entweder gibt es eine stetige und stetig differentiierbare Lösung der gekürzten Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + A \cdot y = 0, \tag{1'}$$

welche die Bedingungen (2) erfüllt und nicht identisch Null ist (das ist der Ausnahmefall; unser Beispiel gehört nicht hierher).

Oder es gibt eine stetige Lösung von (1'), *die auch* (2) *erfüllt, deren Differentialquotient aber an der willkürlichen Stelle* $z = x$ *einen Abfall um* 1 *erfährt.*

Man nennt diese Lösung $\gamma(x, z)$ die Greensche Funktion von (1). Sie ist stets symmetrisch in x und z.

Es ist also

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} + A(z)\gamma = 0. \tag{1'}$$

Die Grenzbedingungen (2) sind für γ erfüllt.

Ferner ist

$$\gamma(z, x) = \gamma(x, z) \tag{3}$$

und

$$\left.\frac{\partial \gamma}{\partial z}\right|_{z=x-0} - \left.\frac{\partial \gamma}{\partial z}\right|_{z=x+0} = 1 \tag{4}$$

($x + 0$ bedeutet, man nähert sich dem Werte $z = x$ von größeren her).

Für unser Beispiel sind die Sätze leicht zu beweisen und γ zu bilden.

(1') lautet

$$\frac{d^2 y}{d z^2} = 0.$$

Die allgemeine Lösung ist $y = az + b$.

Wegen der zweiten Grenzbedingung ist $a = 0$, also $y = b$. Wäre nun eine stetig und stetig differentiierbare Lösung möglich, so wäre es $y = b$. Die kann aber nicht

$$\alpha y + \left.\frac{dy}{dz}\right|_{z=l} = 0$$

erfüllen.

Also suchen wir $\gamma(x, z)$.

Für $z < x$ muß $\gamma = b$ sein. Für $z > x$ sei $\gamma = cz + d$.

Die zweite Grenzbedingung ergibt

$$\alpha(cl + d) + c = 0.$$

Die Bedingung (4) aber

$$-c = 1.$$

Also

$$c = -1 \quad \text{und} \quad d = l + \frac{1}{\alpha}\cdot$$

b aber bestimmt sich daraus, daß γ stetig sein soll, daß also für $x = z$

$$b = cz + d = -x + l + \frac{1}{\alpha}$$

sein muß. Also ist

$$\gamma(x, z) = -x + l + \frac{1}{\alpha} \quad \text{für} \quad z < x,$$

$$\gamma(x, z) = -z + l + \frac{1}{\alpha} \quad \text{für} \quad z > x.$$

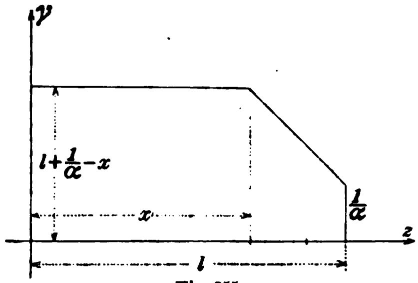


Fig. 255.

Dafür kann man schreiben

$$\gamma(x, z) = l + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}[x + z + |x - z|], \tag{III}$$

woraus man die Symmetrie

$$\gamma(x, z) = \gamma(z, x)$$

sofort erkennt. (Siehe Fig. 255.)

357. Lösung der nichthomogenen linearen Differentialgleichung. Mit Hilfe der Greenschen Funktion kann man nun sofort die nichthomogene lineare Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + A(z)\cdot y = B(z) \tag{1''}$$

mit den Randbedingungen (2) lösen.

Schließen wir den Ausnahmefall aus und nehmen an, es gäbe eine Greensche Funktion γ.

Wir behaupten, daß dann

$$f(z) = \int_0^l \gamma(x, z) B(x)\, dx$$

die Lösung von (1'') ist.

Zunächst einmal ist

$$f'(z) = \int_0^l \frac{\partial \gamma}{\partial z} B(x)\, dx = \int_0^z \frac{\partial \gamma}{\partial z} B\, dx + \int_z^l \frac{\partial \gamma}{\partial z} B\, dx,$$

$$f''(z) = \int_0^z \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} B\, dx + \frac{\partial \gamma}{\partial z} B\Big|_{x = z - 0} + \int_z^l \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} B\, dx - \frac{\partial \gamma}{\partial z} B\Big|_{x = z + 0}$$

$$= \int_0^l \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} B\, dx + \frac{\partial \gamma}{\partial z} B\Big|_{x = z + 0}^{x = z - 0}.$$

Weil aber

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} = -A(z)\gamma$$

und

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z}\Big|_{x=z+0}^{x=z-0} = 1,$$

so ist

$$f''(z) = -\int_0^l \gamma A(z)B(x)dx + B(z) = -A(z)\int_0^l \gamma B dx + B(z),$$

somit tatsächlich

$$f''(z) + A(z)f(z) = B(z).$$

Ferner erfüllt $f(z)$ die Grenzbedingungen; denn es ist z. B.

$$\alpha_1 f(l) + \beta_1 f'(l) = \int_0^l \left(\alpha_1 \gamma(x,l) + \beta_1 \frac{\partial \gamma}{\partial z}(x,z)_{z=l}\right) B(x)dx = 0,$$

weil γ die Grenzbedingungen für alle x erfüllt.

Aber unsere Lösung ist auch die einzige: es muß

$$f(z) = \int_0^l \gamma(x,z)B(x)dx$$

sein. Denn multiplizieren wir (1'') mit $\gamma(z,x)$ und integrieren, so folgt

$$\int_0^l \frac{d^2 y}{dz^2}\gamma(x,z)dz + \int_0^l y A \gamma(x,z)dz = \int_0^l \gamma(x,z)B(x)dx.$$

Es ist aber

$$\int_0^l \frac{d^2 y}{dz^2}\gamma dz = \frac{dy}{dz}\gamma\Big|_0^l - \int_0^l \frac{dy}{dz}\frac{\partial \gamma}{\partial z}dz$$

$$= \frac{dy}{dz}\gamma\Big|_0^l - \int_0^x \frac{dy}{dz}\cdot\frac{\partial \gamma}{\partial z}dz - \int_x^l \frac{dy}{dz}\cdot\frac{\partial \gamma}{\partial z}dz$$

$$= \frac{dy}{dz}\gamma - y\frac{d\gamma}{dz}\Big|_0^l + \int_0^l y\frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2}dz - y\frac{d\gamma}{dz}\Big|_{z=x+0}^{z=x-0}.$$

Das erste Glied verschwindet, weil sowohl

$$\alpha_1 y + \beta_1 \frac{dy}{dz}\Big|_l = 0$$

als auch

$$\alpha_1 \gamma + \beta_1 \frac{d\gamma}{dz}\bigg|_l = 0,$$

also, da α_1, β_1 nicht beide null,

$$y\frac{d\gamma}{dz} - \gamma\frac{dy}{dz}\bigg|_{z=l} = 0$$

sein muß (analog schließt man für $z = l$).

Das zweite Integral ist aber

$$-\int_0^l y A(z) \gamma \, dz,$$

das dritte Glied ist wegen der Unstetigkeitsbedingung von $\frac{d\gamma}{dz}$ gleich $+y$. Also bleibt tatsächlich

$$y(z) = \int_0^l \gamma B \, dx$$

stehen.

Daraus aber folgt weiter, daß, wie Hilbert sich ausdrückt, die Greensche Funktion „abgeschlossen" ist, d. h. ist

$$\int_0^l \gamma(x, z) f(z) \, dz = 0,$$

so ist

$$f(z) = 0.$$

Wäre das nämlich nicht der Fall, so nehme man $f(z)$ für B. Die Lösung y der Differentialgleichung kann dann unmöglich identisch Null sein, sie müßte es aber doch sein, weil sie ja gleich

$$\int_0^l \gamma B \, dx = \int_0^l \gamma f \, dx$$

ist, was Null sein sollte.

358. Rückführung der allgemeinen linearen Differentialgleichung auf eine Integralgleichung. Nehmen wir jetzt unsere allgemeine lineare Differentialgleichung mit dem Parameter λ vor

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (A(z) + \lambda) y = B(z) \tag{1}$$

und den Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 y + \beta_1 \frac{dy}{dz}\bigg|_{z=l} = 0, \\ \alpha_2 y + \beta_2 \frac{dy}{dz}\bigg|_{z=0} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Setzen wir wieder voraus, daß die verkürzte Gleichung, wie in unserem Beispiel, eine Greensche Funktion habe.

Multiplizieren wir (1) mit γ und integrieren, so gibt dieselbe Umformung wie in der vorigen Nummer

$$y(x) + \lambda \int_0^l y(z)\gamma(x,z)\,dz = \int_0^l B(z)\gamma(x,z)\,dz.$$

Sehen wir γ als bekannt an, so ist die Bestimmung von y auf die Auflösung dieser linearen Integralgleichung (zweiter Art) zurückgeführt:

$$y(x) + \lambda \int_0^l y(z)\gamma(x,z)\,dz = F(x), \tag{IV}$$

wo $\gamma(x,z)$ der symmetrische „Kern" und

$$F(x) = \int_0^l B(z)\gamma(x,z)\,dz$$

bekannte Funktionen sind, y gesucht ist.

Jede Lösung von (1)(2) *muß auch* (IV) *befriedigen; aber umgekehrt zeigt man ebenso wie in der vorhergehenden Nummer, daß auch jede Lösung von* (IV) *umgekehrt eine solche der Differentialgleichung* (1) *ist, welche die Randbedingungen* (2) *erfüllt.*

Der Kern der Integralgleichung ist die Greensche Funktion. Er ist, wie wir wissen, abgeschlossen (siehe Nr. 357). Außerdem aber hat der Kern noch die Eigenschaft, die Hilbert als „allgemein" bezeichnet: Zu jeder Funktion $f(z)$ gibt es eine und wegen der Abgeschlossenheit auch nur eine Funktion $h(z)$, so daß

$$f(z) = \int_0^l \gamma(z,x)h(x)\,dx$$

ist. Denn man bilde aus $f(z)$

$$f''(z) + A(z)f(z) = h(z).$$

Dann ist ja, wie wir wissen,

$$f(z) = \int_0^l \gamma h\,dx.$$

Allerdings haben wir die Allgemeinheit nur für den Bereich der zweimal differentiierbaren Funktionen bewiesen, doch genügt das für unsere Zwecke.

359. Resultate aus der Theorie der Integralgleichungen. Auf Integralgleichungen ist man bei Behandlung physikalischer Probleme schon oft gestoßen. Fast alle Schwingungsprobleme (Lord Rayleigh) führen darauf. Poincaré zeigte, wie die partielle Differentialgleichung $\Delta U = 0$ mit ihnen zusammenhängt und heute hat man fast alle interessanten gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen und noch manches andere mit linearen Integralgleichungen behandelt.

Eine erste allgemeine Methode zur Lösung linearer Integralgleichungen gab Fredholm, weshalb sie häufig nach ihm benannt werden.

Hilbert faßte in seiner ersten Mitteilung (Mitteilungen 1—6, 1904—1910, in den Göttinger Nachrichten) die lineare Integralgleichung als transzendente Verallgemeinerung eines algebraischen Problems auf und kam so zu einer neuen fruchtbaren Behandlungsweise.

Man wähle im Intervall 0 bis l eine große Zahl n von äquidistanten Werten $x_1 = 0, x_2 \ldots x_n = l \left(x_\nu - x_{\nu-1} = \Delta l = \frac{l}{n-1}\right)$. Die entsprechenden Werte von $F(x)$ seien $F_1 F_2 \ldots F_n$, die von $y: y_1 y_2 \ldots y_n$. $\Delta l \cdot \gamma(x_\varkappa, x_\sigma)$ werde kurz mit $\gamma_{\varkappa,\sigma}$ bezeichnet. Wegen der Symmetrie des Kerns ist

$$\gamma_{\varkappa,\sigma} = \gamma_{\sigma,\varkappa}.$$

Dann läßt sich die Integralgleichung angenähert in n lineare Gleichungen auflösen, indem man sie nur für die Argumentwerte $x_1 \ldots x_n$ hinschreibt und das Integral durch die Summe ersetzt,

$$y_\varkappa + \lambda \sum_{\sigma=1}^{n} y_\sigma \gamma_{\sigma,\varkappa} = F_\varkappa. \tag{A}$$

Abgeschlossenheit von γ bedeutet, daß die Gleichungen

$$\sum_{\sigma=1}^{n} y_\sigma \gamma_{\sigma,\varkappa} = 0$$

keine Lösung haben außer der trivialen $y = 0$ oder, was dasselbe ist, daß die Determinante $|\gamma_{\sigma,\varkappa}|$ nicht Null ist.

Nun weiß man:

1. Im allgemeinen haben diese linearen Gleichungen (A) ein bestimmtes Lösungssystem für die $y_1 \ldots y_n$.

2. Das ist nur dann nicht immer der Fall, wenn die symmetrische Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1+\lambda\gamma_{1,1} & \lambda\gamma_{1,2}\dots\lambda\gamma_{1,n} \\ \lambda\gamma_{2,1} & 1+\lambda\gamma_{2,2}\dots\lambda\gamma_{2,n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \lambda\gamma_{n,1} & \lambda\gamma_{n,2}\dots 1+\lambda\gamma_{n,n} \end{vmatrix}$$

verschwindet.

3. Diese Determinante gleich Null gesetzt, gibt eine Gleichung n^{ten} Grades für λ mit n reellen Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$, die weder Null noch unendlich sind.

4. Ist λ gleich einem der Wurzelwerte λ_ν, so haben die homogenen Gleichungen

$$y_\varkappa + \lambda \sum_\sigma y_\sigma \gamma_{\sigma,\varkappa} = 0 \tag{B}$$

Lösungen, die nicht identisch verschwinden; seien diese Systeme $y_\varkappa^{(\nu)}$ für ein bestimmtes λ. Ist λ eine r-fache Wurzel, so gehören zu λ gerade r Lösungssysteme. Im ganzen gibt es also n Lösungssysteme der homogenen Gleichungen, wenn man will, zu jedem λ eines; man muß dann nur die λ so oft nehmen, als sie als Wurzeln zu zählen sind.

Damit dann das obige nicht-homogene System (A) für ein solches λ eine Lösung habe, müssen die F Bedingungen erfüllen, nämlich

$$\sum_\varkappa F_\varkappa y_\varkappa^{(\nu)} = 0$$

für alle $y_\varkappa^{(\nu)}$, die zu dem einen λ gehören.

5. Ist aber λ von diesen Größen $\lambda_1 \dots \lambda_n$ verschieden, also $D \neq 0$, so existiert ein bestimmtes Lösungssystem für die y der Gleichungen (A). Es ist jedes y der Quotient aus einer ganzen rationalen Funktion der λ, dividiert durch D. Sind alle $F = 0$, so sind auch alle $y = 0$.

6. Die Systeme der ausgezeichneten Lösungen $y_\varkappa^{(\nu)}$ — d. h. derjenigen der homogenen Gleichungen (B) — sind orthogonal oder lassen sich doch orthogonal machen, d. h. es ist

$$\sum_\varkappa y_\varkappa^{(\nu)} y_\varkappa^{(\nu')} = 0,$$

wenn $\nu \neq \nu'$.

7. Bekanntlich hängt die Gleichung $D = 0$ mit dem Hauptachsenproblem der Flächen zweiter Ordnung

$$\sum \gamma_{\sigma,\varkappa} x_\sigma x_\varkappa = \text{const}$$

zusammen: Es sind die $\lambda_1 \dots \lambda_n$ die negativen reziproken Koeffizienten der vorstehenden Gleichung, bezogen auf die Hauptachsen, d. h. es lassen sich neue Variabele x' durch orthogonale Transformationen (Drehung des Koordinatensystems im Raume der x) so einführen, daß identisch

$$\sum_{\sigma,\varkappa} \gamma_{\sigma,\varkappa} x_\sigma x_\varkappa \equiv - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu'^2}{\lambda_\nu},$$

und dabei sind die x_ν' lineare Funktionen der x_ν, deren Koeffizienten eben die Lösungen y_ν der homogenen Gleichungen (B) sind, wenn man sich letztere noch normiert denkt, d. h. festgesetzt denkt, daß

$$\sum_{\varkappa} y_\varkappa^2 = 1$$

sei, was stets möglich ist, da nur die Verhältnisse der y aus den homogenen Gleichungen (B) bestimmbar sind.

Es ist also identisch

$$\sum \gamma_{\sigma,\varkappa} x_\sigma x_\varkappa = - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\left(\sum\limits_{\varkappa} y_\varkappa^{(\nu)} x_\varkappa\right)^2}{\lambda_\nu}.$$

Dieser Satz läßt sich noch von der quadratischen Form auf die bilineare ausdehnen: er ist identisch in den zweimal n Variabeln $x_1 \ldots x_n$, $z_1 \ldots z_n$

$$\sum \gamma_{\sigma,\varkappa} x_\sigma z_\varkappa = - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sum\limits_{\varkappa} y_\varkappa^{(\nu)} x_\varkappa \cdot \sum\limits_{\varkappa} y_\varkappa^{(\nu)} z_\varkappa}{\lambda_\nu}.$$

Der Beweis von 6. und 7. ist nicht schwer. (Die Sätze 1. bis 5. dürfen wir wohl als bekannt ansehen.)

Aus

$$y_\varkappa^{(\nu)} = - \lambda_\nu \sum \gamma_{\varkappa,\sigma} y_\sigma^{(\nu)}$$

folgt

$$\sum_{\varkappa} y_\varkappa^{(\nu)} y_\varkappa^{(\nu')} = - \lambda_\nu \sum_{\varkappa,\sigma} \gamma_{\varkappa,\sigma} y_\sigma^{(\nu)} y_\varkappa^{(\nu')}.$$

Vertauschung von ν mit ν' gibt

$$\sum_{\varkappa} y_\varkappa^{(\nu)} y_\varkappa^{(\nu')} = - \lambda_{\nu'} \sum_{\varkappa,\sigma} \gamma_{\varkappa,\sigma} y_\sigma^{(\nu)} y_\varkappa^{(\nu')},$$

also, nach Subtraktion, wenn $\lambda_\nu \neq \lambda_{\nu'}$

$$\sum_{\varkappa,\sigma} \gamma_{\varkappa,\sigma} y_\sigma^{(\nu)} y_\varkappa^{(\nu')} = 0,$$

und dann auch

$$\sum_{\varkappa} y_\varkappa^{(\nu)} y_\varkappa^{(\nu')} = 0,$$

die gesuchte Orthogonalitätsbedingung.

Ist aber $\lambda_\nu = \lambda_{\nu'}$, so ist auch jedes System der Form $\alpha y^{(\nu)} + \alpha' y^{(\nu')}$ eine Lösung zu demselben λ, weil die Gleichungen linear homogen sind. Man kann dann aber, falls nicht schon

$$\sum_x y_x^{(\nu)} y_x^{\nu'}$$

Null sein sollte, sondern etwa gleich d ist, leicht zwei Paare $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ finden, so daß

$$\sum (\alpha y_x^{(\nu)} + \alpha' y_x^{(\nu')})(\beta y_x^{(\nu)} + \beta' y_x^{(\nu')}) = 0$$

ist. Es muß nur

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + (\alpha'\beta + \beta'\alpha)d = 0$$

sein, aber

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0,$$

was natürlich stets möglich ist.

Damit ist 6. bewiesen und es ist auch stets

$$\sum \gamma_{x,\sigma} y_x^{(\nu)} y_\sigma^{(\nu')} = 0$$

für verschiedene ν, ν', aber, was genau so zu beweisen ist,

$$1 + \lambda_\nu \sum \gamma_{x,\sigma} y_x^{(\nu)} y_\sigma^{(\nu)} = 0,$$

falls die y normiert sind.

Um nun 7. zu beweisen, bilden wir aus $y_x^{(\nu)} = -\lambda_\nu \sum \gamma_{x,\sigma} y_\sigma^{(\nu)}$

$$-\frac{1}{\lambda_\nu} \sum_x y_x^{(\nu)} x_x = \sum_{x,\sigma} \gamma_{x,\sigma} y_\sigma^{(\nu)} x_x.$$

Multiplizieren wir mit $\sum y_x^{(\nu)} z_x$ und summieren über die λ, so gibt das, wenn wir in der zweiten Summe rechts den Summationsbuchstaben x mit μ vertauschen,

$$-\sum_\nu \frac{1}{\lambda_\nu}\Big(\sum_x y_x^{(\nu)} x_x \cdot \sum_x y_x^{(\nu)} z_x\Big) = \sum_{x,\sigma} \gamma_{x,\sigma} x_x \sum_{\nu,\mu} y_\sigma^{(\nu)} y_\mu^{(\nu)} z_\mu. \qquad (1)$$

Nun ist ein System von Größen

$$\begin{matrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} \dots \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} \dots \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{matrix}$$

das in einer Richtung orthogonal ist, es auch in der anderen. Denn setzt man in den Unbestimmten v_x die Gleichungen an

$$\sum_\nu y_x^{(\nu)} u_\nu = v_x,$$

so folgt durch Multiplikation mit $y_\varkappa^{(\nu')}$ und Summation über $\varkappa$

$$\sum_{\nu,\varkappa} y_\varkappa^{(\nu)} y_\varkappa^{(\nu')} u_\nu = \sum v_\varkappa y_\varkappa^{(\nu')},$$

oder wegen der Orthogonalitätseigenschaft

$$u_{\nu'} = \sum_\varkappa v_\varkappa y_\varkappa^{(\nu')}.$$

Daraus aber folgt wieder durch Multiplikation mit $y_\sigma^{(\nu')}$ und Summation über ν'

$$v_\sigma = \sum_{\nu'} y_\sigma^{(\nu')} u_{\nu'} = \sum_{\varkappa,\nu'} v_\varkappa y_\varkappa^{(\nu')} y_\sigma^{(\nu')}.$$

Das muß aber identisch in allen v_σ erfüllt sein, also

$$\sum_{\nu'} y_\varkappa^{(\nu')} y_\sigma^{(\nu')} = 0,$$

wenn $\varkappa \neq \sigma$, und wenn $\varkappa = \sigma$

$$\sum_{\nu'} y_{\varkappa_1}^{(\nu')^2} = 1,$$

w. z. b. w. Infolgedessen aber ist

$$\sum_{\nu,\mu} y_\sigma^{(\nu)} y_\mu^{(\nu)} z_\mu = z_\sigma$$

und aus (1) wird das zu beweisende

$$-\sum_\nu \frac{1}{\lambda_\nu}\left(\sum_\varkappa y_\varkappa^{(\nu)} x_\varkappa \cdot \sum_\varkappa y_\varkappa^{(\nu)} z_\varkappa\right) = \sum_{\varkappa,\sigma} \gamma_{\varkappa,\sigma} x_\varkappa z_\sigma.$$

* * *

Hilbert gelang es nun durch strengen Übergang die folgenden vollkommen entsprechenden Sätze zu beweisen

1. Die lineare Integralgleichung mit symmetrischem Kern γ

$$y(x) + \lambda \int_0^l \gamma(x,z) y(z)\, dz = F(x) \tag{A}$$

hat im allgemeinen eine ganz bestimmte Lösung.

2. Das ist nur dann nicht immer der Fall, wenn λ Wurzel einer bestimmten Gleichung

$$D(\lambda) = 0$$

ist. Diese $\lambda: \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$ heißen die Eigenwerte des Kerns γ.

3. Ist der Kern abgeschlossen, so gibt es unendlich viele Eigenwerte: sie haben keinen Häufungspunkt im Endlichen. D ist dann eine ganze transzendente Funktion, alle ihre Nullstellen sind reell.

4. Ist λ gleich einem Eigenwert, so hat die homogene Integralgleichung

$$y + \lambda \int y \gamma \, dz = 0 \tag{B}$$

Lösungen $y^{(\sigma)}$ zu jedem Eigenwert λ, die sogenannten Eigenfunktionen. Zählt man jeden Eigenwert hinreichend oft, so kann man jedem eine Eigenfunktion y zugeordnet denken. Damit die nicht-homogene Gleichung (A) in diesem Falle Lösungen hat, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\int_0^l F(x) y_\varkappa(x) \, dx = 0$$

sei für alle zu dem Eigenwert $\lambda_\varkappa$ gehörenden Eigenfunktionen $y_\varkappa$.

5. Ist λ nicht gleich einem Eigenwert, so hat die homogene Gleichung (B) nur die Lösung Null, die nicht-homogene (A) eine ganz bestimmte Lösung

$$y = \frac{H(x, \lambda)}{D(\lambda)},$$

wo $H(x, \lambda)$ eine ganze transzendente Funktion in λ ist, sowie auch D.

6. Die Eigenfunktionen y sind orthogonal oder lassen sich doch — falls zu einem λ mehrere y gehören — durch Auswahl orthogonal machen:

$$\int y^{(\nu)} y^{(\nu')} \, dx = 0,$$

wenn $\nu \neq \nu'$.

Auch wollen wir die Eigenfunktionen normiert voraussetzen, d. h. die multiplikative Konstante, die bei Lösung der homogenen Gleichung selbstverständlich frei bleibt, sei so gewählt, daß

$$\int_0^l y^2 \, dx = 1$$

ist.

7. Es ist für alle Funktionen x und z von einer Variabeln identisch

$$\int_0^l \int_0^l \gamma(s, t) x(s) z(t) \, ds \, dt = - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu} \int_0^l y_\nu(s) x(s) \, ds \cdot \int_0^l y_\nu(t) z(t) \, dt,$$

und die Reihe der rechten Seite konvergiert absolut und gleichmäßig für alle Funktionen x, z, für welche

$$\int_0^l x^2 ds \quad \text{und} \quad \int_0^l z^2 ds$$

unterhalb einer festen Grenze bleiben.

Die y müssen dabei normiert sein.

Die vorstehenden Sätze sind eine plausible Verallgemeinerung der algebraischen Sätze; und zur angenäherten praktischen Lösung einer Integralgleichung dürfte sich der Rückgang auf das algebraische Problem empfehlen. (Zu heuristischen Zwecken hat schon Rayleigh den Rückgang auf das algebraische Problem benutzt.)

360. Anwendung auf lineare Differentialgleichungen. Was sagen nun diese Sätze für die lineare Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 y}{d z^2} + (A(z) + \lambda)\, y = B(z) \tag{1}$$

aus? Da

$$F(z) = \int_0^l \gamma(x, z) B(z)\, dz$$

nur verschwindet, wenn B verschwindet (denn γ ist ein abgeschlossener Kern), so folgt unmittelbar:

1. Die Differentialgleichung hat bei den gegebenen Grenzbedingungen im allgemeinen eine ganz bestimmte Lösung für jedes B.

2. Das ist nur dann nicht immer der Fall, wenn der Parameter λ ein Eigenwert des Kerns γ ist.

3. Ist aber λ ein Eigenwert, so hat die homogene Differentialgleichung Lösungen — wir wissen a priori, daß es zu jedem λ bis auf einen konstanten Faktor nur eine sein kann — und diese sind keine andern als die Eigenfunktionen des Kerns.

In unserem Falle, wo

$$A(z) = 0,$$

wo also die homogene Diffentialgleichung lautete

$$\frac{d^2 y}{d z^2} + \lambda y = 0$$

und die Randbedingungen hießen:

$$\alpha y + \frac{dy}{dz}\bigg|_{z=l} = 0,$$

$$\frac{dy}{dz}\bigg|_{z=0} = 0,$$

kennen wir aber die Lösungen, es sind unsere alten Partikularlösungen

$$A_n \cos \nu_n z,$$

wo die ν_n Wurzeln der transzendenten Gleichung

$$\nu \operatorname{tg} \nu l = \alpha$$

sind.

Also haben wir das spezielle Resultat:

Unsere Funktionen $\cos \nu_n z$ *sind die Eigenfunktionen der linearen Integralgleichung*

$$y + \lambda \int_0^l \gamma(x, z) y \, dz = 0,$$

wo

$$\gamma(x, z) = l + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}(x + z + |x - z|);$$

jede gehört zu einem Eigenwert $\lambda_n = \nu_n^2$; *die transzendente Gleichung der* λ *ist also*

$$\alpha = \sqrt{\lambda} \operatorname{tg} l \sqrt{\lambda}$$

oder

$$\alpha \cos l \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \sin l \sqrt{\lambda} = 0,$$

wo jetzt die linke Seite tatsächlich eine ganze transzendente Funktion von λ *ist* (d. h. eine für alle λ konvergente Potenzreihe), nämlich

$$\alpha\left(1 - \frac{1}{2} l^2 \lambda + \frac{1}{4!} l^4 \lambda^2 - \frac{1}{6!} l^6 \lambda^3 \ldots\right) - \left(l\lambda - \frac{1}{3!} l^3 \lambda^2 + \frac{1}{5!} l^5 \lambda^3 \ldots\right).$$

361. Die Entwicklung nach Eigenfunktionen. Fouriersche Reihen. Wir kommen jetzt auf das Ziel unserer Untersuchung: Können wir jede stetige und zweimal differentiierbare Funktion $f(z)$ im Intervall 0 bis l so darstellen:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n' \cos \nu_n z$$

oder allgemeiner

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n y_n,$$

wo die y_n die Eigenfunktionen einer linearen Integralgleichung sind?

Es ist nun eines der wichtigsten Resultate der Theorie, daß diese Frage zu bejahen ist. Hilbert beweist:

Jede stetige Funktion $f(z)$, *welche sich in der Form*

$$f(z) = \int_0^l \gamma(z, x) h(x) \, dx$$

mit nur stetigem $h(x)$ *darstellen läßt, ist nach den Eigenfunktionen des Kerns entwickelbar.*

Nun wissen wir aber, daß sich jede stetige und zweimal differentiierbare Funktion tatsächlich in obiger Gestalt darstellen läßt, es ist ja nach Nr. 358

$$h(x) = f''(z) + A(z)f(z).$$

Also ist für unseren Fall die Frage zu bejahen:

Jede stetige und zweimal differentiierbare Funktion läßt sich im Intervall 0 *bis* l *durch*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n' \cos \nu_n z$$

darstellen; insofern kann man das allgemeine Integral unseres Schwingungsproblems aus diesen partikulären Integralen zusammensetzen. Die Darstellung ist auch eindeutig, die Reihe konvergiert gleichmäßig und absolut, die A_n' *berechnen sich nach Nr. 354 zu:*

$$A_n' = \frac{4\nu_n}{2\nu_n l + \sin 2\nu_n l} \int_0^l f(z) \cos \nu_n z \, dz.$$

Ebenso läßt sich zeigen, daß im Intervall $-l$ bis $+l$ die Entwicklung gilt

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \nu_n z + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \nu_n z.$$

Machen wir die Annahme, daß f viermal stetig differentiierbar sei, so ist der Beweis aus dem Hilbertschen Satze Nr. 7 in Nr. 359 sehr leicht zu führen.

Dann ist nämlich auch

$$h = f'' + A(z)f$$

noch zweimal differentiierbar, es gibt also eine Funktion g

$$g = h'' + Ah,$$

so daß

$$h(x) = \int_0^l \gamma(s, x) g(s) ds$$

oder

$$f(z) = \int_0^l \int_0^l \gamma(z, t) \gamma(s, t) g(s) ds dt$$

ist. Setzen wir nun in den allgemeinen Entwicklungssatz 7

$$x(s) = g(s),$$
$$z(t) = \gamma(z, t),$$

so wird die linke Seite gerade $f(z)$.

Auf der rechten Seite stehen aber

$$\int_0^l y_\nu(t)\gamma(z,t)\,dt,$$

das ist nach der Integralgleichung

$$-\frac{y_\nu(z)}{\lambda_\nu},$$

dann die Konstanten

$$\int_0^l y_\nu(s)g(s)\,ds = \frac{1}{\lambda_\nu^2}\int_0^l f(z)y_\nu(z) = \frac{1}{\lambda_\nu^2}A_\nu.$$ [1]

Mithin resultiert

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \cdot y_\nu(z),$$

w. z. b. w.

Damit ist unser Problem vom Schlusse des vorigen Paragraphen im bejahenden Sinne beantwortet. Eine analoge Antwort gilt für alle Entwicklungen nach Funktionen, welche als Eigenfunktionen eines abgeschlossenen und allgemeinen Kerns aufgefaßt werden können. Weiß man das, so sind spezielle Konvergenzbeweise nicht mehr nötig, diese liefert ein für allemal die Theorie der linearen Integralgleichungen.

Alle hier nicht ausgeführten mathematischen Beweise der genannten Sätze müssen wir dem eigenen Studium des Lesers überlassen. Genannt seien außer den Arbeiten Hilberts noch die Arbeiten von Erhardt Schmidt in den Math. Ann., Bd. 63 u. 64, und in den Rendiconti del Circolo mat. di Palermo; dann die Arbeiten von Kneser (in denselben Zeitschriften sowie in den Jahresber. d. schles. Gesellsch. f. vaterl. Kultur), Poincaré (Rendiconti del Circolo mat. di Palermo), Picard (Comptes Rendus), v. Mises (Monatshefte f. Math. u. Phys.) u. a., welche die Theorie der linearen Integralgleichungen weiter ausgebildet und angewendet haben. Als Lehrbücher kommen in Betracht: A. Korn: Über freie und erzwungene Schwingungen, Kowalewski: Determinantentheorie (Leipzig 1909) und Kneser: Die Integralgleichungen (Braunschweig 1911).

Noch eine Bemerkung: Lassen wir $\alpha = 0$ werden, so geht die transzendente Gleichung in

$$\operatorname{tg} \nu l = 0$$

über, deren Lösungen

---

1) Die Gleichheit der beiden Integrale folgt aus dem obigen Ausdruck von $f(z)$ durch $g(s)$ und zweimalige Anwendung der Integralgleichung.

$$\nu = \frac{n\pi}{l}$$

sind. Die Partikularintegrale sind

$$1, \quad \cos\frac{\pi x}{l}, \quad \cos\frac{2\pi x}{l}, \ldots$$

Der Entwicklungssatz heißt dann:

Jede stetige und zweimal differentiierbare Funktion $f(z)$ läßt sich im Intervall 0 bis l in die Fouriersche Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi}{l} z$$

entwickeln; die Entwicklung ist absolut und gleichmäßig konvergent; die Koeffizienten A_n berechnen sich zu

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(z) \cos\frac{\pi}{l} z\, dz, \qquad \text{für } n = 1, 2 \ldots$$

dagegen, wie man als Grenzwert für $\nu_1 = 0$ leicht erkennt,

$$A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(z)\, dz.$$

Im Intervall $-l$ bis $+l$ gilt die Entwicklung

$$f(z) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{\pi n}{l} z + B_n \sin\frac{\pi n}{l} z\right).$$

Allerdings ist der Grenzübergang deshalb nicht ohne weiteres erlaubt, weil im Falle $\alpha = 0$ keine Greensche Funktion existiert, denn die stetige Lösung $z = l$ erfüllt jetzt beide Randbedingungen. Doch zeigt Hilbert in der zweiten Mitteilung, wie in diesem Falle ein Ersatz für die Greensche Funktion gebildet werden kann, womit die Rückführung auf eine lineare Integralgleichung ermöglicht wird.

Man nennt eine solche Reihe gewöhnlich nach Fourier, obwohl das Problem der Entwicklung einer Funktion nach Sinus- und Kosinusgliedern schon von Bernoulli, Euler und d'Alembert im Anschlusse an ihre Untersuchungen über das Schwingen elastischer Linien gestellt und auch teilweise beantwortet wurde. Aber Fourier gab zuerst die obige Methode der Koeffizientenbestimmung.

Dirichlet hat gezeigt, daß die Reihe schon dann konvergiert — allerdings nicht immer gleichmäßig und absolut —, wenn $f(z)$ stetig ist und nur eine endliche Anzahl von Maxima und Minima hat.

Man findet eine Darstellung in vielen Lehrbüchern, z. B.

Fricke: Analytisch-funktionentheoretische Vorlesungen.

Jordan: Cours d'Analyse, t. II.

Riemann-Weber: Partielle Differentialgleichungen, Bd. 1.

Ausführliches Referat und Literaturübersicht bei

Burkhardt: Jahresbericht der deutschen Math.-Ver. 10, 1902, und Enzyklopädieartikel II, A 9a.

§ 60. Statik isotroper homogener Medien.

362. Die Spannungsdyade eine Funktion der Deformationsdyade. Wir erinnern an unsere allgemeinen, für jedes Medium gültigen Grundgleichungen:

$$\mu \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{\varkappa} + \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z}$$

(siehe §§ 38 und 39), wozu noch das Boltzmannsche Grundgesetz tritt, daß die Spannungsdyade, die durch die neun Komponenten der inneren Spannungen $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$, $\bar{\sigma}_z$ gegeben ist, symmetrisch ist.

Wir hatten nun gleich zu Anfang, bei Einführung des Spannungsbegriffes, den Grundsatz aufgestellt, daß jede Spannung von einer Gestaltsänderung, Deformation, begleitet, d. h. von ihr verursacht sei (§ 9).

Betrachten wir also ein Medium in Ruhe und habe es gegen einen Normalzustand, in dem die Spannungen Null sein mögen, eine Gestaltsänderung erlitten: es sei jeder Punkt ($\bar{r}'$) um ein Stück $\bar{s}$ nach $\bar{r}$ verschoben.

Diese Verschiebung selbst freilich ist noch nicht maßgebend für die Gestaltsänderung, sondern die relative Verschiebung der Teile gegeneinander, d. h. die Differenzen $\Delta \bar{s}$ benachbarter Punkte.

Da aber ferner die Ursachen der Spannung in unmittelbarer (differentialer) Nähe der betrachteten Stelle zu suchen sein sollten, so wird es auf die differentielle Verschiebung $d\bar{s}$ ankommen, d. h.

die Spannungsdyade wird eine Funktion der Deformationsdyade $\left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{s}}{\partial y}, \frac{\partial \bar{s}}{\partial z}\right)$ *sein.*

Daß die neun Komponenten von $\frac{\partial \bar{s}}{\partial x}$ usw. eine Dyade bilden, erkennt man daraus, daß sie gemäß der Formel

$$d\bar{s} = \frac{\partial \bar{s}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{s}}{\partial y} dy + \frac{\partial \bar{s}}{\partial z} dz$$

den Vektor $d\bar{r}$ in den Vektor $d\bar{s}$ linear homogen transformieren (siehe Definition der Dyade im Anhang, auch in Nr. 205).

363. Die Deformation als affine Transformation. Werde der Punkt $A_0(\bar{r}_0')$ in $X_0(\bar{r}_0' + \bar{s}_0 = \bar{r}_0)$ transformiert, der benachbarte Punkt $A(\bar{r}' = \bar{r}_0' + d\bar{r}')$ in $X(\bar{r} = \bar{r}_0 + d\bar{r})$, so kann man dx, dy, dz als infinitesimale Koordinaten des Punktes X in der Umgebung von X_0 auffassen, ebenso dx', dy', dz' als Koordinaten von A in der Umgebung von A_0 bezüglich eines dem ersten parallelen Systems mit A_0 als Anfangspunkt. Durch die Verschiebung $\bar{s} = \bar{s}_0 + \frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{r}} \cdot d\bar{r}$ werden die Koordinaten dx', dy', dz' in dx, dy, dz transformiert. Dies geschieht mittels der Formeln

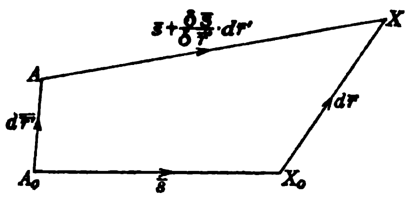


Fig. 256.

$$d\bar{r}' = d\bar{r} - d\bar{s} = d\bar{r} - \frac{\partial \bar{s}}{\partial x} dx - \frac{\partial \bar{s}}{\partial y} dy - \frac{\partial \bar{s}}{\partial z} dz = d\bar{r} - \frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{r}} \cdot d\bar{r}$$

oder in Komponenten (u, v, w seien die Komponenten von $\bar{s}$)

$$dx' = \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx - \frac{\partial u}{\partial y} dy - \frac{\partial u}{\partial z} dz \quad \text{usw.}$$

Diese Transformation ist als linear homogen in den infinitesimalen Koordinaten affin zu nennen.

Nun läßt sich aber jede Affinität in eine reine Affinität, bei welcher die drei sich entsprechenden zueinander orthogonalen Achsen in Deckung bleiben, und in eine Drehung zerlegen, bei welcher keine Gestaltsänderung eintritt.

Um diese Zerlegung auszuführen, berechnen wir die Längenänderung von $d\bar{r}$, denn für diese wird allein die reine Deformation maßgebend sein, während eine Drehung die Längen ungeändert läßt.

Schreiben wir

den Vektor mit den Komponenten

$$1 - \frac{\partial u}{\partial x}, \quad -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \text{d. h. } \frac{\partial}{\partial x}(\bar{r} - \bar{s}) \text{ als } \bar{a},$$

den Vektor mit den Komponenten

$$-\frac{\partial u}{\partial y}, \; 1 - \frac{\partial v}{\partial y}, \quad -\frac{\partial w}{\partial y} \text{ als } \bar{b},$$

den Vektor mit den Komponenten

$$-\frac{\partial u}{\partial z}, \quad -\frac{\partial v}{\partial z}, \; 1 - \frac{\partial w}{\partial z} \text{ als } \bar{c},$$

so ist die Transformation gegeben durch

$$d\bar{r}' = \bar{a}\,dx + \bar{b}\,dy + \bar{c}\,dz.$$

Also ist die Änderung des Quadrates der Länge ($\bar{r}$ gibt die neue, $\bar{r}'$ die alte Lage)

$$-(d\bar{r}')^2 + d\bar{r}^2 = (1-a^2)dx^2 + (1-b^2)dy^2 + (1-c^2)dz^2 - 2\bar{a}\cdot\bar{b}\,dx\,dy - 2\bar{b}\cdot\bar{c}\,dy\,dz - 2\bar{c}\cdot\bar{a}\,dz\,dx.$$

Maßgebend für die Deformation sind also die sechs Größen:

$$\left.\begin{aligned}
e_x &= 1-a^2 = 2\frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,\\
e_y &= 1-b^2 = 2\frac{\partial v}{\partial y} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,\\
e_z &= 1-c^2 = 2\frac{\partial w}{\partial z} - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2,\\
g_{yz} &= -\bar{b}\cdot\bar{c} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial z},\\
g_{zx} &= -\bar{c}\cdot\bar{a} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial w}{\partial x},\\
g_{xy} &= -\bar{a}\cdot\bar{b} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}.
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Betrachten wir die infinitesimale quadratische Mittelpunktfläche

$$e_x dx^2 + e_y dy^2 + e_z dz^2 + 2g_{yz}dy\,dz + 2g_{zx}dz\,dx + 2g_{xy}dx\,dy = \text{const},$$

so wird sie von reellen Punkten gebildet, die gleiche Änderung des Quadrates ihres Abstandes von X_0 erfahren haben. Diese Fläche hat bekanntlich drei Hauptachsen, deren Endpunkte maximale, resp. minimale, resp. maximinimale Entfernung von X_0 besitzen. Die Richtungen dieser Hauptachsen werden also den Richtungen minimaler, resp. maximaler, resp. maximinimaler relativer Längenänderung $\frac{d\bar{r}^2 - d\bar{r}'^2}{d\bar{r}^2}$ entsprechen.

Sucht man aber die Extremwerte von $d\bar{r}^2 - d\bar{r}'^2$ bei gegebenem $d\bar{r}^2$, so hat man bekanntlich die Gleichungen zu bilden

$$\left.\begin{aligned}
e_x dx + g_{xy}dy + g_{xz}dz &= \sigma\,dx,\\
e_y dy + g_{yx}dx + g_{yz}dz &= \sigma\,dy,\\
e_z dz + g_{zx}dx + g_{zy}dy &= \sigma\,dz,
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

woraus sich für den Multiplikator σ die Gleichung dritten Grades ergibt:

$$\begin{vmatrix} e_x - \sigma & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{xy} & e_y - \sigma & g_{yz} \\ g_{xz} & g_{yz} & e_z - \sigma \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

die bekanntlich stets drei reelle Wurzeln $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ hat (Hauptachsenproblem der Flächen zweiten Grades). $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sind dann die maximalen, minimalen resp. maximinimalen Werte von $\frac{d\bar{r}^2 - d\bar{r}'^2}{d\bar{r}^2}$. Man erkennt das sofort, wenn man die Gleichungen (2) mit dx, dy, dz multipliziert und addiert.

Damit ist die reine Deformation bereits gefunden: sie besteht in drei einfachen Dehnungen (resp. Schrumpfungen) in Richtung der drei Hauptachsen der betrachteten Fläche zweiter Ordnung in den Verhältnissen

$$1 : \sqrt{1-\sigma_1}, \quad 1 : \sqrt{1-\sigma_2}, \quad 1 : \sqrt{1-\sigma_3}$$

(positives σ gibt eine Dehnung, negatives σ eine Schrumpfung).

Um nun die Drehung zu finden, welche in der ganzen Transformation enthalten ist, suchen wir auch die Richtungen der maximalen usw. Dehnungen vor der Transformation, d. h. im System der x', y', z'. Zu dem Zweck denken wir uns die Transformationsformel aufgelöst:

$$d\bar{r} = \bar{a}'\,dx' + \bar{b}'\,dy' + \bar{c}'\,dz'$$

und bilden ganz wie früher

$$d\bar{r}^2 = e_x'\,dx'^2 + e_y'\,dy'^2 + e_z'\,dz'^2 + 2g_{xy}'\,dx'dy' + \cdots,$$

bestimmen die Hauptachsen der infinitesimalen Fläche zweiter Ordnung

$$e_x'\,dx'^2 + e_y'\,dy'^2 + \cdots = \text{const},$$

d. h. lösen die homogenen linearen Gleichungen

$$e_x'\,dx' + g_{xy}'\,dy' + g_{xz}'\,dz' = \sigma'\,dx' \quad \text{usw.},$$

wobei aber nicht nötig ist, die Gleichung dritten Grades für σ' noch einmal aufzulösen, da wegen

$$\frac{d\bar{r}^2 - d\bar{r}'^2}{d\bar{r}^2} = \sigma \quad \text{und} \quad \frac{d\bar{r}'^2 - d\bar{r}^2}{d\bar{r}'^2} = \sigma'$$

$$1 - \sigma = \frac{1}{1-\sigma'}$$

ist.

Sind so die Richtungen extremaler Dehnung vor und nach der Transformation bestimmt, so ist die gesuchte Drehung natürlich die, welche diese beiden Richtungen ineinander überführt.

364. Die Invarianten der Deformation. Die Größen e_x, e_y, e_z, g_{xy}, g_{xz}, g_{yz} allein sind maßgebend für die reine Deformation, doch hängen sie noch von der Wahl des Koordinatensystems ab. Invariant gegen dessen Wahl sind hingegen σ_1, σ_2, σ_3. Und das sind auch die einzigen unabhängigen Invarianten. Denn sie bestimmen vollständig die Gestalt der in der vorigen Nummer betrachteten Flächen zweiter Ordnung und damit auch die ganze Gestaltsänderung.

Statt $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ führt man besser drei rationale Invarianten ein: die Koeffizienten der Gleichung für σ, die ja drei unabhängige Funktionen von $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sind. Entwickeln wir die Gleichung

$$\begin{vmatrix} e_x - \sigma & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yx} & e_y - \sigma & g_{yz} \\ g_{zx} & g_{zy} & e_z - \sigma \end{vmatrix} = 0,$$

so lauten die Koeffizienten: -1, dann

$$e_x + e_y + e_z = J_1,$$

$$-(e_y e_z + e_z e_x + e_x e_y - g_{yz}^2 - g_{zx}^2 - g_{xy}^2) = -J_2$$

und

$$\begin{vmatrix} e_x & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yz} & e_y & g_{yz} \\ g_{zx} & g_{zy} & e_z \end{vmatrix} = J_3.$$

J_1, J_2, J_3 sind die drei gesuchten rationalen Invarianten.

Wir wollen noch die sogenannte **kubische Dilatation** betrachten, d. h. die relative Volumsvergrößerung eines Elementes. Betrachten wir das Volumen $dx\,dy\,dz$, so hat dasselbe vor der Deformation das Volumen

$$D\left(\frac{dx', dy', dz'}{dx, dy, dz}\right) dx\,dy\,dz,$$

wo D die Funktionaldeterminante bedeutet. Diese ist aber

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial y} & -\frac{\partial u}{\partial z} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} & 1 - \frac{\partial v}{\partial y} & -\frac{\partial v}{\partial z} \\ -\frac{\partial w}{\partial x} & -\frac{\partial w}{\partial y} & 1 - \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \Delta$$

und stellt also das reziproke Vergrößerungsverhältnis des Volumens dar. Nun ist nach der Multiplikationsregel der Determinanten

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} \bar{a}^2 & \bar{a}\cdot\bar{b} & \bar{a}\cdot\bar{c} \\ \bar{a}\cdot\bar{b} & \bar{b}^2 & \bar{b}\cdot\bar{c} \\ \bar{a}\cdot\bar{c} & \bar{b}\cdot\bar{c} & \bar{c}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - e_x & -g_{xy} & -g_{xz} \\ -g_{xy} & 1 - e_y & -g_{yz} \\ -g_{xz} & -g_{yz} & 1 - e_z \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} e_x - 1 & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{xy} & e_y - 1 & g_{yz} \\ g_{xz} & g_{yz} & e_z - 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 - J_1 + J_2 - J_3.$$

Daraus folgt

$$1 - \Delta = 1 - \sqrt{1 - J_1 + J_2 - J_3}.$$

Diese Größe ist der Volumszuwachs pro Volumseinheit des deformierten Zustandes; sie heißt die kubische Dilatation und ist natürlich eine Invariante.

365. Spezialfall: Übergang zu unendlich kleinen Deformationen. Wir wollen in dieser Nummer u, v, w und auch ihre Ableitungen als sehr kleine Größen ansehen und prinzipiell Größen zweiter und höherer Ordnung vernachlässigen. Für die geringen Deformationen, wie sie bei festen Körpern und nicht zu großen Kräften vorkommen, werden wir damit eine genügende Annäherung erzielen, außerdem aber hat die Annahme auch noch für andere Zwecke große Bedeutung (siehe § 61).

Wir beginnen mit der Bemerkung, daß sich zwei Transformationen der Art

$$x' = (1 + a_1)x + a_2 y + a_3 z \quad \text{usw.}$$

$$x'' = (1 + a_1')x' + a_2' y' + a_3' z' \quad \text{usw.}$$

so zusammensetzen, daß

$$x'' = (1 + a_1 + a_1')x + (a_2 + a_2')y + (a_3 + a_3')z \quad \text{usw.}$$

ist, wenn die a klein sind und Größen zweiter Ordnung vernachlässigt werden. Der einfache Beweis kann wohl dem Leser überlassen bleiben. Setzen wir also

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \gamma_{xy}, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \gamma_{zy}, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \gamma_{xz},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \omega_z, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \omega_x, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \omega_y,$$

so können wir die ursprüngliche Substitution

$$dx' = \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx - \frac{\partial u}{\partial y} dy - \frac{\partial u}{\partial z} dz \quad \text{usw.}$$

in die folgenden beiden zerlegen:

$$\begin{aligned} dx'' &= (1 - \varepsilon_x)\, dx - \gamma_{xy} dy - \gamma_{xz} dz, \\ dy'' &= -\gamma_{xy} dx + (1 - \varepsilon_y) dy - \gamma_{yz} dz, \\ dz'' &= -\gamma_{xz} dx - \gamma_{yz} dy + (1 - \varepsilon_z) dz \end{aligned}$$

mit symmetrischer Determinante und

$$\begin{aligned} dx' &= dx'' + \omega_z dy'' - \omega_y dz'', \\ dy' &= -\omega_z dx'' + dy'' + \omega_x dz'', \\ dz' &= +\omega_y dx'' - \omega_x dy'' + dz'' \end{aligned}$$

mit antisymmetrischer Determinante.

Die zweite aber ist eine infinitesimale Drehung; denn nennen wir $\bar{\omega}$ den Vektor mit den Komponenten ω_x, ω_y, ω_z, so schreibt sich die letzte Transformation

$$-d\bar{r}' + d\bar{r}'' = d\bar{s}' = \overline{\omega\, dr''}.$$

Man nennt übrigens den Vektor $2\bar{\omega}$ mit den Komponenten $\frac{\partial}{\partial y} w - \frac{\partial}{\partial z} u$ usw. auch den Rotor von $\bar{s}$, in Zeichen rot $\bar{s}$, also

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \bar{s}.$$

Die erste Transformation mit symmetrischer Determinante ist aber eine reine Deformation; denn sucht man die Richtungen, welche fest bleiben, so hat man die Gleichungen zu lösen

$$d\bar{r}'' = \lambda d\bar{r}$$

oder

$$(1 - \varepsilon_x)dx - \gamma_{xy}dy - \gamma_{xz}dz = \lambda dx \quad \text{usw.}$$

Das sind aber dieselben Gleichungen, welche die Hauptachsen der ersten in Nr. 362 besprochenen Verzerrungsfläche bestimmen, denn für unendlich kleine Verrückungen wird

$$e_x = 2\varepsilon_x \text{ usw.}, \qquad g_{yz} = 2\gamma_{yz} \text{ usw.}$$

Man braucht also nur

$$-\lambda + 1 = \frac{1}{2}\sigma$$

zu setzen, um die Identität vollständig zu machen. Also stehen die festbleibenden Richtungen senkrecht aufeinander: die erste Transformation ist in der Tat eine reine Affinität.

Die obige Zerlegung ist also bei unendlich kleinen Verschiebungen die in der vorigen Nummer allgemein besprochene Zerlegung in eine reine Deformation und eine Drehung.

Die Invarianten sind

1. $$I_1 = \frac{1}{2} J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

ein aus $\bar{s}$ gebildeter Skalar, den man die Divergenz nennt: div $\bar{s}$.

2. $$I_2 = \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x + \varepsilon_x\varepsilon_y - \gamma_{yz}^2 - \gamma_{zx}^2 - \gamma_{xy}^2 = \frac{1}{4}J_2.$$

3. $$I_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = \frac{1}{8}J_3.$$

Die kubische Dilatation wird in konsequenter Annäherung erster Ordnung:

$$1 - \varDelta = 1 - \sqrt{1 - 2I_1 + 4I_2 - 8I_3} \doteq I_1 = \operatorname{div} \bar{s},$$

da I_2 zweiter Ordnung, I_3 dritter Ordnung ist.

366. Die Arbeit der inneren Kräfte, welche dieselben leisten, wenn man den Körper aus dem ursprünglichen Zustand in den deformierten bringt, ist

$$A_i = \underset{V}{\mathrm{S}} \int \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z}\right) \cdot d\bar{s} \cdot dV - \underset{F}{\mathrm{S}} \int \bar{\sigma}_\nu \cdot d\bar{s} \cdot dF,$$

denn das erste Integral enthält auch die Arbeit, welche von den Oberflächenspannungen geleistet wird, diese ist also abzuziehen in Form des zweiten Integrals, das über die Oberfläche F zu erstrecken ist. Das Integral $\int$ bezieht sich auf die Zeit, in der die gesammte Dehnung $\bar{s}$ vollzogen wird. Die Koordinaten x, y, z sind die augenblicklichen Ortszeiger.

Nun läßt sich aber das erste Integral nach dem Gaußschen Satze umformen (siehe Anhang III, 1)

$$\int \underset{V}{\mathrm{S}} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z}\right) \cdot d\bar{s} \cdot dV = \int \underset{F}{\mathrm{S}} \bar{\sigma}_\nu \cdot d\bar{s} \cdot dF$$

$$- \int \underset{V}{\mathrm{S}} \left(\bar{\sigma}_x \frac{\partial d\bar{s}}{\partial x} + \bar{\sigma}_y \frac{\partial d\bar{s}}{\partial y} + \bar{\sigma}_z \frac{\partial d\bar{s}}{\partial z}\right) dV.$$

Also ist die Arbeit der inneren Kräfte, wenn man noch Komponenten einführt und die Symmetrie der Spannungsdyade betrachtet

$$A_i = -\int \underset{V}{\mathrm{S}} \left\{X_x \frac{\partial du}{\partial x} + Y_y \frac{\partial dv}{\partial y} + Z_z \frac{\partial dw}{\partial z}\right.$$

$$\left. + X_y\left(\frac{\partial du}{\partial y} + \frac{\partial dv}{\partial x}\right) + Y_z\left(\frac{\partial dv}{\partial z} + \frac{\partial dw}{\partial y}\right) + Z_x\left(\frac{\partial dw}{\partial x} + \frac{\partial du}{\partial z}\right)\right\} dV.$$

Dabei wollen wir beachten, daß du, dv, dw die Verschiebungen sind, welche ein bestimmtes materielles Teilchen in der Zeit dt erleidet.

Wir dürfen nun aber nicht $\frac{\partial du}{\partial x}$ mit $d\frac{\partial u}{\partial x}$ vertauschen, denn die Differentiationen $\frac{\partial}{\partial x}$ nach dem Ort bei festgehaltener Zeit und $\frac{d}{dt}$ nach der Zeit bei festgehaltenem materiellem Punkt (nicht etwa festgehaltenem Orte!) sind nicht unabhängig voneinander. Wohl ist

$$\frac{\partial}{\partial x}\partial u = \partial\frac{\partial u}{\partial x},$$

wenn ∂ die Differentiation nach der Zeit bei festgehaltenem Orte bezeichnet.

Der Unterschied dieser beiden Differentiationen $\frac{d}{dt}$ und $\frac{\partial}{\partial t}$ nach der Zeit, das eine Mal bei festgehaltenem materiellem Punkte, das andere Mal bei festgehaltenem Orte, ist fundamental für die ganze Mechanik deformierbarer Systeme. Eine Aussage über $\frac{d}{dt}$ ist die Antwort auf die Frage: was geschieht an einem bestimmten materiellen Punkte? eine Aussage über $\frac{\partial}{\partial t}$ ist die Antwort auf die Frage: was geschieht an einem bestimmten Orte?

Wir wollen die Beziehung zwischen beiden Differentiationsarten jetzt sofort feststellen.

367. Die Übergangsgleichungen von $d\frac{\partial u}{\partial x}$ zu $\frac{\partial}{\partial x}du$ usw. erhalten wir durch folgende Überlegung:

Ist U irgendeine Größe, die sowohl als Funktion des Ortes ($\bar{r}$) und der Zeit allein wie auch als Funktion eines bestimmten materiellen Punktes und der Zeit allein aufgefaßt werden kann, so ist nach den Regeln der impliziten Differentiation

$$\frac{d}{dt}U(\bar{r}, t) = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \bar{r}} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt},$$

wenn $\frac{d}{dt}$ die Differentiation bei festgehaltenem materiellen Punkte, $\frac{\partial}{\partial t}$ die bei festgehaltenem Orte bezeichnet.

Demnach ist in unserem Falle

$$d\frac{\partial u}{\partial x} = \partial\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar{r}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot d\bar{r}, \tag{α}$$

wobei hier $d\bar{r}$ die Verschiebung des Teilchens in der Zeit dt bedeutet, d. h.

$$d\bar{r} = d\bar{s}.$$

Ebenso ist

$$du = \partial u + \frac{\partial u}{\partial \bar{r}} \cdot d\bar{s},$$

also

$$\frac{\partial}{\partial x} du = \frac{\partial}{\partial x} \partial u + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{r}}\right) \cdot d\bar{s} + \frac{\partial u}{\partial \bar{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} d\bar{s}. \tag{β}$$

Da aber, wie schon in der vorigen Nummer bemerkt,

$$\frac{\partial}{\partial x} \partial u = \partial \frac{\partial u}{\partial x}$$

und auch

$$\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \bar{r}},$$

weil es sich um zwei Differentiationen nach dem Orte allein handelt, so folgt durch Subtraktion von (α) und (β)

$$\left.\begin{aligned} d\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} du - \frac{\partial u}{\partial \bar{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} d\bar{s}. \\ \text{Ebenso natürlich} \qquad d\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} du - \frac{\partial u}{\partial \bar{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial y} d\bar{s}, \\ d\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} dv - \frac{\partial v}{\partial \bar{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} d\bar{s}. \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

usw.

Dies sind die gesuchten Übergangsgleichungen von $\frac{\partial}{\partial x} du$ zu $d\frac{\partial u}{\partial x}$, denn $\frac{\partial}{\partial x} d\bar{s}$ hat ja die Komponenten

$$\frac{\partial}{\partial x} du, \quad \frac{\partial}{\partial x} dv, \quad \frac{\partial}{\partial x} dw.$$

Wir werden diese Formeln brauchen, um jetzt die Hauptaufgabe zu lösen, nämlich

368. Die Beziehung zwischen Spannung und Deformation herzuleiten.

An die Spitze stellen wir die durch die Erfahrung begründete Hypothese, daß jedem materiellen Volumteil dV eine bestimmte „innere Energie“ $d\Phi = \varphi \cdot dV$ zukomme, wobei die spezifische innere Energie φ bei bloßer Beachtung mechanischer und thermischer Vorgänge, also z. B. bei Ausschaltung elektromagnetischer Prozesse, eine eindeutig bestimmte Funktion der absoluten Temperatur Θ und der Deformation und zwar der reinen Deformation des Mediums sei. Nehmen wir weiter das Medium als homogen und isotrop an, d. h. setzen wir voraus, daß keine ausgezeichneten Stellen und Richtungen vorhanden sind (wie das z. B. in Kristallen wohl der Fall ist), so muß φ eine bloße Funktion von Θ und den Invarianten J_1, J_2, J_3 sein:

$$\varphi = \varphi(\Theta, J_1, J_2, J_3),$$

deren Koeffizienten für einen bestimmten Stoff konstant sind

Die Rolle dieser inneren Energie ist nun folgende: Leisten äußere Kräfte in der Zeit dt auf das System die Arbeit dA_a und strömt die Wärmemenge dQ zu (im mechanischen Maße gemessen), so wird die gesamte zugeführte Energie verwendet 1. zur Vermehrung der lebendigen Kraft dE, 2. zur Vermehrung der inneren Energie $d\Phi$.

Also ist

$$dA_a + dQ = dE + d\Phi. \tag{I}$$

Das ist der sogenannte **erste Hauptsatz der Thermodynamik.** Andererseits ist nach dem Energiesatz der Mechanik

$$dE = dA_a + dA_i, \tag{II}$$

wo dA_i die Arbeit der inneren Spannungen bedeutet.

Vergleichung von (I) und (II) gibt

$$d\Phi = dQ - dA_i,$$

d. h.

$$d\mathsf{S}\varphi\, dV = \mathsf{S}\, dq\, dV - dA_i.$$

(dq die in der Zeit dt zuströmende Wärmemenge pro Volumseinheit). Dabei ist nun aber dq kein vollständiges Differential, d. h. es gibt keine bestimmte Wärmemenge Q, welche dem Körper innewohnt. Hingegen ist, wie der **zweite Hauptsatz der Thermodynamik** aussagt, für jedes Volumelement in der Ruhe

$$\frac{dq\,dV}{\Theta} = dS\,dm$$

ein vollständiges Differential: S heißt die (spezifische) **Entropie**; sie ist eine Funktion derselben Variabeln wie φ, d. h. eine Funktion von J_1, J_2, J_3, Θ.

Es ist nun vorteilhafter, statt Θ eben dieses S als neue unabhängige Variabele einzuführen und dementsprechend

$$dq\,dV = dS \cdot dm \cdot \Theta$$

zu setzen. Φ ebenso φ seien hinfort Funktionen von J_1, J_2, J_3 und der Entropie S.

Also lautet die Grundgleichung

$$d\mathsf{S}\varphi\, dV = \mathsf{S}\,\Theta\, dS\, dm - dA_i.$$

Die Differentiale beziehen sich auf die Zeit; diese Differentiation ist natürlich bei konstanter Masse vorzunehmen.

Wenn wir nunmehr aus Nr. 366 den Ausdruck für A_i hinzunehmen und beachten, daß $dV = \frac{1}{\mu}\, dm$, wo dann dm hinsichtlich der Zeitdifferentiation konstant ist, so folgt aus der vorstehenden Gleichung bei Übergang zum Volumelement

$$\begin{aligned}\mu d\left(\frac{\varphi}{\mu}\right) = \mu\Theta dS + \Big\{ & X_x \frac{\partial}{\partial x} du + Y_y \frac{\partial}{\partial y} dv + Z_z \frac{\partial}{\partial z} dw \\ & + X_y \left(\frac{\partial}{\partial y} du + \frac{\partial}{\partial x} dv\right) + Y_z \left(\frac{\partial}{\partial z} dv + \frac{\partial}{\partial y} dw\right) \\ & + Z_x \left(\frac{\partial}{\partial x} dw + \frac{\partial}{\partial z} du\right)\Big\} \cdot \qquad \text{(B)}\end{aligned}$$

Dabei ist natürlich die spezifische Masse μ ebenfalls eine Invariante. Denn sei $\mathfrak{v}$ das spezifische Volumen, so ist wegen $dV = \mathfrak{v}dm$

$$\mathfrak{v} = \frac{1}{\mu} \cdot$$

Sei ferner $\mathfrak{v}'$ das spezifische Volumen im Normalzustand: also

$$dV' = dx'dy'dz' = \mathfrak{v}'dm,$$

so ist

$$\frac{dV'}{dV} = \frac{\mathfrak{v}'}{\mathfrak{v}} = \Delta = \sqrt{1 - J_1 + J_2 - J_3}.$$

Also

$$\mu = \frac{1}{\mathfrak{v}} = \frac{1}{\mathfrak{v}'}\sqrt{1 - J_1 + J_2 - J_3},$$

wo $\mathfrak{v}'$ eine Konstante ist.

369. Fortsetzung. Wir wollen nun bei Gleichgewichtsproblemen ($dE = 0$) die Grundgleichung (B) auch auf virtuelle Änderungen dS, du, dv, dw ausdehnen. Gleichung (II) gilt ja auch dann noch (Prinzip der virtuellen Arbeiten in der trivialen Form, daß im Gleichgewichtsfall die gesamte virtuelle Arbeit aller Kräfte Null ist), und ebenso wollen wir den ersten und zweiten Hauptsatz auf diesen Fall ausgedehnt denken.

Dann zerfällt Gleichung (B) in 10 Gleichungen, denn wir können dS, $\frac{\partial}{\partial x} du$ usw. als unabhängige Variabele ansehen, da wir die Verteilung von du, dv, dw in der Umgebung eines jeden herausgegriffenen Punktes frei haben. Nun steht aber auf der linken Seite, wenn wir noch die spezifische innere Energie pro Masseneinheit:

$$\psi(J_1, J_2, J_3, S) = \frac{1}{\mu}\varphi$$

einführen,

$$\mu\frac{\partial\psi}{\partial S}dS + \mu\frac{\partial\psi}{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}d\frac{\partial u}{\partial x} + \cdots$$

— die J sind ja Funktionen der $\frac{\partial u}{\partial x}$ usw., siehe Nr. 363 und 364 —. Auf der rechten Seite von (B) aber stehen $\frac{\partial}{\partial x}du$ usw.; wir brauchen also noch die Übergangsgleichungen (A) aus Nr. 367.

Nehmen wir (A) und (B) zusammen, so folgen die 10 Gleichungen:

1.
$$\Theta = \frac{\partial \psi}{\partial S}, \tag{C}$$

eine Grundgleichung der Thermodynamik, welche die Beziehung von Temperatur, Entropie und Deformation vermittels der spezifischen inneren Energie pro Masseneinheit darstellt; dann

2.
$$\left.\begin{aligned}
X_x &= \mu \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} - \frac{\partial \psi}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial \frac{\partial w}{\partial x}} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right\} \\
X_y &= \mu \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}} - \frac{\partial \psi}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial \frac{\partial w}{\partial x}} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \\
Y_x &= \mu \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}} - \frac{\partial \psi}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial \frac{\partial v}{\partial y}} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial \frac{\partial w}{\partial y}} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right\} \\
&\text{usw. in leicht erkennbarer Bildung.}
\end{aligned}\right\} \tag{D}$$

In solcher Weise berechnen sich also die inneren Spannungen aus der spezifischen inneren Energie ψ pro Masseneinheit. Die Differentiationen verstehen sich bei konstanter Entropie. Man nennt ψ auch das elastische Potential.

Es ist nun nur die Frage, ob auch die Bedingungen

$$X_y = Y_x \quad \text{usw.}$$

erfüllt sind.

Man erkennt dies nun in der Tat leicht, wenn man die vorstehenden Ausdrücke unter Benutzung des Umstandes, daß ψ eine bloße Funktion von J_1, J_2, J_3 ist, und der Ausdrücke dieser Invarianten aus Nr. 364 durch die g und e sowie der Formeln aus Nr. 363 für diese g und e umrechnet. Eine ganz elementare Rechnung ergibt:

$$\left.\begin{aligned}
X_x &= 2\mu \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial J_1}(1 - e_x) + \frac{\partial \psi}{\partial J_2}(J_1 - J_2 - g_{yz}^2 - e_x + e_y e_z) \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{\partial \psi}{\partial J_3}(-J_3 - g_{yz}^2 + e_y e_z) \right\} \\
X_y = Y_x &= 2\mu \left\{ -g_{xy}\left(\frac{\partial \psi}{\partial J_1} + \frac{\partial \psi}{\partial J_2}\right) + (g_{xz} g_{yz} - e_z g_{xy})\left(\frac{\partial \psi}{\partial J_2} + \frac{\partial \psi}{\partial J_3}\right) \right\} \\
&\text{usw. in zyklischer Reihenfolge.}
\end{aligned}\right\} \tag{D'}$$

Mit Aufstellung dieser Formeln ist unsere Aufgabe gelöst: Die Spannungskomponenten sind durch die Ableitungen der Verschiebungen u, v, w ausgedrückt.

Setzt man die erhaltenen Ausdrücke in die statischen Gleichungen

$$0 = \bar{x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z}$$

ein, so hat man drei partielle Differentialgleichungen für die unbekannten Verschiebungen u, v, w.

Um sie ganz zu bestimmen, müssen am Rande entweder noch die äußeren Spannungen $\bar{\sigma}_\nu$ gegeben sein (natürlich so, daß die Summe und die Summe der Momente aller äußeren Kräfte Null ist), oder aber die Verschiebungen u, v, w selbst, d. h. man kann nach der Gestalt des Körpers fragen, die er annimmt, wenn er bestimmten äußeren Kräften unterworfen ist, oder wenn er am Rande in bestimmter Weise eingespannt ist.

Will man statt ψ, der spezifischen inneren Energie pro Masseneinheit, wieder φ, die spezifische innere Energie pro Volumseinheit einführen, so kann man das leicht, indem man

$$\psi = \frac{1}{\mu} \varphi$$

setzt und beachtet, daß nach Nr. 368

$$\mu = \frac{1}{v'} \sqrt{1 - J_1 + J_2 - J_3}$$

ist. Man findet so leicht:

$$\left.\begin{aligned} X_x = 2\Big\{ & \frac{\partial \varphi}{\partial J_1}(1 - e_x) + \frac{\partial \varphi}{\partial J_2}(J_1 - J_2 - g_{yz}^2 - e_x + e_y e_z) \\ & + \frac{\partial \varphi}{\partial J_3}(- J_3 - g_{yz}^2 + e_y e_z)\Big\} + \varphi \\ X_y = Y_x = 2\Big\{ & - g_{xy}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial J_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial J_2}\right) + (g_{xz} g_{yz} - e_z g_{xy})\left(\frac{\partial \varphi}{\partial J_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial J_3}\right)\Big\} \\ & \text{usw. in zyklischer Reihenfolge.} \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{D}')$$

Die spezifische innere Energie φ, eine Funktion von J_1, J_2, J_3 und der Entropie S, ist noch unbestimmt; sie hängt von den besonderen Eigenschaften des Körpers ab.

Das Verhalten eines jeden isotropen, homogenen Körpers kann also durch die Angabe der ihm eigentümlichen Funktion φ (resp. ψ) statisch und thermodynamisch charakterisiert werden.

Eliminiert man die Entropie S vermittels der Gleichung (C)

$$\Theta = \frac{\partial \psi}{\partial S} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial S},$$

so erhält man die inneren Spannungen als Funktionen der sechs Deformationsgrößen e und g, sowie der absoluten Temperatur Θ. Man nennt die so entstehenden Gleichungen die Zustandsgleichungen des Körpers.

370. Spezielle Fälle: unendlich kleine Deformationen. Nehmen wir einen festen Körper und nicht sehr große äußere Kräfte, so sind erfahrungsgemäß die u, v, w nebst ihren Differentialquotienten sehr klein. Bleiben wir konsequent bei Gliedern erster Ordnung stehen, so werden

$$e_x \doteq 2\varepsilon_x = 2\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{usw.}$$

$$g_{yz} \doteq 2\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{usw.}$$

(siehe Nr. 365).

Wenn wir ferner voraussetzen, daß im ursprünglichen Zustand das System spannungsfrei war, so liegt es nahe, die X_x, X_y usw. als lineare homogene Funktionen der e und g anzusehen, nebst einem Zusatzglied, das nur von der Entropie abhängt und verschwindet, wenn diese ebenfalls ihren ursprünglichen Wert hat. Denn in einer Entwicklung nach den e und g dürfen nur solche konstante Glieder auftreten, welche für den alten Wert der Entropie verschwinden, da sie sonst eine Anfangsspannung darstellten. Die nächsten Glieder sind die linearen, und sie werden auch nicht fehlen, da für sehr kleine Deformationen die Spannungen jedenfalls mit den Deformationen das Zeichen wechseln. Sind nun die Deformationen wirklich sehr klein, so wird es im allgemeinen schon aus Konsequenz angebracht sein, die höheren Glieder auch hier zu vernachlässigen, ob zwar sie durch sehr große Koeffizienten beträchtlich werden könnten. Es muß also die Erfahrung zeigen, wie weit der lineare Ansatz, der in der Idee auf Hooke (vgl. Nr. 46) zurückgeht, berechtigt ist.

Machen wir den linearen Ansatz (eine Weiterentwicklung in den Arbeiten Voigts), so kann φ nur von quadratischen und niederen Gliedern abhängen, wie man leicht sieht: Glieder höherer Ordnung gäben auch in den Spannungen solche höherer Ordnung. Da aber ferner φ nur von J_1, J_2, J_3, S abhängt und J_3 schon selbst dritter Ordnung ist, J_2 zweiter und J_1 erster Ordnung, so muß φ die Form haben

$$\varphi = AJ_1^2 + BJ_2 + CJ_1 + D,$$

wo A, B, C und D nur noch Funktionen der Entropie S sind.

Vernachlässigt man nun konsequent, so werden die Formeln für die Spannungen der vorigen Nummer

$$X_x = 2\{2AJ_1 + B(J_1 - e_x)\} + 2C(1 - e_x) + CJ_1 + D,$$
$$X_y = Y_x = -2g_{xy}(B + C).$$

Setzen wir noch

$$8A + 4B + 2C = K,$$
$$-4B - 4C = k, \qquad 2C + D = T,$$

so erhalten wir

$$X_x = K\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + k\frac{\partial u}{\partial x} + T,$$

$$Y_x = X_y = \frac{1}{2}k\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad \text{usw.}$$

als angenäherte Ausdrücke der Spannungsdyade durch die Deformationsdyade bei sehr kleinen Deformationen. Diesen Ansatz findet man (bis auf das Glied T in allen Normalspannungen X_x, Y_y, Z_z) in allen Lehrbüchern der Elastizitätstheorie.

T verschwindet, wenn die Entropie gegen den Urzustand ungeändert geblieben ist.

371. Rolle der Entropie- resp. Temperaturänderung. Der Fall, daß die Entropie konstant bleibt, ist sehr wichtig: Wegen $dS = \frac{dq\mathfrak{v}}{\Theta}$ besagt er, daß in diesem Falle keinem Volumelement Wärme zu- oder abgeführt wird. Man nennt derartige Prozesse adiabatisch. Bei ihnen ist $T = 0$, K und k sind konstant, man nennt sie die beiden Elastizitätskonstanten bei adiabatischen Prozessen.

Tritt aber eine Entropieänderung auf, findet also ein Wärmestrom statt, so ist T nicht Null, K und k sind keine Konstante.

Entropieänderung verursacht also bei einem isotropen Medium nicht nur eine Änderung der Elastizitätskonstanten, sondern auch das Auftreten einer normalen Zusatzspannung T, während zu den Schubkräften kein Zusatzglied hinzutritt.

Will man statt der Entropie die Temperatur einführen, so hat man erst ψ zu bilden:

$$\begin{aligned}
\psi &= \frac{1}{\mu}(AJ_1^2 + BJ_2 + CJ_1 + D),\\
&= \frac{\mathfrak{v}'}{\sqrt{1 - J_1 + J_2 - J_3}}(AJ_1^2 + BJ_2 + CJ_1 + D),\\
&\doteq \mathfrak{v}'(AJ_1^2 + BJ_2 + CJ_1 + D)\left(1 + \frac{1}{2}J_1 - \left(\frac{1}{2}J_2 + \frac{3}{8}J_1^2\right)\right),\\
&\doteq \mathfrak{v}'\left(AJ_1^2 + BJ_2 + CJ_1 + D + \frac{1}{2}CJ_1^2 + \frac{1}{2}DJ_1 - \frac{1}{2}DJ_2 - \frac{3}{8}DJ_1^2\right)
\end{aligned}$$

oder nach Einführung neuer Funktionen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{v}'\left(A + \frac{1}{2}C - \frac{3}{8}D\right) &= A',\\
\mathfrak{v}'\left(B - \frac{1}{2}D\right) &= B',\\
\mathfrak{v}'\left(C + \frac{1}{2}D\right) &= C',\\
\mathfrak{v}'D &= D'
\end{aligned}$$

$$\psi = A'J_1^2 + B'J_2 + C'J_1 + D'.$$

Die Temperatur ist dann

$$\Theta = \frac{\partial \psi}{\partial S} = \frac{d A'}{d S} J_1^2 + \frac{d B'}{d S} J_2 + \frac{d C'}{d S} J_1 + \frac{d D'}{d S}.$$

Nehmen wir speziell kleine Temperaturschwankungen $\delta \Theta$ und kleine Entropieänderungen δS, so wird, weil im Normalzustand

$$\Theta_0 = \left(\frac{d D'}{d S}\right)_{S=S_0}$$

ist, bei Beibehaltung lediglich kleiner Größen erster Ordnung

$$\delta \Theta = \frac{d C'}{d S} J_1 + \frac{d^2 D'}{d S^2} \delta S,$$

und da jetzt natürlich

$$T = \left(\frac{d T}{d S}\right)_{S=S_0} \delta S$$

wird, so ist die Zusatzspannung

$$T = \frac{d T}{d S} \frac{\delta \Theta - \frac{d C'}{d S} \cdot J_1}{\frac{d^2 D'}{d S^2}}.$$

Daher wird

$$X_x = K' \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + k \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \delta \Theta,$$

wo

$$\lambda = \frac{\frac{d T}{d S}}{\frac{d^2 D'}{d S^2}}$$

und

$$K' = K - 2 \frac{\frac{d T}{d S} \cdot \frac{d C'}{d S}}{\frac{d^2 D'}{d S^2}}$$

ist.

Bei isothermen Prozessen ($\delta \Theta = 0$) sind also bei konsequenter Vernachlässigung höherer Glieder die Elastizitätskoeffizienten wiederum konstant, aber der eine, K, der in den Normalspannungen mit der Divergenz der Verschiebung multipliziert ist, ist ein anderer als der bei adiabatischen Prozessen.

Prozesse mit langsamen Änderungen der Verschiebung, bei denen sich also die Temperatur verhältnismäßig schnell ausgleicht, kann man meist als isotherme behandeln.

Um allgemein isotherme Prozesse bei endlichen Verschiebungen zu behandeln, empfiehlt es sich, die sogenannte freie Energie

$$\psi - \Theta S = f$$

einzuführen.

Es ist dann bei konstanter Temperatur

$$df = d\psi - \Theta dS = \frac{\partial \psi}{\partial J_1} dJ_1 + \frac{\partial \psi}{\partial J_2} dJ_2 + \frac{\partial \psi}{\partial J_3} dJ_3$$

$\left(\text{wegen } \frac{\partial \psi}{\partial S} = \Theta\right)$.

Denkt man sich also f als Funktion von J_1, J_2, J_3, Θ dargestellt, so ist wegen $\Theta = \text{const.}$

$$\frac{\partial f}{\partial J_1} = \frac{\partial \psi}{\partial J_1} \quad \text{usw.}$$

Man hat also bei isothermen Prozessen in den allgemeinen Formeln für die Spannungen in Nr. 369 die Ableitungen $\frac{\partial \psi}{\partial J_1}$ *usw. durch die Ableitungen der sogenannten freien Energie* $f = \psi - \Theta \cdot S$ (bei konstant gehaltener Temperatur) *zu ersetzen.*

372. Spezielle Fälle: Flüssigkeiten. Von der Erfahrung ausgehend, daß im bloßen Schwerkraftsfelde das, was wir eine Flüssigkeit nennen, nur dann im Gleichgewicht sein kann, wenn die Oberfläche horizontal ist, schließen wir, daß bei einer Flüssigkeit Schubspannungen nicht auftreten können. Wir definieren:

Eine Flüssigkeit ist ein materielles System, bei dem in der Ruhe keine Schubspannungen auftreten können.

Beschränken wir uns auf isotrope Flüssigkeiten (neuerdings sind durch Lehmann auch kristallinische entdeckt worden), so folgt aus den Formeln (D') in Nr. 369

$$0 = X_y = Y_x = 2\mu \left\{ -g_{xy}\left(\frac{\partial \psi}{\partial J_1} + \frac{\partial \psi}{\partial J_2}\right) + (g_{xz}g_{yz} - e_z g_{xy})\left(\frac{\partial \psi}{\partial J_2} + \frac{\partial \psi}{\partial J_3}\right)\right\}$$

usw.

Aus diesen drei Gleichungen aber folgen die beiden

$$\frac{\partial \psi}{\partial J_1} + \frac{\partial \psi}{\partial J_2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \psi}{\partial J_2} + \frac{\partial \psi}{\partial J_3} = 0, \tag{1}$$

weil jene drei lineare homogene Gleichungen in den vorstehenden Ausdrücken sind mit nicht verschwindenden Determinanten:

$$g_{xy}^2 g_{xz} - e_x g_{xy} g_{yz} - g_{yz}^2 g_{xz} + e_z g_{xy} g_{yz} \quad \text{usw.}$$

Identisch in den e und g verschwinden ja diese Ausdrücke nicht, im allgemeinen kann man aber auch die e und g als algebraisch unabhängige Funktionen ansehen, da ja zu jeder verschiedenen Deformationsfläche verschiedene e und g gehören, aber an einer Stelle wenigstens eine beliebige Deformationsfläche denkbar ist, so daß eine algebraische Gleichung zwischen den e und g bei allgemein gelassener Beweglichkeit der Flüssigkeit nicht existieren kann.

Kinematisch aber sei die Flüssigkeit dadurch definiert, daß jede Bewegung bei ihr möglich ist, welche eine eineindeutige Beziehung zwischen einer bestimmten, als Normallage angegebenen Stellung und einer beliebigen Stellung des Systems herstellt.

Aus den Gleichungen (1) folgt aber, daß ψ eine bloße Funktion von

$$J_1 - J_2 + J_3$$

ist, oder was dasselbe ist, von $\mathfrak{v}$.

Bei isotropen Flüssigkeiten ist die innere Energie eine bloße Funktion des Volumens und der Entropie (oder der Temperatur).

Die Normalspannungen aber werden nach D' wegen (1)

$$X_x = 2\mu \frac{\partial \psi}{\partial J_1}(1 - J_1 + J_2 - J_3) \text{ usw.},$$

also *alle einander gleich*, man nennt

$$p = -X_x = -Y_y = -Z_z$$

den Druck. Da aber nach Nr. 368

$$\mu = \frac{1}{\mathfrak{v}} = \frac{1}{\mathfrak{v}'}\sqrt{1 - J_1 + J_2 - J_3}$$

war, so ist

$$p = -\frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{v}}. \tag{I}$$

Dabei ist die spezifische innere Energie ψ pro Masseneinheit als Funktion von $\mathfrak{v}$ und S anzusehen.

Nimmt man die Gleichung

$$\Theta = \frac{\partial \psi}{\partial S} \tag{II}$$

hinzu und eliminiert aus beiden S, so erhält man eine Gleichung zwischen p, $\mathfrak{v}$ und Θ, die sogenannte Zustandsgleichung, die für ideale Gase bekanntlich die Form hat

$$p\mathfrak{v} = R \cdot \Theta,$$

wo R eine feste Konstante ist.

Die Gleichgewichtsbedingungen aber lauten für Flüssigkeiten (inklusive Gase, die auch unsere Definition erfüllen) wegen $X_y = Y_x = \ldots 0$ und $X_x = Y_y = Z_z = -p$

$$0 = \bar{\varkappa} - \frac{dp}{d\bar{r}}, \tag{III}$$

wo $\bar{\varkappa}$ die spezifische räumliche Kraft bedeutet, im Falle also, daß die Schwerkraft die einzige derartige Kraft ist

$$0 = \mu\bar{g} - \frac{dp}{d\bar{r}},$$

woraus folgt, daß $\frac{dp}{dr}$ abwärts gerichtet ist, daß also die Flächen konstanten Drucks horizontal liegen müssen. Da sich infolgedessen $\frac{dp}{dr}$ nur in der vertikalen Richtung ändern kann, so muß in horizontalen Ebenen auch μ, die Dichte, konstant sein.

Unter Einwirkung der Schwerkraft schichten sich verschiedene Flüssigkeiten horizontal übereinander. Endlich muß infolge der Zustandsgleichung auch die Temperatur in horizontalen Ebenen konstant sein, wenn Gleichgewicht herrschen soll.

373. Literatur. Die Begründung einer allgemeinen Statik deformierbarer Körper stammt von Poisson, Cauchy und Saint-Vénant aus dem Anfange und der Mitte des 19. Jahrhunderts. Die mathematische Weiterentwicklung wurde vor allen Dingen von Kirchhoff gefördert (siehe dessen Mechanik), dann später von Lord Kelvin (W. Thomson), Boussinesq und Heinrich Hertz. Die moderne Entwicklung strebt einerseits nach einer möglichst korrekten mathematischen Vollendung der Theorie (Namen siehe in dem Enzykl.-Referat von Tedone), andererseits danach, durch praktischen Ausbau die Theorie anwendungsfähiger zu machen und so der Technik ein brauchbares und doch exaktes Hilfsmittel für ihre Festigkeitsberechnungen zu geben. Das Buch, das diesem Ziel am nächsten kommt, ist das von

Love, deutsch von Timpe: „Lehrbuch der Elastizität.“ Ein weniger anspruchsvolles Werk, das der junge Techniker zuerst zu rate ziehen mag, ist

Föppl, Technische Mechanik, Bd. III und V; es geht noch mehr auf technische Probleme ein und berücksichtigt auch mehr die älteren, leistungsfähigen, aber nicht einwandfreien Methoden, welche sich die Praxis notgedrungen immer dann schaffen muß, wenn die Theorie noch nicht ausgebildet genug ist.

Ältere ausgezeichnete Werke sind: Clebsch, Theorie der Elastizität, 1862, in deren französischen Ausgabe sich wichtige Zusätze von St. Vénant finden, und F. Neumann, Theorie der Elastizität, 1895, das die von einer Temperaturänderung herrührende Normalspannung beachtet. Von neueren wären zu nennen: Voigt, Kompendium und Elementare Mechanik. Erwähnt sei auch das dreibändige Werk: Todhunter and Pearson, A History of Elasticity, 1886—1893.

Nach der experimentellen Seite wurde die Festigkeitslehre besonders in den deutschen Laboratorien, namentlich von Bach (siehe sein Buch: „Elastizität und Festigkeit“) und Tetmajer weiterentwickelt, indem die Unzulänglichkeit des Hookeschen Gesetzes bei großen Deformationen dargetan und Ersatz für dasselbe gesucht wurde.

Nach der physikalischen Seite hin erhielt die Elastizitätstheorie einen neuen Impuls durch die Untersuchungen Voigts über Kristalle, wobei auch die Einwirkung thermischer und elektrischer Einflüsse beachtet wurde. Eine ganz neue Auffassung hat Jaumann (Zitat in Nr. 379); nach ihm ist nicht die Spannungsdyade eine Funktion der Deformationsdyade, sondern ihre zeitliche Ableitung eine Funktion der Ableitungen der Geschwindigkeit nach dem Orte.

Alle diese Autoren beschränken sich im wesentlichen auf unendlich kleine Deformationen, für welche die Theorie allein durchgebildet ist; unsere Formeln für endliche Deformationen stammen im Kern schon von Saint-Vénant und Kirchhoff, dann wurden sie von Boussinesq, Duhem und Finger vervollständigt.

Man vergleiche auch die Referate in der Enzykl. d. math. Wiss. (Bd. IV, II. Teil, 2. Hälfte) von Abraham, C. H. Müller und H. Timpe, Tedone, Reissner, v. Kármán und Prandtl.

§ 61. Kinetik isotroper homogener Medien.

374. Allgemeine Bemerkungen. Die Entropie. Bewegt sich ein materielles System, so bleibt der erste Hauptsatz in Gültigkeit, also

$$dA_a + dQ = dE + d\Phi, \tag{I}$$

wo $\Phi = \int \varphi dV = \int \psi dm$ die innere Energie des Systems ist, dann der allgemeine Energiesatz der Mechanik

$$dE = dA_a + dA_i. \tag{II}$$

Dagegen bedarf der zweite Hauptsatz der Thermodynamik einer Modifikation.

Wir denken uns die Spannungsdyade in zwei Teile zerlegt: $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda'$; Λ_1 sei das Λ der Statik, so daß Λ' die Veränderung der Spannungsdyade bei der Bewegung bedeutet. Dementsprechend zerfällt auch die innere Arbeit in zwei Teile:

$$dA_i = (dA_i)_1 + dA_i'. \tag{III a}$$

Λ_1 sei ganz das alte Λ der Statik, es haben also die entsprechenden inneren Spannungen ein Potential im Sinne von Nr. 369, so daß

$$(X_x)_1 = \mu \left\{ \frac{\partial\psi}{\partial\frac{\partial u}{\partial x}} - \frac{\partial\psi}{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial\frac{\partial v}{\partial x}}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial\frac{\partial w}{\partial x}}\frac{\partial w}{\partial x} \right\} \tag{D}$$

usw.

Dazu nehmen wir nun die durch die Erfahrung begründete Annahme:

daß die innere Arbeit dA_i' der Zusatzkräfte stets negativ sei und daß dieser so verloren gehenden Arbeit als Äquivalent eine im Körper erzeugte Wärmemenge $\mathfrak{S}dq'dV$ entspreche

$$dA_i' = -\mathfrak{S}dq'dV \tag{III b}$$

und daß nun

$$(dq + dq')dV = \Theta \cdot dS \cdot dm \tag{IV}$$

sei, wo S, die Entropie, eine für jedes Medium bestimmte Funktion der Temperatur Θ und der Deformationsdyade sei.

Diese Modifikation des zweiten Hauptsatzes stellen wir an die Spitze.

Aus (I), (II), (III), (IV) folgt dann

$$\int \Theta dSdm = (dA_i)_1 + d\Phi$$

oder, da die Beziehung zwischen $(dA_i)_1$ und $d\Phi$ die alte bleibt wie zwischen dem dA_i der Statik und $d\Phi$, nämlich

$$(dA_i)_1 + d\Phi_{\,|\,S=\text{const.}} = 0 \tag{D'}$$

— wie man auch die Gleichungen (D) schreiben kann —

$$\Theta dS = \frac{\partial \psi}{\partial S} dS,$$

woraus folgt

$$\Theta = \frac{\partial \psi}{\partial S}.$$

Die formalen Beziehungen zwischen der Temperatur, der Entropie, der Deformationsdyade und der spezifischen inneren Energie, insbesondere also auch die Zustandsgleichungen bleiben dieselben wie in der Statik.

Bemerkung: Man kann auch als Axiom an die Spitze stellen, daß diese formalen Beziehungen in Geltung bleiben sollen, dann folgt, daß

$$(dq + dq')dV = \Theta dSdm$$

sein muß.

375. Die Spannungsdyade. Was weiß man nun über die Dyade der Zusatzspannungen? Es hat sich erfahrungsgemäß gezeigt, daß es nicht mehr genügt, die gesamten Spannungen ($\mathit{\Lambda} = \mathit{\Lambda}_1 + \mathit{\Lambda}'$) als bloße Funktionen der Deformationen gegen den Normalzustand und der Temperatur bzw. der Entropie anzusetzen, sie hängen vielmehr von dem ganzen Deformationsprozeß ab, von der ganzen Geschichte des Vorgangs. Daß dem so ist, zeigt am deutlichsten der Vorgang der Hysterese: ein gedehnter Körper kehrt nach Aufhören der dehnenden Kräfte gar nicht mehr in den Normalzustand zurück, oder was dasselbe ist, um ihn dahin zurückzuführen, bedarf es neuer äußerer Kräfte; tritt nach einem Deformationsprozeß Ruhe ein, so ist die Spannung gar nicht bloße Funktion der augenblicklichen Deformation und der Temperatur, sondern der ganze vorhergehende Prozeß wirkt nach.

Man wird also die inneren Spannungen anzusetzen haben als abhängig von den Werten von e und g zu allen vorhergehenden Zeiten:

$$X_x = X_x(S(t-\tau),\ e(t-\tau),\ g(t-\tau)),$$

wo τ alle Werte von 0 bis ∞ durchläuft.

Wenn man annehmen darf, daß S, e, g analytische Funktionen der Zeit sind, so kommt das darauf hinaus, daß die inneren Spannungen nicht nur Funktionen der augenblicklichen Werte der Deformationsgrößen sind, sondern auch von ihren Differentialquotienten $\frac{de}{dt}$, $\frac{d^2e}{dt^2}$ usw. abhängen.

Aber selbst dieser Ansatz wird nicht allgemein genug sein. Das wird uns ein Beispiel zeigen.

Nehmen wir einmal der Einfachheit halber an, daß der Spannungszustand außer von den e und g noch von deren unmittelbar vorhergehenden Werten abhänge, d. h. noch von den sechs Größen $\dot{e}$ und $\dot{g}$.

Nun findet man aber durch eine ganz elementare Rechnung aus den Definitionsformeln für e und g aus Nr. 363 und aus den Übergangsgleichungen der Nr. 367 die folgenden Ausdrücke der $\dot{e}$ und $\dot{g}$ durch die e, g und durch $\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}$, $\frac{\partial \dot{u}}{\partial y}$ usw., wo $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{w}$ die Ableitungen von u, v, w sind, d. h. die Geschwindigkeitskomponenten:

$$\dot{e}_x = 2\left\{\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}(1-e_x) - \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} g_{xy} - \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} g_{xz}\right\} \text{ usw.,}$$

$$\dot{g}_{yz} = -\frac{\partial \dot{u}}{\partial y} g_{xz} - \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} g_{xy} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial z}(1-e_y) + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y}(1-e_z) - \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} g_{yz} - \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} g_{yz}$$

usw.

Die rechten Seiten dieser Gleichungen hängen nun ersichtlich nicht nur von den sechs Größen

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial x},\ \frac{\partial \dot{v}}{\partial y},\ \frac{\partial \dot{w}}{\partial z}$$

und

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x}\right),\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y}\right),\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial z}\right)$$

ab, so daß es also nicht möglich ist, diese letzten sechs Größen als bloße Funktionen der $\dot{e}$, $\dot{g}$ und der e und g darzustellen.

Wir werden aber sehen, daß der herkömmliche Ansatz für Flüssigkeiten (und Gase) dies verlangen würde, wenn es zugleich möglich sein soll, die Spannungen durch die $\dot{e}$, $\dot{g}$, e, g darzustellen.

376. Ideale und zähe Flüssigkeiten. Soweit die bisher ausgebildete Theorie den Vergleich mit der Erfahrung zuläßt, zeigt es sich, daß es zur Erklärung vieler Phänomene namentlich bei leichtflüssigen Medien, ausreicht, auch bei der Bewegung von Schubspannungen abzusehen. Sind aber solche nicht vorhanden, so muß die Spannungsfläche eine Kugel sein (siehe Nr. 251) — denn sonst wären Schubspannungen vorhanden —, so daß auf Grund dieser Annahme alle Normalspannungen einander gleich werden:

$$X_x = Y_y = Z_z = -p,$$

wo wieder p der Druck heiße. Dieses p wird mit dem statischen Druck identifiziert, d. h. es wird als dieselbe Funktion von $\mathfrak{v}$ und Θ angesehen, welche durch die Zustandsgleichung gegeben ist. Es ist also $\Delta' = 0$.

Solche Flüssigkeiten, die es in Wahrheit nicht gibt, heißen ideale Flüssigkeiten; bei ihnen findet eine beständige Umwandlung von Arbeit in Wärme nicht statt ($dq' = 0$). In allen Fällen genügt die Annahme einer idealen Flüssigkeit nicht, um so weniger, je zäher, dickflüssiger dieselbe ist.

Eine ideale Flüssigkeit würde z. B. in einem horizontalen Rohr ohne Druckgefälle gleichförmig fließen können, Flüsse könnten kein Gefälle haben, wenn das Wasser gleichförmig fließen soll.

Man ist also gezwungen, in manchen Fällen bei der Bewegung das Auftreten von Schubspannungen zuzulassen, will man der Naturerscheinung einigermaßen gerecht werden; man spricht dann von zähen Flüssigkeiten.

Für solche setzt man nun

$$\begin{aligned} X_x &= -p + X_x', \\ Y_y &= -p + Y_y', \\ Z_z &= -p + Z_z', \\ X_y &= X_y' \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

und sieht die Spannungsdyade $X_x', \ldots$ als lediglich dadurch bedingt an, daß vermöge der Geschwindigkeitsunterschiede benachbarter Wasserteilchen in jedem Augenblick neue Deformationen eintreten. Diese Deformationen sind unendlich klein, denn es handelt sich um die infinitesimalen Verschiebungen

$$du = \dot{u}dt, \quad dv = \dot{v}dt, \quad dw = \dot{w}dt.$$

Es kommen also für die Deformationsfläche als sechs Koeffizienten nach Nr. 365 die sechs Größen in Frage:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \dot u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \dot v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial \dot w}{\partial z}$$

und

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot u}{\partial y} + \frac{\partial \dot v}{\partial x}\right) = \gamma_{xy}, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot v}{\partial z} + \frac{\partial \dot w}{\partial y}\right) = \gamma_{yz}, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot w}{\partial x} + \frac{\partial \dot u}{\partial z}\right) = \gamma_{zx}.$$

Die Zähigkeitsdyade wird also Funktion dieser sechs Größen sein müssen.

377. Isotrope Flüssigkeiten. Um nun X_x usw. als Funktionen von $\varepsilon_x \ldots \gamma_{xy}$ usw. wirklich zu finden, verfahren wir folgendermaßen.

Wir machen zunächst die Hypothese, daß die Spannungskomponenten lineare homogene Funktionen der ε und γ seien.

Ist dann die Flüssigkeit isotrop, so muß die Deformationsfläche dieselben Richtungen der Hauptachsen haben wie die Spannungsfläche. Denn es müßte sonst eine ausgezeichnete Richtung im Medium geben, um welche man die Hauptachsen der einen Fläche in die der anderen zu drehen hätte. Legt man also vorübergehend das Achsenkreuz an einer Stelle so, daß die γ Null sind, so müssen es auch die X_z, Y_z usw. sein. (Alle Größen in bezug auf dieses Achsensystem mögen durch zwei Striche ausgezeichnet werden.)

Aus Symmetriegründen muß dann ferner sein

$$\begin{aligned} X_x'' &= \nu(\varepsilon_x'' + \varepsilon_y'' + \varepsilon_z'') + \lambda \varepsilon_x'', \\ Y_y'' &= \nu(\varepsilon_x'' + \varepsilon_y'' + \varepsilon_z'') + \lambda \varepsilon_y'', \\ Z_z'' &= \nu(\varepsilon_x'' + \varepsilon_y'' + \varepsilon_z'') + \lambda \varepsilon_z'', \\ Y_z'' &= Z_y'' = Z_x'' = \cdots = 0. \end{aligned}$$

Denn bei Vertauschung der y- und z-Achse muß z. B. X_x'' ungeändert bleiben, d. h. X_x'' kann außer von ε_x'' nur von $\varepsilon_y'' + \varepsilon_z''$ abhängen.

Führen wir nun die Funktion

$$W = \frac{1}{2}\nu(\varepsilon_x'' + \varepsilon_y'' + \varepsilon_z'')^2 + \frac{1}{2}\lambda(\varepsilon_x''^2 + \varepsilon_y''^2 + \varepsilon_z''^2)$$

ein, die, durch die Invarianten

$$\varepsilon_x'' + \varepsilon_y'' + \varepsilon_z'' = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = J_1$$

und

$$\varepsilon_x''^2 + \varepsilon_y''^2 + \varepsilon_z''^2 = \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + 2(\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2) = J_1^2 - 2J_2$$

ausgedrückt, lautet

$$W = \frac{1}{2}\nu J_1^2 + \frac{1}{2}\lambda(J_1^2 - 2J_2),$$

so ist ersichtlich

$$X_x'' = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x''}, \quad Y_y'' = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y''}, \quad Z_z'' = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z''}.$$

Wir wollen nun zeigen, daß auch

$$X_x' = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x}, \quad Y_y' = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y}, \quad Z_z' = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z},$$

$$X_y' = Y_x' = \frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}}, \quad Y_z' = Z_y' = \frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial \gamma_{zy}}, \quad Z_x' = X_z' = \frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}}$$

ist.

Beweis: Die Leistung der inneren Spannungen ist, soweit die Zähigkeit in Frage kommt, nach Nr. 366 pro Volumseinheit

$$L = - X_x'\varepsilon_x - Y_y'\varepsilon_y - Z_z'\varepsilon_z - 2X_y'\gamma_{xy} - 2Y_z'\gamma_{yz} - 2Z_x'\gamma_{zx}.$$

Diese Größe ist aber ihrer Bedeutung nach invariant gegen Koordinatentransformation, es ist also auch

$$L = - X_x''\varepsilon_x'' - Y_y''\varepsilon_y'' - Z_z''\varepsilon_z'' = -2W.$$

Es transformiert sich also

$$X_x''\varepsilon_x'' + Y_y''\varepsilon_y'' + Z_z''\varepsilon_z''$$

in

$$X_x'\varepsilon_x + Y_y'\varepsilon_y + Z_z'\varepsilon_z + 2X_y'\gamma_{xy} + 2Y_z'\gamma_{yz} + 2Z_x'\gamma_{zx},$$

gleichgültig, wovon die X_x usw. abhängen.

Wie die ε, γ transformieren sich aber natürlich auch irgendwelche virtuelle $\delta\varepsilon$, $\delta\gamma$, weil es sich um lineare Transformationen handelt. Also ist auch

$$X_x''\delta\varepsilon_x'' + Y_y''\delta\varepsilon_y'' + Z_z''\delta\varepsilon_z''$$

$$= X_x'\delta\varepsilon_x + Y_y'\delta\varepsilon_y + Z_z'\delta\varepsilon_z + 2X_y'\delta\gamma_{xy} + 2Y_z'\delta\gamma_{yz} + 2Z_x'\delta\gamma_{zx}.$$

Nun ist aber die linke Seite, wie wir sahen,

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x''}\delta\varepsilon_x'' + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y''}\delta\varepsilon_y'' + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z''}\delta\varepsilon_z'' = \delta W,$$

also ist dasselbe die rechte Seite, d. h., wie behauptet,

$$X_x' = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} \text{ usw.}$$

$$X_y' = \frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} \text{ usw.}$$

Da aber

$$W = \frac{1}{2}\nu J_1^2 + \frac{1}{2}\lambda(J_1^2 - 2J_2)$$

$$= \frac{1}{2}\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + \frac{1}{2}\lambda(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + 2\gamma_{yz}^2 + 2\gamma_{zx}^2 + 2\gamma_{xy}^2)$$

war, so ergeben sich als **endgültige Ausdrücke der Zähigkeitsdyade**:

$$X_x' = \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \lambda\varepsilon_x \equiv \nu \operatorname{div} \bar{v} + \lambda \frac{\partial \dot{u}}{\partial x},$$

$$Y_y' = \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \lambda\varepsilon_y \equiv \nu \operatorname{div} \bar{v} + \lambda \frac{\partial \dot{v}}{\partial y},$$

$$Z_z' = \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \lambda\varepsilon_z \equiv \nu \operatorname{div} \bar{v} + \lambda \frac{\partial \dot{w}}{\partial z},$$

$$X_y' = Y_x' = \lambda\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x}\right),$$

$$Y_z' = Z_y' = \lambda\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y}\right),$$

$$Z_x' = X_z' = \lambda\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial z}\right).$$

Aus den allgemeinen Bewegungsgleichungen

$$\mu\ddot{u} = \varkappa_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_x}{\partial y} + \frac{\partial Z_x}{\partial z} \quad \text{usw.}$$

aber wird

$$\left.\begin{aligned}
\mu\ddot{u} &= \varkappa_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\nu \operatorname{div} \bar{v}) + \frac{1}{2}\operatorname{div}\left(\lambda\frac{\partial \dot{u}}{\partial \bar{r}}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{div}\lambda\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \\
\mu\ddot{v} &= \varkappa_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}(\nu \operatorname{div} \bar{v}) + \frac{1}{2}\operatorname{div}\left(\lambda\frac{\partial \dot{v}}{\partial \bar{r}}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{div}\lambda\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \\
\mu\ddot{w} &= \varkappa_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}(\nu \operatorname{div} \bar{v}) + \frac{1}{2}\operatorname{div}\left(\lambda\frac{\partial \dot{w}}{\partial \bar{r}}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{div}\lambda\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

($\bar{v}$ die Geschwindigkeit mit den Komponenten $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{w}$).

Dies sind die Bewegungsgleichungen zäher Flüssigkeiten. Dabei können jetzt u, v, w als Ortskoordinaten eines Flüssigkeitsteilchens aufgefaßt werden.

Sind ν, λ *konstant, wie es bei gleichmäßig verteilter Temperatur sein wird* (siehe Nr. 378), *so lauten die Gleichungen:*

$$\mu\ddot{\bar{w}} = \bar{\varkappa} - \frac{\partial p}{\partial \bar{r}} + \left(\nu + \frac{1}{2}\lambda\right)\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\operatorname{div}\bar{v} + \frac{1}{2}\lambda\Delta\bar{v} \quad \text{(I')}$$

$\left(\text{wo } \Delta = \operatorname{div}\frac{\partial}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$.

378. Über die Zähigkeitskoeffizienten ν, λ. Die Zähigkeit hat die Eigenschaft, Energie zu verzehren. Es muß also die Leistung L stets negativ, W, die sogenannte Dissipationsfunktion, eine positive Funktion sein (Lord Rayleigh).

Da nun Bewegungen möglich sind, für welche $\operatorname{div}\bar{v} = 0$ ist (siehe die folgende Nummer), so muß sicher $\lambda > 0$ sein.

Ferner erkennt man leicht, daß, wenn W stets positiv sein soll, also auch

$$(\nu + \lambda)(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + 2\nu(\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x) > 0$$

sein soll,

$$3\nu + \lambda > 0,$$

also

$$\nu > -\frac{1}{3}\lambda$$

sein muß. Denn bei gegebenem $\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2$ erreicht $\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x$ seinen größten Wert für $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$.

λ ist nun für viele Flüssigkeiten und Gase bekannt, es ist sehr von der Temperatur abhängig. Z. B. ist für Wasser nach O. E. Meyer

für eine Temperatur von	$10{,}1^0$	$15{,}5^0$	$17{,}9^0$	$21{,}6^0$	Celsius
$\lambda \cdot 10^4 =$	157,1	136,1	129,1	118,1	im C. G. S.-System.

Eine empirische Formel für Wasser (Temperatur ϑ in Celsiusgraden) ist

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}0178}{1 + 0{,}033679\,\vartheta + 0{,}00022099\,\vartheta^2}.$$

Man nennt λ den Zähigkeitskoeffizienten. Von ν dagegen, das nur bei Gasen eine Rolle spielt, weiß man noch nichts.

Noch einige Daten mögen zur Illustration gegeben werden: bei mittlerer Temperatur (ca. 20^0) ist λ

für Gase	0,0001 bis 0,0002,
für Wasser	0,013,
für Rüböl	1,7,
für Glyzerin	etwa 8.

379. Die Kontinuitätsgleichung. In den Bewegungsgleichungen (I) aus Nr. 377 sind u, v, w, p, μ als abhängige Variabele aufzufassen. Als vierte Gleichung kommt die Zustandsgleichung hinzu

$$F(p, \mu, \Theta) = 0. \tag{II}$$

Als fünfte und letzte — außer den rein thermodynamischen, die den Verlauf von Θ regeln — die sogenannte Kontinuitätsgleichung, welche die Geschwindigkeit $\bar{v}$ und μ resp. $\mathfrak{v}$ in Beziehung zueinander setzt. Es muß ja durch die Geschwindigkeitsverteilung die Änderung des Volumens gegeben sein.

Betrachten wir ein bestimmtes Volumen und sei $v_\nu = \bar{v} \cdot \bar{\nu}$ die nach außen positiv gezählte Normalkomponente der Geschwindigkeit, so kommt in der Zeit dt durch Verschiebung des Oberflächenelementes dF

ein Prisma der Basis dF und der Höhe $v_\nu dt = \bar{v} \cdot \bar{\nu} dt$ hinzu. Also ist die Volumsveränderung einer bestimmten Materienmenge:

$$dV = \mathsf{S}\, \bar{v} \cdot \bar{\nu}\, dF\, dt.$$

Das letzte Integral ist aber nach dem Gaußschen Satze (siehe Anhang III, 2) gleich dem Volumsintegral

$$dt \mathsf{S}_V \operatorname{div} \bar{v} \cdot dV.$$

Also ist die spezifische Volumsvergrößerung (pro Volumseinheit und pro Zeiteinheit) *an jeder Stelle* $\operatorname{div} \bar{v}$, oder

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\frac{1}{\mathfrak{v}} = \operatorname{div} \bar{v}. \tag{III}$$

Das ist die gesuchte Kontinuitätsgleichung.

(Sie würde auch gelten, wenn das Gesetz der Erhaltung der Masse nicht richtig wäre, was als möglich zuzulassen bei Diffusionsprozessen vielleicht angebracht ist.[1]))

Bleibt die Masse konstant, so ist die spezifische Masse

$$\mu = \frac{1}{\mathfrak{v}},$$

also

$$\frac{d \lg \mu}{dt} = -\frac{d \lg \mathfrak{v}}{dt} = -\frac{1}{\mathfrak{v}}\frac{d\mathfrak{v}}{dt},$$

und deshalb nimmt die Kontinuitätsgleichung die Form an

$$\frac{d \lg \mu}{dt} + \operatorname{div} \bar{v} = 0.$$

Eigentliche Flüssigkeiten haben nun im Gegensatz zu den Gasen die Eigentümlichkeit, wenig zusammendrückbar zu sein. $\mathfrak{v}$ oder μ ändern sich also bei normalen Kräften nur wenig: man kann diese Veränderung oft ignorieren, d. h. $\mu =$ const. setzen.

Flüssigkeiten, für die man μ als konstant ansehen darf, heißen „inkompressibel" oder „volumbeständig".

Für inkompressible Flüssigkeiten ist gemäß (III)

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0 \tag{III'}$$

und die allgemeinen Bewegungsgleichungen nehmen bei gleichförmig verteilter Temperatur die Form an

$$\mu \bar{w} = \bar{x} - \frac{\partial p}{\partial \bar{r}} + \lambda \Delta \bar{v}. \tag{I}$$

1) Siehe Jaumann: Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze (Sitzungsber. d. Wiener Akad. d. Wiss. 1911).

p, der Druck, wird eine Reaktionskraft, d. h. eine Unbekannte, denn die Zustandsgleichung wird bei Ignorierung der Veränderlichkeit von μ hinfällig.

Denn sie eben gibt die Berechtigung, μ als konstant anzusehen, sie sagt, daß auch bei beträchtlich veränderlichem p und Θ das μ nur unmerklich schwankt.

Der Druck leistet bei inkompressiblen Flüssigkeiten keine virtuelle Arbeit, denn die Arbeit des Druckes ist bei einer Verschiebung $\delta\bar{r}(\delta u, \delta v, \delta w)$ nach Nr. 366

$$p\left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \frac{\partial \delta w}{\partial z}\right) = p \operatorname{div} \delta\bar{r}.$$

Das ist aber Null, weil natürlich auch

$$\operatorname{div} \delta\bar{r} = 0$$

sein muß bei einer inkompressiblen Flüssigkeit.

Im allgemeinen Falle — besonders also bei Gasen — ist die Leistung des inneren Druckes

$$L_p = p \operatorname{div} \bar{v}\, dV,$$

also nach (III)

$$L_p = p \frac{d\mathfrak{v}}{dt} \cdot dm.$$

380. Vollständiger mechanisch-thermodynamischer Ansatz für homogene isotrope Gase bei Ausschluß von Wärmestrahlung. Für ein homogenes, isotropes Gas hatten wir bis jetzt die folgenden Gleichungen:

die Bewegungsgleichungen (siehe Nr. 377)

$$\frac{1}{\mathfrak{v}} \frac{d^2x}{dt^2} = \varkappa_x - \frac{\partial}{\partial x} p + \frac{\partial}{\partial x} \nu \operatorname{div} \bar{v} + \frac{1}{2} \operatorname{div}\left(\lambda \frac{\partial \dot{x}}{\partial \bar{r}}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{div}\left(\lambda \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right) \text{ usw.,} \tag{I}$$

die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{1}{\mathfrak{v}} \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \operatorname{div} \bar{v}, \tag{II}$$

dann nach Nr. 374 und 372 die Zustandsgleichungen

$$p = -\frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{v}}, \tag{III}$$

$$\Theta = \frac{\partial \psi}{\partial S}. \tag{IV}$$

Das sind im ganzen sechs Differentialgleichungen für die sieben abhängigen Variabelen $\bar{r}$, p, $\mathfrak{v}$, S, Θ. Denn ψ ist bei gegebenem Medium als bekannte Funktion von $\mathfrak{v}$ und S anzusehen, sowie ν und λ als bekannte Funktionen von Θ. Wir brauchen also, um den Ansatz vollständig zu machen, noch eine skalare Feldgleichung. Diese gibt uns die Frage nach dem Wärmeaustausch. Ein solcher findet in doppelter Weise statt: durch Leitung und durch Strahlung.

Schließen wir die Strahlung aus, einmal weil sie bei nicht sehr großen Temperaturdifferenzen tatsächlich gering ist, dann aber, weil sie eher elektromagnetischen Erscheinungen verwandt ist, die wir ja auch ausgeschlossen haben, so bleibt die Wärmeleitung.

Durch sie wird der Zufluß dq zu einem Volumelement von außen bedingt.

Wir wollen uns einen Wärmestrom vorstellen, der überall eine bestimmte Größe und Richtung hat; er sei also ein Vektor $\bar{\mathfrak{w}}$.

Er wird lediglich bedingt sein durch die Temperaturverteilung Θ und die Eigenschaften des Mediums. Ist dieses isotrop und homogen, so muß $\bar{\mathfrak{w}}$ auf den Flächen konstanter Temperatur senkrecht stehen. Denn bei Gasen wenigstens wird die Isotropie nicht durch die Deformation verändert. Also ist

$$\bar{\mathfrak{w}} = -\sigma \cdot \frac{d\Theta}{d\bar{r}}.$$

σ — eine Funktion von Θ und den Eigenschaften des Körpers, möglicherweise auch von der Deformationsdyade abhängig — heißt der Wärmeleitungskoeffizient. Da Wärme stets von Stellen höherer zu solchen niederer Temperatur strömt, ist $\sigma > 0$.

$\mathfrak{w}$ bedingt den Zufluß der Wärme von außen. Es ist also für ein jedes Volumen

$$\underset{V}{S}\, dq \cdot dV = -dt \underset{F}{S}\, \bar{\mathfrak{w}} \cdot \bar{\nu}\, dF = dt \underset{F}{S}\, \sigma \frac{d\Theta}{d\bar{r}} \cdot \bar{\nu}\, dF,$$

wo $\bar{\nu}$ wie stets die äußere Normale bedeutet; oder nach dem Gaußschen Satze (siehe Anhang III, 2)

$$\underset{V}{S}\, dq\, dV = dt \underset{V}{S} \operatorname{div}\left(\sigma \frac{d\Theta}{d\bar{r}}\right) dV$$

oder

$$dq = \operatorname{div}\left(\sigma \frac{d\Theta}{d\bar{r}}\right) dt. \tag{1}$$

Nun war aber weiter nach Nr. 374

$$dq + dq' = \frac{1}{\mathfrak{v}}\, \Theta\, dS$$

und

$$dq' = 2W dt,$$

wo W die Dissipationsfunktion bedeutete:

$$W = \frac{1}{2}\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + \frac{1}{2}\lambda(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + 2\gamma_{yz}^2 + 2\gamma_{zx}^2 + 2\gamma_{xy}^2).$$

Also ist

$$dq = \frac{1}{\mathfrak{v}} \Theta dS - 2 W dt,$$

was mit (1) kombiniert *die siebente gesuchte Gleichung ergibt:*

$$\frac{1}{\mathfrak{v}} \Theta \frac{dS}{dt} = 2 \mathrm{W} + \operatorname{div}\left(\sigma \frac{d\Theta}{d\bar{r}}\right). \tag{V}$$

Zu diesen sieben Feldgleichungen (Gleichungen, die für jede Stelle des Gases gelten) treten nun noch Randbedingungen hinzu: Ist das Medium von anderen begrenzt, so müssen Geschwindigkeit, Druck, Temperatur und auch die zur Grundfläche normale Komponente des Wärmestromes stetig von dem einen Medium zu dem andern übergehen.

Damit schließen wir unsere Betrachtungen. Es war nicht unsere Absicht, auf irgendwelche Einzelheiten oder Anwendungen einzugehen; der Leser sei auf die nachgenannte Literatur verwiesen.

381. Literatur. Die wissenschaftliche Hydromechanik wurde von Daniel Bernoulli, Euler und Lagrange im 18. Jahrhundert begründet. Die Bewegungsgleichungen für zähe Flüssigkeiten stammen von Stokes und Navier. Einen besonderen Aufschwung nahm die Theorie der idealen Flüssigkeiten, als Helmholtz (in den Arbeiten: Über „Wirbelbewegungen" 1858 und „Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen" 1868) und Kirchhoff (siehe seine Mechanik) die Hilfsmittel der modernen Analysis, namentlich die Funktionentheorie, der Hydromechanik dienstbar machten. Lord Kelvin und andere bauten die Theorie weiter aus und gaben neue Impulse, namentlich zu physikalisch-praktischer Anwendung (Wellen, Schiffswiderstand, Ebbe und Flut usw.).

Das Lehrbuch, das dem heutigen theoretischen Standpunkte der Hydromechanik, namentlich für den, der Resultate wünscht, am besten entspricht, ist das von Lamb, deutsch von Friedel, „Lehrbuch der Hydrodynamik". Ein anderes knapperes Lehrbuch ist das deutsche von Wien: Hydrodynamik. Speziell für Reibungsfragen (auch bei Gasen) ist Brillouin: Leçons sur la viscosité, Paris 1907, vortrefflich. Als Lehrbuch für Techniker kann Lorenz: Technische Hydromechanik empfohlen werden.

Die neueren Arbeiten, so namentlich die der Engländer (O. Reynolds u. a.)[1]), die von Boussinesq, H. A. Lorentz, Sommerfeld und Oseen[2]), dann die Prandtls in Göttingen und seiner Schüler,

1) Siehe auch die in Nr. 60 angeführte Literatur zur Theorie der geschmierten Reibung.

2) Vielleicht darf der Verfasser auch seine in den Göttinger Nachrichten 1911 erschienene Note: Zum Turbulenzproblem, nennen.

gehen auf eine teils experimentelle, teils theoretische Behandlung der schwierigen turbulenten Bewegungen und der durch sie veranlaßten Kraftwirkungen aus. Die Bedeutung der hier in Frage kommenden Erscheinungen für die Luftschiffahrt liegt auf der Hand. Es sei diesbezüglich auf die neue Zeitschrift: „Flugtechnik und Motorluftschiffahrt" und das Buch von Lanchester, deutsch von Runge: Aerodynamik, ein Werk über das Fliegen, hingewiesen.

Von Seiten wissenschaftlich arbeitender Techniker (Prašil, Stodola, Lorenz, v. Mises u. a.) werden neuerdings erfolgreiche Vorstöße gemacht, die Theorie der Wasserturbinen usw. mechanisch-wissenschaftlich zu begründen. Es darf hier vielleicht darauf hingewiesen werden, daß demnächst (bei Teubner) ein Buch von v. Mises: Technische Hydromechanik erscheinen wird.

Die turbulente Bewegung der Gase mit Beachtung der Thermodynamik ist noch wenig untersucht. Der Entropiebegriff stammt von Clausius (1867/69). Eine axiomatische Begründung der Thermodynamik enthält der Aufsatz von C. Carathéodory: Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik, Math. Ann., Bd. 67, 1909. Als Lehrbücher der Theormodynamik seien in erster Linie genannt: Kirchhoff: Theorie der Wärme, Planck: Vorlesungen über Thermodynamik, Voigt: Kompendium der theoretischen Physik, und: Thermodynamik (Sammlung Schubert), Lorenz: Technische Physik, Bd. II, Zeuner: Technische Thermodynamik, Weyrauch: Grundriss der Wärmetheorie.

Endlich ist wieder auf die Enzyklopädie der math. Wissenschaften hinzuweisen: in Bd. IV, Teil II, 1. Hälfte (Hydromechanik) sind es die Artikel von Abraham, Love, Finsterwalder, Cranz, Zemplen, Forchheimer, Grübler, Kriloff und Müller, die in Betracht kommen, in Bd. V (Physik), Teil I, B (Thermodynamik) die Artikel von Bryan, Hobson und Diesselhorst, Schröter und Prandtl.

Anhang.

Skizze einer Vektoranalysis.

I. Vektorrechnung.

1. Ein Vektor ist eine Strecke von bestimmter Größe und Richtung: Wir schreiben $\bar{r}$ und sprechen: r-Vektor. Zwei Vektoren sind dann und nur dann einander gleich, wenn sie parallel und gleicher Größe und Richtung sind.

Dazu genügt, daß ihre orthogonalen oder parallelen Komponenten (d. i. Projektionen) nach drei nicht in einer Ebene gelegenen Richtungen einander gleich sind unter Berücksichtigung des Vorzeichens.

2. $-\bar{r}$ ist der zu $\bar{r}$ entgegengesetzt gerichtete parallele Vektor gleicher absoluter Größe.

Ist λ eine positive Zahl, so sei $\lambda\bar{r}$ der Vektor, der mit $\bar{r}$ gleiche Richtung hat, dessen Länge aber λ mal so groß sei. Ist λ negativ, so drehe sich noch der Sinn um. Man erkennt sofort, daß

$$\lambda(\mu\bar{r}) = \mu(\lambda\bar{r}) = \mu\lambda\bar{r}$$

ist, mögen nun λ, μ positive oder negative Zahlen sein.

3. Man addiert zwei Vektoren $\bar{a}$, $\bar{b}$: $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, indem man sie ungeändert nach Größe und Richtung aneinander setzt: $\bar{c}$ ist dann der Vektor vom Anfangspunkt des ersten zum Endpunkt des zweiten Vektors.

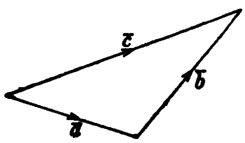


Fig. 257.

Ebenso sei

$$\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b}).$$

Man sieht nun leicht die Richtigkeit folgender Sätze ein:

a) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ (kommutatives Gesetz),

b) $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$ (assoziatives Gesetz),

c) $\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$ (distributives Gesetz).

4. Das **innere Produkt** zweier Vektoren $\bar{a}$ und $\bar{b}$: $\bar{a}\cdot\bar{b}$ (sprich a-Vektor „in" b-Vektor) ist ein Skalar, d. h. eine gemeine Zahl, gleich dem Produkt aus den Längen beider Vektoren und dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels: $\bar{a}\cdot\bar{b} = ab\cos(\bar{a}\,|\,\bar{b})$. Aus der Definition folgen sofort die Sätze

a) $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$ (kommutatives Gesetz),

b) $\bar{a}\cdot(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{a}\cdot\bar{c}$ (distributives Gesetz).

Dieses Gesetz ist sofort einzusehen, wenn man bedenkt, daß auch $\bar a \cdot \bar b$ gleich ist der mit der Länge von $\bar a$ multiplizierten Projektion von $\bar b$ auf die Richtung von $\bar a$ und daß die Projektion einer Summe zweier Strecken gleich der Summe der Projektion der beiden Strecken ist.

c) $$(\lambda \bar a) \cdot \bar b = \lambda \bar a \cdot \bar b.$$

d) $\bar a \cdot \bar b$ ist Null (außer wenn $\bar a = 0$ oder $\bar b = 0$), nur dann noch, wenn $\bar a$ und $\bar b$ senkrecht aufeinander stehen.

5. Das äußere Produkt zweier Vektoren $\bar a$ und $\bar b$: $\overline{ab}$ (sprich: a- über b-Vektor) ist ein Vektor (daher die Schreibweise). Er steht senkrecht auf der Ebene der Vektoren $\bar a$ und $\bar b$ (daher der Name) und ist so gerichtet, daß von ihm aus gesehen $\bar a$ zur Rechten, $\bar b$ zur Linken liegt. Seine Größe ist

$$|\overline{ab}| = ab \sin(\bar a | \bar b).$$

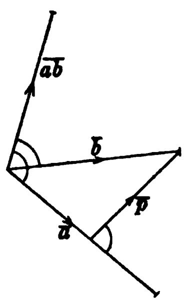


Fig. 258.

Man kann den Vektor $\overline{ab}$ auch so entstehen lassen: man bilde die Projizierende von $\bar b$ auf $\bar a$; es sei dies $\bar p$, multipliziere $\bar p$ mit der Länge von $\bar a$ und drehe dann um $\bar a$ rechts herum durch einen rechten Winkel. Aus der ersten Definition erkennt man sofort

a) $\overline{ab} = -\overline{ba}$ (Ersatz des kommutativen Gesetzes).

Aus der zweiten gleichwertigen Definition erkennt man

b) $$\overline{a(b+c)} = \overline{ab} + \overline{ac},$$

denn die einzelnen Operationen, aus denen die Bildung des äußeren Produkts mit $\bar a$ zusammengesetzt werden kann, sind augenscheinlich distributiv.

c) $$\overline{(\lambda a)b} = \lambda \overline{ab},$$

wenn λ ein Skalar ist.

d) $\overline{ab}$ gleich Null (außer für $\bar a = 0$ oder $\bar b = 0$), nur dann noch, wenn $\bar a$ und $\bar b$ gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben.

6. Statt der für die Multiplikation fehlenden assoziativen Gesetze (es ist augenscheinlich $(\bar a \cdot \bar b)\bar c$ nicht gleich $\bar a(\bar b \cdot \bar c)$ und ebensowenig $\overline{a(\overline{bc})}$ gleich $\overline{(\overline{ab})c}$) bestehen zwei weitere Gesetze, die jene in gewissem Grade ersetzen können, nämlich

a) der Vertauschungssatz:

$$\bar a \cdot \overline{bc} = \bar b \cdot \overline{ca} = \bar c \cdot \overline{ab}.$$

Man sieht diesen Satz sofort als richtig an, wenn man sich überlegt, daß diese drei Ausdrücke nichts anderes bedeuten als den sechsfachen Inhalt des aus den vom Punkte O ausgehenden Vektoren $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ gebildeten Tetraeders, dessen Inhalt positiv gerechnet, wenn bei Umkreisung des Tetraeders in der Reihenfolge $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ das Tetraeder zur Linken liegt.

b) Der **Entwicklungssatz:**

$$\overline{a(\overline{bc})} = \bar b(\bar a \cdot \bar c) - \bar c(\bar a \cdot \bar b).$$

Man sieht sofort ein, daß der Vektor der linken Seite in der Ebene durch $\bar b$ und $\bar c$ liegt, daß also

$$\overline{a(\overline{bc})} = \beta \bar b + \gamma \bar c.$$

wo β, γ irgend zwei Skalare sind. Da er ferner auf $\bar a$ senkrecht steht, folgt durch Bildung des inneren Produktes mit $\bar a$

$$0 = \beta \bar a \cdot \bar b + \gamma \bar a \cdot \bar c$$

oder

$$\beta = \varrho \cdot \bar a \cdot \bar c, \quad \gamma = - \varrho \cdot \bar a \cdot \bar b$$

oder

$$\overline{a(\overline{bc})} = \varrho(\bar b(\bar a \cdot \bar c) - \bar c(\bar a \cdot \bar b)).$$

Daß nun jetzt ϱ gleich 1 ist, bedarf noch eines etwas längeren Beweises, den wir kurz skizzieren: 1. Für den Fall $\bar a = \overline{bc}$ ist der Satz trivial. 2. Für $\bar a = \bar b$ ist $|\overline{b \cdot \overline{bc}}|^2 = b^4c^2 \sin^2(\bar b|\bar c)$, aber auch $|\bar b(\bar b \cdot \bar c) - \bar c b^2|^2 = b^4c^2 - b^2(\bar b \cdot \bar c)^2 = b^4c^2 \sin^2(\bar b|\bar c)$. Mithin ist hier $\varrho = \pm 1$. Daß $\varrho = 1$ ist, folgt für den Fall $\bar b \cdot \bar c = 0$ aus der Anschauung, für die andern Fälle aus Stetigkeitsgründen. 3. Ebenso beweist man den Satz für $\bar a = \bar c$. 4. Im allgemeinen Falle kann man, wenn nicht $\overline{bc} = 0$ ist — was trivial ist — $\bar a$ in der Form $x\bar b + y\bar c + z\overline{bc}$ darstellen. Wegen der distributiven Multiplikationsgesetze gilt aber der Satz auch für $\bar a = x\bar u + y\bar v + z\bar w$, wenn er für $\bar u$, $\bar v$, $\bar w$ gilt.

Wir bemerken noch, daß der Satz $\varrho = 1$ ein Satz der sphärischen Trigonometrie ist; seien nämlich $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ drei Einheitsvektoren, d. h. Vektoren der Länge 1, ABC das von ihren Endpunkten gebildete sphärische Dreieck, so sagt $\varrho = 1$ dasselbe aus wie

$$\sin a \cos h_a = \sqrt{\cos^2 b + \cos^2 c - 2 \cos a \cos b \cos c}.$$

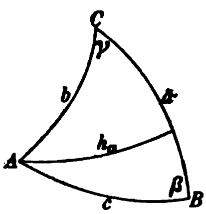


Fig. 259.

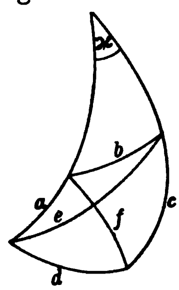


Fig. 260.

Aus Vertauschungs- und Entwicklungssatz folgen noch zwei nützliche Sätze:

c) $$\overline{ab} \cdot \overline{cd} = (\bar a \cdot \bar c)(\bar b \cdot \bar d) - (\bar a \cdot \bar d)(\bar b \cdot \bar c)$$

(nach dem Vertauschungssatze ist

$$\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \bar c \cdot \overline{d(\overline{ab})}$$

und auf das letzte dreifache Produkt wende man den Entwicklungssatz an).

Dieser Satz ist übrigens identisch mit einem Satz von Gauß über das sphärische Viereck (Fig. 260), nämlich

$$\sin a \cdot \sin c \cdot \cos x = \cos b \cdot \cos d - \cos e \cdot \cos f.$$

d) $$a(\overline{bc}) + \overline{b(\overline{ca})} + \overline{c(\overline{ab})} = 0.$$

Um ihn zu beweisen, braucht man nur jedes der drei dreifachen Produkte zu entwickeln.

II. Vektorgeometrie.

1. Seien $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$, $\bar{\varepsilon}_3$ drei zueinander orthogonale Einheitsvektoren, also $\bar{\varepsilon}_1^2 = \bar{\varepsilon}_2^2 = \bar{\varepsilon}_3^2 = 1$, $\bar{\varepsilon}_1 \cdot \bar{\varepsilon}_2 = 0$ usw. ($\bar{a}^2$ sei stets $\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2$), so kann man jeden Vektor $\bar{a}$ darstellen

$$\bar{a} = a_1 \bar{\varepsilon}_1 + a_2 \bar{\varepsilon}_2 + a_3 \bar{\varepsilon}_3 ,$$

wo a_1, a_2, a_3 die orthogonalen Komponenten von $\bar{a}$ nach dem durch $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$, $\bar{\varepsilon}_3$ bestimmten Achsenkreuz sind.

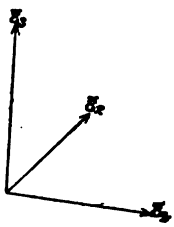


Fig. 261.

Durch Ausmultiplikation von

$$\bar{a} = a_1 \bar{\varepsilon}_1 + a_2 \bar{\varepsilon}_2 + a_3 \bar{\varepsilon}_3$$

mit

$$\bar{b} = b_1 \bar{\varepsilon}_1 + b_2 \bar{\varepsilon}_2 + b_3 \bar{\varepsilon}_3 ,$$

und zwar Bildung des inneren Produktes, findet man sofort

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 . \tag{a}$$

Durch Bildung des äußeren Produktes und Beachtung des Umstandes, daß

$$\overline{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = \bar{\varepsilon}_3 \text{ usw.}$$

wenn die Achsen $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$, $\bar{\varepsilon}_3$ ein rechtshändiges System bilden (etwa $\bar{\varepsilon}_1$ nach rechts, $\bar{\varepsilon}_2$ nach hinten, $\bar{\varepsilon}_3$ nach oben)

$$\overline{ab} = \bar{\varepsilon}_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + \bar{\varepsilon}_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + \bar{\varepsilon}_3(a_1 b_2 - a_2 b_1). \tag{b}$$

Daraus folgt dann weiter leicht, daß

$$\bar{a} \cdot bc = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

wodurch die Vertauschungsformel in Evidenz gesetzt ist.

2. Gleichung der Geraden. Eine Gerade kann gegeben werden durch den festen Vektor $\bar{a}$ von einem Punkte O aus zu einem

festen ihrer Punkte und durch einen Vektor $\bar{\varepsilon}$, der ihre Richtung angibt. Der Vektor $\bar{x}$ nach einem beliebigen ihrer Punkte X ist dann

$$\bar{x} = \bar{a} + \bar{\varepsilon} \cdot s, \tag{a}$$

wo s einen variabelen Parameter darstellt.

(a) heißt die Parametergleichung der Geraden. Man kann s aus (a) eliminieren durch Bildung des äußeren Produktes

$$\overline{\varepsilon x} = \overline{\varepsilon a}. \tag{b}$$

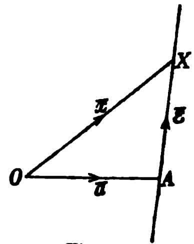


Fig. 262.

Diese Gleichung ist mit (a) vollkommen identisch, denn aus ihr folgt

$$\overline{\varepsilon(x-a)} = 0,$$

d. h. vermöge I, 5, d)

$$\bar{x} - \bar{a} = \bar{\varepsilon} \cdot s.$$

Setzt man $\overline{\varepsilon a} = \bar{b}$, so steht $\bar{b}$ auf $\bar{\varepsilon}$ senkrecht, ist sonst aber beliebig, also lautet die Gleichung der Geraden auch

$$\overline{\varepsilon x} = \bar{b}, \tag{c}$$

wo aber

$$\bar{\varepsilon} \cdot \bar{b} = 0 \tag{d}$$

sein muß.

Gleichung (c) heißt die Plückersche Gleichung der Geraden, $\bar{\varepsilon}$, $\bar{b}$ die Plückerschen Vektoren. Je zwei Vektoren $\bar{\varepsilon}$, $\bar{b}$, welche aufeinander senkrecht stehen, d. h. (d) erfüllen, bestimmen eine Gerade eindeutig.

3. Sei $\bar{r}$ eine stetig differentiierbare Funktion eines Skalars t, d. h. seien es die Komponenten x, y, z von $\bar{r}$, so kann man

$$\bar{r} = \bar{r}(t)$$

als Parametergleichung einer Kurve auffassen: $\frac{d\bar{r}}{dt}$ mit den Komponenten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ ist dann tangential an die Kurve gerichtet im Sinne wachsender t, seine Größe ist $\frac{ds}{dt}$, wo ds das Bogenelement bedeutet (siehe Nr. 18).

4. Etwas über Differentialgeometrie der Raumkurven Es seien $\bar{\sigma}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\nu}'$ drei Einheitsvektoren, deren Richtungen in die Tangente, Normale und Binormale der Kurve fallen, welche also das sogenannte natürliche Koordinatensystem der Kurve geben, so daß

$$\overline{\sigma\nu} = \bar{\nu}', \quad \overline{\nu\nu'} = \bar{\sigma}, \quad \overline{\nu'\sigma} = \bar{\nu}. \tag{a}$$

Wir wissen schon, daß

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = \frac{1}{\varrho}\bar{\nu} \tag{b}$$

ist, wo ϱ den Krümmungsradius bedeutet (siehe Nr. 26). Nun folgt aus $\bar{\nu}' = \overline{\sigma\nu}$ und (b)

$$\frac{d\bar{\nu}'}{ds} = \overline{\sigma\frac{d\nu}{ds}};$$

also steht $\frac{d\bar{\nu}'}{ds}$ auf $\bar{\sigma}$ senkrecht.

Wegen

$$\bar{\nu}'^2 = 1$$

ist aber

$$\bar{\nu}'\frac{d\bar{\nu}'}{ds} = 0,$$

also steht $\frac{d\bar{\nu}'}{ds}$ auch auf $\bar{\nu}'$ senkrecht. Deswegen muß sein

$$\frac{d\bar{\nu}'}{ds} = \frac{1}{\varrho'}\bar{\nu}. \tag{c}$$

ϱ' heißt der Torsionsradius. Für eine ebene Kurve ($\bar{\nu}' = \text{const}$) ist er Null.

Um drittens $\frac{d\bar{\nu}}{ds}$ zu finden, differentiieren wir

$$\bar{\nu} = \overline{\nu'\sigma}.$$

Das gibt in Verbindung mit (a), (b), (c)

$$\frac{d\bar{\nu}}{ds} = -\frac{1}{\varrho'}\bar{\nu}' - \frac{1}{\varrho}\bar{\sigma}. \tag{d}$$

Man nennt die Formeln (b), (c), (d) die Frenetschen oder Serretschen Formeln.

Beim Fortgang längs einer gekrümmten Kurve wird das natürliche Koordinatensystem eine Drehung $d\bar{\chi}$ erleiden. Setzen wir

$$\frac{d\bar{\chi}}{ds} = \bar{\omega}'.$$

Dann ist nach der Eulerschen Formel (siehe Nr. 263)

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = \overline{\omega'\sigma}, \quad \frac{d\bar{\nu}}{ds} = \overline{\omega'\nu}, \quad \frac{d\bar{\nu}'}{ds} = \overline{\omega'\nu'}. \tag{e}$$

Vergleichen wir (e) mit (b), (c), (d), so bekommen wir

$$\overline{\omega'\sigma} = \frac{1}{\varrho}\bar{\nu},$$

$$\overline{\omega'\nu} = -\frac{1}{\varrho'}\bar{\nu}' - \frac{1}{\varrho}\bar{\sigma},$$

$$\overline{\omega'\nu'} = \frac{1}{\varrho'}\bar{\nu}.$$

Setzen wir an:

$$\omega' = \lambda\bar{\sigma} + \mu\bar{\nu} + \tau\bar{\nu}',$$

so bekommen wir aus den vorstehenden Formeln in Verbindung mit (a) leicht

$$\lambda = -\frac{1}{\varrho'}, \quad \mu = 0, \quad \tau = \frac{1}{\varrho}$$

oder

$$\bar{\omega}' \equiv \frac{d\bar{\chi}}{ds} = -\frac{1}{\varrho'}\bar{\sigma} + \frac{1}{\varrho}\bar{\nu}'. \tag{f}$$

Es besteht also die Drehung des natürlichen Koordinatensystems aus einer Drehung um die Tangente (die Torsion) und aus einer solchen um die Binormale (die Biegung oder Krümmung); die entsprechenden Winkel sind $-\frac{ds}{\varrho'}$ und $\frac{ds}{\varrho} = d\alpha$, der sogenannte Kontingenzwinkel.

5. Sei U eine stetig differentiierbare Funktion des Ortsvektors $\bar{r}$, d. h. von x, y, z, seinen drei Komponenten, so ist $U(\bar{r}) = \text{const.}$ eine Flächenschar. $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ sind dann die Komponenten eines Vektors, den wir Gradienten nennen und

$$\text{grad}\, U \quad \text{oder} \quad \frac{d}{d\bar{r}}\, U$$

schreiben, denn es ist

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \equiv \frac{dU}{d\bar{r}} \cdot d\bar{r}.$$

Man sieht leicht, daß $\frac{dU}{d\bar{r}}$ auf den Flächen $U = \text{const.}$ senkrecht steht und daß seine Größe $\frac{dU}{dn}$ ist, wo dn in der Normalrichtung genommen ist.

$-\frac{dU}{d\bar{r}}$ heißt das „Gefälle“ von U (siehe Nr. 88).

6. Sei $\bar{v}$ eine Funktion von $\bar{r}$, so sind zwei Ableitungen von besonderem Interesse,

a) eine skalare, die Divergenz

$$\text{div}\,\bar{v} \equiv \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

(v_x, v_y, v_z die rechtwinkligen Komponenten von $\bar{v}$),

b) eine vektorielle, der Rotor

$$\text{rot}\,\bar{v} = \bar{\varepsilon}_x\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \bar{\varepsilon}_y\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \bar{\varepsilon}_z\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right).$$

Daß die Divergenz tatsächlich ein Skalar ist, dessen Wert von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig ist und ebenso $\text{rot}\,\bar{v}$ ein Vektor, erkennt man am besten in folgender Weise:

Man kann $\bar{v}$ als Geschwindigkeit eines augenblicklich an der Stelle $\bar{r}$ befindlichen Punktes auffassen, $\bar{v}dt$ als seine infinitesimale Verschiebung: $dx = v_x dt$, $dy = v_y dt$, $dz = v_z dt$. Dann ist die relative Verschiebung zweier um $\delta\bar{r}$ verschiedener Punkte

$$\delta dx = \frac{\partial(v_x dt)}{\partial x}\delta x + \frac{\partial(v_x dt)}{\partial y}\delta y + \frac{\partial(v_x dt)}{\partial z}\delta z$$

usw.

Die hierdurch ausgedrückte linear homogene, infinitesimale Transformation oder Affinität läßt sich aber nach Nr. 365 in zwei zerlegen, in eine reine mit dem Koeffizientenschema

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}dt, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)dt, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)dt$$

usw.

mit symmetrischer Determinante und eine **Drehung**, deren unendlich kleiner Vektor eben

$$\frac{1}{2}\operatorname{rot}\bar{v}\,dt$$

ist.

Damit ist der vektorielle Charakter des $\operatorname{rot}\bar{v}$ dargetan und zugleich sein Name erklärt.

Die Divergenz ist aber, mit dt multipliziert, nichts anderes als die erste Invariante der reinen Affinität (siehe Nr. 365).

7. Man hat einen symbolischen Vektor ∇ (sprich: „**Nabla**") eingeführt mit den Komponenten $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$. Noch besser bezeichnet man ihn mit $\frac{d}{d\bar{r}}$. Dann schreibt sich naturgemäß

$$\operatorname{grad} U \equiv \frac{dU}{d\bar{r}} \equiv \nabla U,$$

$$\operatorname{div}\bar{v} = \nabla\cdot\bar{v} = \frac{d}{d\bar{r}}\cdot\bar{v},$$

$$\operatorname{rot}\bar{v} = \overline{\nabla v} = \overline{\frac{d}{d\bar{r}}\bar{v}};$$

denn die Bildungen sind die ganz analogen wie bei den verschiedenen Produkten.

III. Vektorintegrale.

1. Der Gaußsche Satz. Es liege ein bestimmtes Volumen V vor, dann ist das Integral über dieses Volumen

$$\int\limits_V \frac{\partial U}{\partial x}dV = \int\limits_F U\cos(\bar{\nu}, x)\,dF,$$

wo das Integral der rechten Seite über die Oberfläche F des Volumens zu erstrecken ist und $\bar{\nu}$ die **äußere** Normale angibt. U muß eine stetig differentiierbare, eindeutige Funktion des Ortes sein.

Beweis: Es ist

$$\int \frac{\partial U}{\partial x} dV = \iiint \frac{\partial U}{\partial x} dx\,dy\,dz = \iint dy\,dz\,(U_4 - U_3 + U_2 - U_1),$$

wenn bei festem y, z die Grade $y = \text{const.}$, $z = \text{const.}$ das Volumen z. B. viermal trifft (siehe Fig. 263).

An den Austrittsstellen ist aber $dy\,dz = dF \cos(\bar{\nu}, x)$, an den Eintrittstellen $dy\,dz = -dF \cos(\bar{\nu}, x)$. Also ist tatsächlich

$$\int \frac{\partial U}{\partial x} dV = \int U \cos(\bar{\nu}, x)\, dF,$$

wo jetzt alle Flächenelemente dF rechts vorkommen. ∎

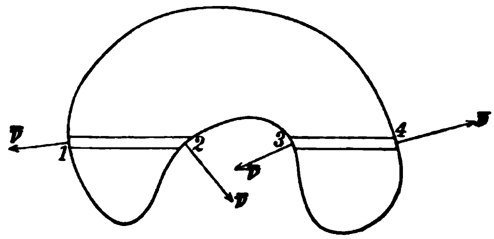


Fig. 263.

2. Anwendung des Gaußschen Satzes gibt

a) $$\int\limits_V \operatorname{div} \bar{v} \cdot dV = \int\limits_F (v_x \cos(\bar{\nu}, x) + v_y \cos(\bar{\nu}, y) + v_z \cos(\bar{\nu}, z))\, dF$$
$$= \int\limits_F v_\nu \cdot dF,$$

wenn v_ν die Komponente von $\bar{v}$ nach der äußeren Normalen bedeutet.

b) Der Gaußsche Satz kombiniert mit partieller Integration ergibt

$$\int\limits_V W \frac{\partial U}{\partial x} dV = \int\limits_F W U \cos(\bar{\nu}, x) dF - \int\limits_V \frac{\partial W}{\partial x} U\, dV.$$

Eine Anwendung davon ist der folgende Satz von **Green**:

$$\int\limits_V \frac{\partial u}{\partial \bar{r}} \cdot \frac{\partial v}{\partial \bar{r}} dV = \int\limits_V v \frac{\partial u}{\partial n} dF - \int\limits_V v \Delta u\, dV,$$

wobei

$$\Delta u \equiv \operatorname{div} \frac{\partial u}{\partial \bar{r}} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

ist.

3. Endlich sei noch ohne Beweis der **Stokessche** Satz mitgeteilt, den wir im Buche nicht gebraucht haben: F sei ein zweiseitiges Flächenstück mit dem Rand s. Eine seiner Normalen sei durch $\bar{\nu}$

ausgezeichnet, $d\bar{s}$ sei ein gerichtetes Bogenelement des Randes und zwar so gerichtet, daß $\bar{\nu}$ zur Linken liegt.

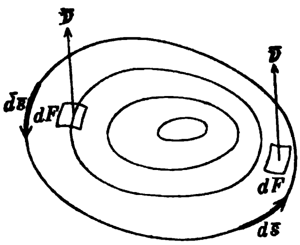


Fig. 264.

Dann ist der sogenannte Umlauf des Vektors $\bar{v}$

$$\int\limits_{S} \bar{v} \cdot d\bar{s} = \int\limits_{F} \operatorname{rot} \bar{v} \cdot \bar{\nu}\, dF,$$

also gleich dem Durchfluß des Rotors durch die Fläche.

IV. Elemente der Dyadenrechnung.

1. Unter einer Dyade verstehen wir das Schema von neun Größen:

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3, \end{matrix}$$

welche einen Vektor $\bar{r}(x, y, z)$ homogen linear in einen Vektor $\bar{u}(x_1, x_2, x_3)$ transformieren:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\ x_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z, \\ x_3 &= a_3 x + b_3 y + c_3 z. \end{aligned}$$

Ist $b_1 = a_2$, $c_1 = a_3$, $c_2 = b_3$, so heiße die Dyade symmetrisch.

Nennen wir die Dyade $\mathit{\Delta}$, so schreiben wir die Transformation

$$\bar{u} = \mathit{\Delta} \cdot \bar{r}.$$

Die Dyade

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}$$

heißt die zur ersteren konjugierte.

Zu jeder nichtsymmetrischen Dyade gehört ein Vektor mit den Komponenten

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2}(b_3 - c_2), \\ \omega_2 &= \frac{1}{2}(c_1 - a_3), \\ \omega_3 &= \frac{1}{2}(a_2 - b_1). \end{aligned}$$

Daß dies tatsächlich drei Vektorkomponenten sind, erkennt man daran, daß sie die Komponenten der Drehgeschwindigkeit sind, wenn man die Formeln

$$x_1 dt = a_1 dt x + b_1 dt y + c_1 dt z \text{ usw.}$$

als infinitesimale lineare Transformationen auffaßt (siehe Nr. 365).

Aus demselben Grunde folgt, daß jeder symmetrischen Dyade

$$\begin{matrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{matrix}$$

eine Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung zugeordnet ist, die Deformationsfläche

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2gxz + 2fxy = \text{const.}$$

Nach den bekannten Sätzen über Flächen zweiter Ordnung hat eine symmetrische Dyade drei Invarianten, d. h. drei Größen, die bei Koordinatentransformation ungeändert bleiben. Das sind entweder die Längen der drei Hauptachsen der Deformationsfläche oder, wenn man sie rational will, die drei Koeffizienten der die Hauptachsen bestimmenden Gleichung dritten Grades, also nach Nr. 364

$$J_1 = a + b + c, \text{ der erste Skalar,}$$

$$J_2 = ab + bc + ca - (f^2 + g^2 + h^2), \text{ der zweite Skalar,}$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}, \text{ der dritte Skalar.}$$

2. Man kann ein vollständiges Produkt zweier Vektoren $\bar{a}$, $\bar{b}$ bilden, nämlich die Dyade

$$\begin{matrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 . \end{matrix}$$

Daß dies wirklich eine Dyade ist, erkennt man daraus, daß

$$a_1 b_1 x_1 + a_1 b_2 x_2 + a_1 b_3 x_3 \text{ usw.}$$

die Komponenten eines Vektors sind, den man in der Vektorsprache als

$$\bar{a}(\bar{b} \cdot \bar{x})$$

zu bezeichnen hat.

Nennen wir die obige Dyade

$$(\bar{a};\, \bar{b}),$$

so ist

$$(\bar{a};\, \bar{b}) \cdot \bar{x} = \bar{a}(\bar{b} \cdot \bar{x}),$$

womit ein neues assoziatives Gesetz aufgestellt ist. $(\bar{b};\, \bar{a})$ ist die konjugierte Dyade zu $(\bar{a};\, \bar{b})$.

Man sieht ferner, daß der Vektor des dyadischen Produktes das halbe äußere Produkt, der erste Skalar das innere Produkt beider Vektoren ist.

3. Man kann noch (nach Jaumann) ein zweites dyadisches Produkt zweier Vektoren $\bar{a}$, $\bar{b}$ bilden, das freilich nicht unabhängig vom ersten ist, nämlich

$$(\bar{a} \underset{;}{\times} \bar{b}) = \left\{\begin{matrix} -a_2 b_2 - a_3 b_3 & +a_2 b_1 & +a_3 b_1 \\ +a_1 b_2 & -a_1 b_1 - a_3 b_3 & +a_3 b_2 \\ +a_1 b_3 & +a_2 b_3 & -a_1 b_1 - a_2 b_2 \end{matrix}\right\}.$$

Man sieht, daß

$$(\bar{a} \underset{;}{\times} \bar{b}) \equiv -(\bar{a} \cdot \bar{b}) I + (\bar{b};\, \bar{a}),$$

wo I, der Idemfaktor, die Identitätsdyade

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

bedeutet.

Der Wert dieser Neueinführung beruht auf einem neu zu gewinnenden assoziativen Gesetz der äußeren Multiplikation; es ist

$$(\bar{a} \underset{;}{\times} \bar{b}) \cdot \bar{x} = \ddot{a}\overline{(\bar{b} x)},$$

wie man leicht erkennt.

4. Auch die vollständige Ableitung eines Vektors nach einem Vektor ist jetzt definierbar:

$\frac{d\bar{u}}{d\bar{r}}$ ist die Dyade, welche $d\bar{r}$ in $d\bar{u}$ transformiert, also die Dyade

$$A = \left\{\begin{matrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{matrix}\right\}.$$

so daß

$$d\bar{u} = A \cdot d\bar{r}.$$

Der erste Skalar dieser Dyade ist $\operatorname{div} \bar{u}$, der Vektor ist der halbe Rotor. Man schreibt übrigens besser $A = \left(\bar{u};\, \frac{d}{d\bar{r}}\right)$, denn es ist wohl

$$\left(\bar{u};\, \frac{d}{d\bar{r}}\right) \cdot d\bar{r} = d\bar{u},$$

aber es ist z. B. $\left(\bar{u};\, \frac{d}{d\bar{r}}\right) \cdot \bar{u}$ nicht etwa gleich $\frac{1}{2} \frac{d}{d\bar{r}} (\bar{u}^2)$. Letzterer Vektor ist vielmehr gleich $\left(\frac{d}{d\bar{r}};\, \bar{u}\right) \cdot \bar{u}$, wo $\left(\frac{d}{d\bar{r}};\, \bar{u}\right)$ die konjugierte Dyade von $\left(\bar{u};\, \frac{d}{d\bar{r}}\right)$ ist.

Wegen alles Weiteren ziehe man Gibbs, Vektoranalysis und Jaumann, Grundlagen der Bewegungslehre zu Rate.

Verzeichnis und Auflösung der Aufgaben.

(Die eingeklammerten Nummern hinter dem Stichwort geben die Nummern des Buches an.)

1. Graphischer Fahrplan (Nr. 14).

2. Mittlere Geschwindigkeit eines Zuges (Nr. 17): $v = 19{,}4$ m/sec.

3. Rotierendes Rad (Nr. 17): $\omega = 10{,}47$ (sec^{-1}); $v = 12{,}57$ m/sec.

4. Laternenaufgabe (Nr. 17): $v = 3$ m/sec.

5. Winkelgeschwindigkeit der Erde (Nr. 17):

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = 7{,}29 \cdot 10^{-5},$$
$$v = 6370 \cdot 10^3 \cdot \cos\frac{\pi}{6} \cdot \omega = 401{,}2 \text{ m/sec.}$$

6. Lissajoussche Figur (Nr. 20): $\dot{x} = 0$ und $\dot{y} = 0$ für $t = \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$ usw.[1]) Periode das kleinste gemeinsame Vielfache von π und $\frac{2\pi}{3}$, d. h. 2π. In den Ecken A, B kehrt die Bewegung auf derselben Kurve um.

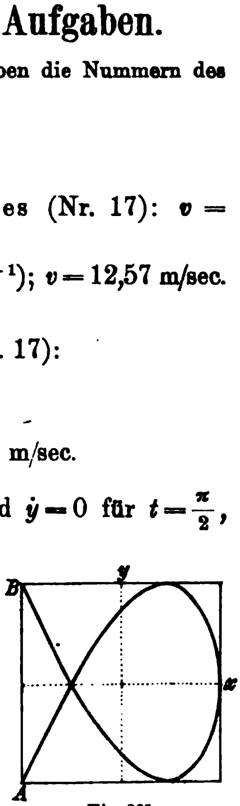


Fig. 265.

7. Schraubenbewegung (Nr. 20):
$\bar{r}$: $x = a\cos\vartheta$, $y = a\sin\vartheta$, $z = \frac{h}{2\pi}\vartheta$; $\left(\varepsilon = \frac{h}{2\pi a}\right)$,
$\bar{v}$: $\dot{x} = -a\sin\vartheta\cdot\omega$, $\dot{y} = a\cos\vartheta\cdot\omega$, $\dot{z} = \varepsilon a\cdot\omega$,
also $v = \sqrt{1+\varepsilon^2}\, a\omega$, $\omega = \frac{v}{a\sqrt{1+\varepsilon^2}} \doteq 0{,}07$ pro Sek.

8. Maximale Wurfweite (Nr. 22): für $\alpha = 45^\circ$.

9. Zielwinkel (Nr. 22): Zwei Lösungen:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v^2}{g x_1} \pm \sqrt{\frac{v_0^4}{g^2 x_1^2} - \frac{2 v_0^2 z_1}{x_1^2 g} - 1}.$$

10. Einhüllende der Wurfparabeln (Nr. 22): $\operatorname{tg}\alpha$ der vorigen Aufgabe bleibt reell, solange $\frac{v_0^4}{g^2 x_1^2} - \frac{2 v_0^2 z_1}{x_1^2 g} - 1 \geqq 0$. Also Grenzkurve

---

1) Dies tritt abwechselnd an den Stellen $x = -1$ und $y = \pm 1$ ein.

des Treffgebietes und zugleich Einhüllende die Parabel $v_0^4 - 2v_0^2 z_1 g - x_1^2 g^2 = 0$. Diese Gleichung kann auch in bekannter Weise aus der Gleichung der Bahnkurve:

$$F(x, z; \operatorname{tg}\alpha) \equiv z + \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)x^2 - \operatorname{tg}\alpha x = 0$$

und aus $\frac{\partial F}{\partial(\operatorname{tg}\alpha)} = 0$ durch Elimination von $\operatorname{tg}\alpha$ gefunden werden.

11. Förderkorb (Nr. 25): $s_1 = 13{,}3$ m, $s_2 = 366{,}7$ m, $s_3 = 20$ m, $t_1 = 6{,}6''$, $t_2 = 91{,}6''$, $t_3 = 10''$.

12. Beschleunigung der Schraubenbewegung (Nr. 26):

$$\ddot{x} = -a\cos\vartheta \cdot \omega^2, \quad \ddot{y} = -a\sin\vartheta \cdot \omega^2, \quad \ddot{z} = 0.$$

$$|w| = a\omega^2, \quad \varrho = \frac{v^2}{|w|} = a(1 + \varepsilon^2).$$

Da $\bar{w}$ horizontal und auf die Achse zugerichtet, enthält die Schmiegungsebene das Lot auf die Achse.

13. Zentripetalbeschleunigung bei der Erddrehung (Nr. 26): $r\omega^2 = 6370 \cdot 10^3 \cdot \cos\frac{\pi}{6} \cdot \omega^2 = 0{,}292$ [m/sec^{-2}].

14. $\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = \bar{\nu}\frac{1}{\varrho}$ (Frenetsche Formel): Man kann $\bar{\sigma}$ als Geschwindigkeit einer Bewegung auffassen, die mit der konstanten Bahngeschwindigkeit 1, und also mit der Bahnbeschleunigung 0 und der Zentripetalbeschleunigung $\frac{1}{\varrho}$ vor sich geht.

15. Dimensionsbetrachtung (Nr. 26):

$$\left[\frac{d\bar{v}}{dt}\right] = \left[\frac{dv}{dt}\right] = [l \cdot t^{-2}]; \quad \left[\frac{v^2}{\varrho}\right] = [l^2 t^{-2} \cdot l^{-1}] = [l t^{-2}].$$

16. Dimensionsbetrachtung (Nr. 27):

$$[\bar{w}] = [\ddot{r}] = [l t^{-2}]; \quad [r\omega^2] = [l \cdot t^{-2}]; \quad [\dot{r}\omega] = [l t^{-1} \cdot t^{-1}] = [l t^{-2}];$$
$$[r\dot{\omega}] = [l \cdot t^{-2}].$$

17. Beschleunigung in Polarkoordinaten (Nr. 27):

$$\ddot{x} = (\ddot{r} - r\omega^2)\cos\vartheta - (2\dot{r}\omega + r\dot{\omega})\sin\vartheta,$$
$$\ddot{y} = (\ddot{r} - r\omega^2)\sin\vartheta + (2\dot{r}\omega + r\dot{\omega})\cos\vartheta,$$

d. h. die Beschleunigung besteht aus dem Bestandteil $\ddot{r} - r\omega^2$ von der Richtung ϑ gegen die x-Achse und aus dem Bestandteil $2\dot{r}\omega + r\dot{\omega}$ von der Richtung $\vartheta + \frac{\pi}{2}$ gegen die x-Achse. $\left(\cos\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\vartheta,\right.$ $\left.\sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\vartheta.\right)$

18. Logarithmische Spirale (Nr. 27):

$$\dot{r} = kr\omega, \quad c = v \equiv \sqrt{\dot{r}^2 + (r\omega)^2} = r\omega\sqrt{1 + k^2};$$

also
$$\omega = \frac{1}{r}\frac{c}{\sqrt{1+k^2}}, \quad \dot{r} = \frac{kc}{\sqrt{1+k^2}};$$

$$\ddot{r} - r\omega^2 = -\frac{1}{r}\frac{c^2}{1+k^2}, \quad 2\dot{r}\omega + r\dot{\omega} = \frac{1}{r}\frac{c^2 k}{1+k^2},$$

das Verhältnis beider Beschleunigungskomponenten $= k$, also konstant.

19. Fallbeschleunigung (Nr. 27): $g = 9{,}81 \cdot \frac{3600^2}{1000} = 127500$ km/St.

20. Hodograph (Nr. 28): Bei der Fallbewegung: $\bar{v} = \bar{g}t + \bar{c}$, d. h. eine vertikale Gerade; bei der Schraubenbewegung ein horizontaler Kreis vom Radius $a\omega$ um die Mittelachse, der von C aus unter dem Winkel ε gegen den Horizont erscheint.

21, 22. Wrensche Konstante (Nr. 34):

$$\lambda = 4\pi^2 \frac{148000000^3}{(365\frac{1}{4} \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)^2}\,[\mathrm{km}^3\,\mathrm{sec}^{-2}] = 128 \cdot 10^9.$$

Es müßte $1{,}52^3$ gleich $\frac{687^2}{365\frac{1}{4}^2}$ sein. Erstere Zahl ist 3,51, letztere 3,54.

23. Hodograph der Planetenbahnen (Nr. 34): $r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\vartheta}$, $\dot{r} = \frac{p\varepsilon\sin\vartheta\cdot\omega}{(1+\varepsilon\cos\vartheta)^2}$ oder wegen $\omega = \frac{C}{r^2}$, $\dot{r} = \frac{C\varepsilon}{p}\sin\vartheta$. Also

$$v_x = \dot{r}\cos\vartheta - r\omega\sin\vartheta = -\frac{C}{p}\sin\vartheta,$$

$$v_y = \dot{r}\sin\vartheta + r\omega\cos\vartheta = \frac{C}{p}\cos\vartheta + \frac{C}{p}\varepsilon,$$

also $\left(v_y - \frac{C\varepsilon}{p}\right)^2 + v_x^2 = \frac{C^2}{p^2}$, d. i. die Gleichung eines exzentrischen Kreises.

24. Wrensche Konstante für die Mondbahn (Nr. 34):

$$\lambda' = 4\pi^2 \cdot \frac{(60 \cdot 6370)^3}{[27 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 + 7 \cdot 60 \cdot 60 + 48 \cdot 60]^2} = 3{,}61 \cdot 10^5.$$

25. Zentralbewegung für $\bar{w} = -\bar{\varrho}\frac{\varkappa^2}{r^3}$ (Nr. 34): Setzt man $r = \frac{1}{s}$, so erhält man $\frac{d^2 s}{d\vartheta^2} + a \cdot s = 0$, wo $a = \frac{\varkappa^2}{C^2} - 1$.

1. $a = \nu^2 > 0$, $s = A\sin(\nu\vartheta + \varepsilon)$, $r = \frac{1}{A\sin(\nu\vartheta + \varepsilon)}$.

Die Kurven haben Asymptoten, welche den Winkel $\frac{\pi}{\nu}$ miteinander einschließen. Der Abstand derselben von der Parallelen durch das Zentrum ist $\lim\limits_{\vartheta=0,\, s=0} r \sin\vartheta = \frac{1}{A\nu}$.

2. $a=0, \; s = a\vartheta + b, \; r = \frac{1}{a\vartheta + b}$, hyperbolische Spiralen.

3. $a = -\nu^2 < 0, \; s = Ae^{\nu\vartheta} + Be^{-\nu\vartheta}, \; r = \frac{1}{Ae^{\nu\vartheta} + Be^{-\nu\vartheta}}$;

entweder ($A > 0$, $B > 0$) die Kurve berührt einen Kreis von innen und nähert sich in doppelten Spiralen dem Nullpunkt, oder (A, B verschiedenes Zeichen) sie hat eine Asymptote und nähert sich in einfacher Spirale dem Nullpunkt (links gewunden, wenn $A > 0$, $B < 0$, rechts gewunden, wenn $A < 0$, $B > 0$).

26. Störungsglied (Nr. 34): Mit $r = \frac{1}{s}$, $1 - \frac{\varepsilon}{C^2} = n^2$ und $\frac{\lambda}{C^2} = \frac{n^2}{p}$ erhält man

$\frac{d^2 s}{d\vartheta^2} + n^2 s = \frac{n^2}{p}$, also $s = \frac{1}{p}(1 + a\cos(n\vartheta + \eta))$ oder $r = \frac{p}{1 + a\cos(n\vartheta + \eta)}$.

Nachdem sich ϑ um $\frac{2\pi}{n}$, d. h. um etwas mehr als 2π vermehrt hat, erhält r seinen alten Wert wieder.

27. Zentralbewegung an der Feder (Nr. 38): Der Flächensatz gilt, weil es sich um eine Zentralbewegung handelt. Differentialgleichung $\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\vartheta^2} + \frac{1}{r} = \frac{\lambda}{mC^2} r^2 (r - r_0)$. Aus $r = \text{const.}$ folgt

$$1 = \frac{\lambda}{mC^2} r^3 (r - r_0),$$

woraus sich ein bestimmtes $r > r_0$ als Lösung ergibt. Aus $m\ddot{x} = -\lambda x$ und $m\ddot{y} = -\lambda y$ folgt mit $\frac{\lambda}{m} = \varkappa^2$

$$x = a\cos\varkappa t + b\sin\varkappa t,$$

$$y = c\cos\varkappa t + d\sin\varkappa t,$$

also $$\cos\varkappa t = Ax + By, \quad \sin\varkappa t = Cx + Dy$$

oder $$(Ax + By)^2 + (Cx + Dy)^2 = 1,$$

die Gleichung einer Ellipse.

28. Guldinsche Regel (Nr. 53): $dF = 2\pi x ds$. Also

$$F = \int 2\pi x ds = 2\pi x^* s.$$

29. Gleichgewicht auf der schiefen Ebene (Nr. 57): Man berechnet R und N aus $-G\sin\alpha + K\cos\varepsilon - R = 0$, $-G\cos\alpha + N + k\sin\varepsilon = 0$; $|R| \leqq fN$ ergibt $G\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos(\varepsilon+\varphi)} \leqq K \leqq G\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos(\varepsilon-\varphi)}$.

30. Keilverbindung (Nr. 57): Seien die Drucke D_1 und D_2, so ist $S = D_1\cos(\alpha_1 \pm \varphi_1) = D_2\cos(\alpha_2 \pm \varphi_2)$, je nachdem der Keil hinein- oder herausgetrieben wird. Dazu ist eine (nach unten positiv gerechnete) Kraft P nötig, wo $P = D_1\sin(\alpha_1 \pm \varphi_1) + D_2\sin(\alpha_2 \pm \varphi_1) = S[\operatorname{tg}(\alpha_1 \pm \varphi_1) + \operatorname{tg}(\alpha_2 \pm \varphi_2)]$ ist. Damit der Keil von selbst hält, d. h. beim Herausziehen eine nach oben gerichtete Kraft nötig ist, muß also $\operatorname{tg}(\alpha_1 - \varphi_1) + \operatorname{tg}(\alpha_2 - \varphi_2) \leqq 0$ sein, d. h. $\alpha_1 - \varphi_1 \leqq \varphi_2 - \alpha_2$ oder $\alpha_1 + \alpha_2 \leqq \varphi_1 + \varphi_2$, w. z. b. w.

31. Bewegung auf der schiefen Ebene (Nr. 64): a) $v > 0$; $m\frac{dv}{dt} = -k\cos\varepsilon + mg\sin\alpha - R$, $0 = k\sin\varepsilon - mg\cos\alpha + N$; $R = fN = f(mg\cos\alpha - k\sin\varepsilon)$. Also $m\frac{dv}{dt} = -k\frac{\cos(\varphi+\varepsilon)}{\cos\varphi} + mg\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}$. b) $v < 0$. Man braucht nur φ mit $-\varphi$ zu vertauschen.

32. Kritische Geschwindigkeit bei Ritters Aufgabe (Nr. 64): t wird für endliche v unendlich, wenn $\sin\alpha\sqrt{v^2 + c^2} - \cos\alpha f v = 0$ werden kann, woraus mit $\operatorname{tg}\alpha = \lambda f$ folgt: $v = c\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}$. Dieser Wert ist nur dann reell, wenn $\lambda < 1$.

33. Schleudern aus einer rotierenden Röhre (Nr. 64): Die einzigen Kräfte sind Reibung und Normaldruck, also ($\dot r > 0$ angenommen) $m(\ddot r - r\omega^2) = -fN$, $2\dot r\omega m = N$, also $\ddot r + 2\dot r\omega f - r\omega^2 = 0$. Integral: $r = Ae^{\omega t(\sqrt{1+f^2}-f)} + Be^{-\omega t(\sqrt{1+f^2}+f)}$.

34. Kurve konstanter Fallgeschwindigkeit (Nr. 64): y vertikal, x horizontal, $\frac{dy}{dt} = \text{const.} = -c$; also Bewegungsgleichungen: $0 = N\cos\vartheta - mg$, $m\ddot x = -N\sin\vartheta = -mg\operatorname{tg}\vartheta = -mg\frac{dy}{dx}$. Aber $\dot x = -\frac{dx}{dy}\cdot c$, $\ddot x = \frac{d^2x}{dy^2}c^2$. Mithin $c^2\frac{d^2x}{dy^2}\cdot\frac{dx}{dy} = -g$, $\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = -\frac{g}{c^2}(y - y_0)$, $x = x_0 - \frac{2}{3}\sqrt{2\frac{g}{c^2}}\sqrt{y_0 - y}^3$ oder $(x - x_0)^2 = \text{const.}\,(y_0 - y)^3$. (Neillsche Parabel.)

34a. Horizontale Bewegung auf der schiefen Ebene (Nr. 64): Da die Reibung der Bewegung entgegengesetzt wirkt, würde die abwärts gerichtete Komponente der Schwerkraft nicht aufgehoben werden. Ist der erforderliche Winkel β, so muß $K\cos\beta = R = f\cdot N$ sein, $K\sin\beta = mg\sin\alpha$, $N = mg\cos\alpha$, also $K = mg\sqrt{\sin^2\alpha + f^2\cos^2\alpha}$ und $\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{f}$.

35. Sekundenpendel (Nr. 66): $l = \frac{g}{\pi^2} = 0{,}994$ m.

36. Doppelte Fallmaschine (Nr. 67): $m_1 w = m_1 g - S$; $m_2 w = -m_2 g + S - 2S'$; $m_4(w' - w) = m_4 g - S'$; $m_3(w' + w) = -m_3 g + S'$. Daraus kann man w, w', S, S' berechnen. Insbesondere folgt:

$$w = g\frac{(m_1 - m_2)(m_3 + m_4) - 4m_3 m_4}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) + 4m_3 m_4},$$

für $m_1 = m_2 + m_3 + m_4$ ergibt sich

$$w = g\frac{(m_3 - m_4)^2}{(2m_2 + m_3 + m_4)(m_3 + m_4) + 4m_3 m_4},$$

also für $m_3 \neq m_4$ nicht Null, vielmehr > 0. Von dem gesamten Gewicht der linken Seite wird eben ein Teil zu der unvermeidlichen Schwerpunktssenkung verbraucht.

37. Durch ein Gewicht gezogener Schlitten (Nr. 67): a) $G' \leqq fG$. b) Fadenspannung sei S: $m'w = G' - S$, $mw = S - fN$, $N = G$. Also $w = \frac{G' - fG}{m + m'}$.

38. Durch Faden verknüpfte Punkte in gekreuzten Röhren (Nr. 67): Fadenspannung S: dann $m\ddot{x} = -S\cos\varphi$; $m\ddot{y} = -S \cdot \sin\varphi$ eventuell plus $-mg$. Dabei $x = l\cos\varphi$, $y = l\sin\varphi$, also $\dot{x} = -l\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}$, $\dot{y} = l\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}$; $\ddot{x} = -l\sin\varphi\cdot\ddot{\varphi} - l\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}^2$, $\ddot{y} = l\cos\varphi\cdot\ddot{\varphi} - l\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}^2$. Elimination von S gibt $\ddot{x}\sin\varphi - \ddot{y}\cos\varphi = \begin{cases}0\\ g\cos\varphi\end{cases}$ oder $-l\ddot{\varphi} = \begin{cases}0\\ g\cos\varphi\end{cases}$. Im ersten Falle $\dot{\varphi} = $ const., im zweiten Falle ist für eine Gleichgewichtslage $\cos\varphi = 0$, d. h. $\varphi' = \pm\frac{\pi}{2}$. Sei $\varphi = \pm\frac{\pi}{2} + \vartheta$, so wird $-l\ddot{\vartheta} = \mp g\sin\vartheta$, bei kleinem ϑ gibt das $\ddot{\vartheta} \mp \alpha^2\vartheta = 0$, wo $\alpha^2 = \frac{g}{l}$. Im ersten Unterfall $\vartheta = a\cdot e^{\alpha t} + be^{-\alpha t}$, also keine Schwingung, ϑ bleibt nicht klein, im zweiten Unterfall $\vartheta = a\sin\alpha t + b\cos\alpha t$, also eine Schwingung, ϑ bleibt klein.

39. Kritische Geschwindigkeit eines Geschosses (Nr. 70): $v_k = \sqrt{\frac{0{,}015}{0{,}014\cdot 0{,}004^2\pi}} \doteq 146$ m/Sek. (weil < 240 m/Sek., so Anwendung der Newtonschen Formel berechtigt).

40. Ballistische Kurve (Nr. 71): Man nehme etwa $-\Delta\vartheta = \frac{\pi}{36}$ (5^0 entsprechend) und verfahre nach den Angaben von Seite 116.

41. Anfahrt eines Motorwagens (Nr. 71): 1 cm bedeutet $500\cdot 2{,}5 = 1250$ techn. Masseneinheiten. Da die Masse $\frac{40000}{g} \doteq 4000$

techn. Masseneinheiten, so hat man als Strecke $m\,\frac{4000}{1250} = 3{,}2$ cm aufzutragen. Das Weitere ist alles im Text angegeben.

42. Relaxationszeit (Nr. 72): $\vartheta = e^{-\lambda t}\omega_0 t$; $0 = \dot\vartheta = -\lambda e^{-\lambda t}\omega_0 t + \omega_0 e^{-\lambda t}$, d. h. $t = \frac{1}{\lambda}$, w. z. b. w.

43. Stetiger Übergang der gedämpften Schwingungen (Nr. 72): Mit wachsendem λ wird die Schwingungsdauer immer größer und geht für $\lambda = \alpha$ ins Unendliche. Folglich rückt auch der zweite Schnittpunkt mit der x-Achse für $\lambda = \alpha$ ins Unendliche, die x-Achse wird Asymptote.

44. Dimension von λ und α (Nr. 76): Da $\alpha^2 = \frac{g}{l}$, $[\alpha] = [t^{-1}]$; ebenso $[\lambda] = [t^{-1}]$.

45. Die Kurve gleicher Geschwindigkeiten bei verschieden geneigten schiefen Ebenen (Nr. 84) ist, weil $h = y$ und $s\cos\alpha = x$ rechtwinklige Koordinaten bedeuten, die Gerade: $y - x\operatorname{tg}\varphi = \text{const.}$, die also gegen den Horizont um den Winkel φ geneigt ist.

46. Arbeit und Leistung einer Lokomotive (Nr. 84): $A = 10 \cdot 20 \cdot 1000 \cdot \left(\frac{2}{100} + \frac{5}{1000}\right) \cdot 5000$ mkg $= 25 \cdot 10^6$ mkg $\doteq 93$ Pferdekraftstunden. $L = 10 \cdot 20 \cdot 1000 \cdot \left(\frac{2}{100} + \frac{5}{1000}\right) \cdot \frac{30 \cdot 1000}{60 \cdot 60} \cdot \frac{1}{75} \doteq 556$ P.S.

47. Integration von $\ddot x + \alpha^2 x = 0$ (Nr. 84): $\frac{1}{2}\dot x^2 + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 = \text{const.} = \frac{1}{2}\alpha^2 x_0^2$, daraus $t = \frac{1}{\alpha}\int^x \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \frac{1}{\alpha}\arcsin\frac{x}{x_0} + t_0$. Also $x = x_0 \sin\alpha(t - t_0)$.

48. Leistung des Luftwiderstandes (Nr. 84): $L = Wv\cos\alpha = \mu' F v^3 \cos^2\alpha$.

49. Potential einer Zentralkraft (Nr. 86): $\bar k = -\bar r f(r^2)$; also $-A = -\int \bar k \cdot d\bar r = \int f(r^2)\bar r \cdot d\bar r = \int f(r^2) r\,dr = \frac{1}{2}\int f(r^2)\,d(r^2) = U(r)$.

50. Potential der Federkraft (Nr. 86): $U = \int \lambda x\,dx = \frac{1}{2}\lambda x^2$.

51. Existenz eines Potentials (Nr. 87): 1. $k_x = 0$, $k_y = 0$, $k_z = -mg$, also alle Differentialquotienten Null, sicherlich auch rot $\bar k$. 2. $k_x = -\frac{\lambda x}{r^3}$, $k_y = -\frac{\lambda y}{r^3}$, $k_z = -\frac{\lambda z}{r^3}$, weil $\frac{x}{r}$ usw. die Komponenten von $\bar\varrho$ sind. Mithin $\frac{\partial k_x}{\partial y} = 3\frac{\lambda x y}{r^5}$, $\frac{\partial k_y}{\partial x} = 3\lambda\frac{y x}{r^5}$ usw., woraus rot $\bar k = 0$ folgt.

52. Energiegleichung des Pendels (Nr. 90): $\frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 - \nu^2 \cos\vartheta = \text{const.}$

53. Ungleichförmigkeitsgrad (Nr. 91): $\delta = 2\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2 + \omega_1}$, wo $\omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 - 4\nu^2}$, $\delta < \varepsilon$ gibt $\omega_1 > \nu\frac{2+\varepsilon}{\sqrt{2\varepsilon}}$.

54. Fehlerschätzung beim mathematischen Pendel (Nr. 92):

$$f(\varkappa^2) = (1 - \varkappa^2 \sin^2\psi)^{-1/2}, \quad f'(\varkappa^2) = \frac{1}{2}\sin^2\psi \cdot (1 - \varkappa^2 \sin^2\psi)^{-3/2},$$

$$f''(\varkappa^2) = \frac{3}{4}\sin^4\psi\,(1 - \varkappa^2\sin^2\psi)^{-5/2}.$$

Also der Rest $R = \varkappa^4 \frac{3}{8}\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\psi \sin^4\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2\vartheta \sin^2\psi}^5}$, wo $0 < \vartheta < 1$. Demnach $|R| < \frac{3}{8}\frac{\varkappa^4}{\sqrt{1-\varkappa^2}^5}\int\limits_0^{2\pi}\sin^4\psi\, d\psi = 2\pi\frac{9}{64}\frac{\varkappa^4}{\sqrt{1-\varkappa^2}^5}$, der verhältnismäßige Fehler gegen 1 also kleiner als $\frac{9}{64}\frac{\varkappa^4}{\sqrt{1-\varkappa^2}^5}$.

55. Förderarbeit der Kohle (Nr. 96): Tiefe sei x. Da 1 kg die Masse $\frac{1}{g}$ hat, so $\frac{1}{g}(U_0 - U_x) \leqq 7000 \times 420 \text{ m} = 2940 \text{ km}$. Nun ist wegen $a = R - x$

$$\frac{1}{g}(U_0 - U_x) = -\frac{\Gamma}{g}\left\{\frac{1}{R}\int\limits_0^R 4\pi\varrho^2\mu\, d\varrho - \frac{1}{R-x}\int\limits_0^{R-x} 4\pi\varrho^2\mu\, d\varrho\right.$$

$$\left. - 4\pi\int\limits_{R-x}^R \mu\varrho\, d\varrho\right\} = \frac{\Gamma}{g}\left\{\frac{x}{R(R-x)}\int\limits_0^R 4\pi\mu\varrho^2 d\varrho - \frac{1}{R-x}\int\limits_{R-x}^R 4\pi\varrho^2\mu\, d\varrho\right.$$

$$\left. + 4\pi\int\limits_{R-x}^R \mu\varrho\, d\varrho\right\}.$$

Mit $\int\limits_0^R 4\pi\mu\varrho^2 d\varrho = M$ (Erdmasse), $\frac{\Gamma M}{R^2} = g$ und der Hypothese, daß in der Schicht von R bis $R - x$ die Dichte μ konstant sei und zwar gleich 3, gibt das wegen $\frac{4\pi}{3}$ 5,5 $\Gamma R = g$ für x die Gleichung dritten Grades $2940 = \frac{xR}{R-x} - \frac{3}{11}\frac{x^2(3R-x)}{R(R-x)}$, wobei $R = 6370$ km. Daraus berechnet sich angenähert $x = 2440$ km. Allerdings dürfte nach

Wiechert so tief die Annahme $\mu = 3$ nicht statthaft sein, aber das Resultat gibt jedenfalls die Größenordnung richtig an.

56. Laplace-Poissonsche Gleichung (Nr. 97): Außerhalb der Kugel ist $U = \frac{\text{const.}}{r}$. Man beweist aber leicht durch Ausrechnen $\left(\frac{\partial U}{\partial x} = -\text{const.}\frac{x}{r^3},\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{\text{const.}}{r^3} + 3\cdot\text{const.}\frac{x^2}{r^5}\ \text{usw.}\right)$, daß in der Tat $\Delta U = 0$ ist. Innerhalb der Kugel ist bis auf den Faktor $-4\pi\Gamma dm$ $U = \frac{1}{r}\int\limits_0^r \varrho^2\mu d\varrho + \int\limits_r^R \mu\varrho d\varrho$ und nur von r abhängig. Nun ist aber, wenn U nur von r abhängt,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{dr}\frac{x}{r},\quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{d^2 U}{dr^2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{dU}{dr}\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right)\ \text{usw.},$$

also $\Delta U = \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dU}{dr}$. Durch Ausdifferentiieren von U berechnet man nun leicht $\Delta U = -\mu$. (Das Zeichen ist im Text falsch angegeben.)

57. Dimension von Γ (Nr. 98): $[\Gamma] = [\text{kg}\cdot l^2 m^{-2}] = [m^{-1} l^3 t^{-2}]$ im c. g. s.- und $[\Gamma] = [\text{kg}^{-1} l^4 t^{-4}]$ im technischen Maßsystem. Also $\Gamma = 6{,}675\cdot 10^{-8}[g^{-1}\ \text{cm}^3\ \text{sec}^{-2}] = 6{,}675\cdot 10^{-8}[\text{Dyn}^{-1},\ \text{cm}^4,\ \text{sec}^{-4}]$ $= 6{,}675\cdot 10^{8}\cdot\frac{981000}{100^4} = 6{,}54\cdot 10^{-10}[\text{kg}^{-1},\ \text{m}^4,\ \text{sec}^{-4}]$.

57 a. Erd- und Mondbeschleunigung (Nr. 98): Mondbeschleunigung $r\omega^2 = 60\,R\cdot\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2$. $g : r\omega^2 = \frac{1}{R^2} : \frac{1}{r^2}$, d. h. $g = \frac{60\cdot 60}{60\cdot R\cdot\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2}$ $= 9{,}76\ \text{m/Sek.}^2\cdot(\tau = 27\cdot 24\cdot 60\cdot 60 + 7\cdot 60\cdot 60 + 43\cdot 60)$.

58. Zusammensetzung der Kräfte in der Ebene (Nr. 117): $K_x = 7{,}11$, $K_y = 33{,}21$, $M = 162{,}54$, Gleichung der Zentrallinie: $33{,}21\,x - 7{,}11\,y = 162{,}54$.

59. Graphische Lösung der Aufgabe 58 (Nr. 118): Man zeichne und kontrolliere das Resultat aus der Rechnung durch Bestimmen zweier Punkte der Zentrallinie.

60. Kraftsystem im Raume (Nr. 126): $K_x = 10$, $K_y = 15$, $K_z = 21$; $M_x = 150$, $M_y = 105$, $M_z = 0$; $p = 4{,}01$ m. Gleichung der Zentralachse etwa nach $\bar{x}\bar{K} = \bar{M} - p\bar{K}$ in Koordinaten: $21y - 15z = 109{,}9$, $10z - 21x = 44{,}85$, $10y - 15x = 84{,}21$. Von diesen Gleichungen sind natürlich nur zwei unabhängig.

61. Tischaufgabe (Nr. 128): $N_1 = G\frac{r_1}{h_1}$ usw. Negative r verlangten einen Zug, der nicht möglich ist ($N > 0$).

62. Tetraeder konjugierter Kräfte (Nr. 132): Der Inhalt ist $\frac{1}{6}\overline{(a-b)}\cdot\overline{pq}$. Aus $\overline{p}+\overline{q}=\overline{k}$ und $\overline{ap}+\overline{bq}=\overline{M}$ folgt aber $\overline{k}\cdot\overline{M}$ $=\overline{p}\cdot\overline{bq}+\overline{q}\cdot\overline{ap}=\overline{(a-b)}\cdot\overline{pq}$, so daß der fragliche Inhalt $\frac{1}{6}\overline{k}\cdot\overline{M}$ ist.

63. Graphische Schwerpunktskonstruktion bei einem U-Eisen (Nr. 138): In der Nummer 138 ist alles Nötige angegeben. Abstand vom linken Rande 16 mm.

64. Angeseilter Stab (Nr. 140): Im Text ist das Erforderliche angegeben.

65. Gestützter Stab (Nr. 140): $N-G+D\cos\alpha=0$, $R-D\sin\alpha=0$, $D(a+b)-Ga\cos\alpha=0$, $R<fN$. Daraus $a\cos\alpha\sin\alpha\leqq f[(a+b)-a\cos^2\alpha]$ oder $a\operatorname{tg}\alpha\leqq f[(a+b)\operatorname{tg}^2\alpha+b]$. Es gibt also zwei Grenzlagen des Gleichgewichts, wenn die Diskriminante der Gleichung $a\operatorname{tg}\alpha=f(a+b)\operatorname{tg}^2\alpha+fb$ negativ ist, d. h. $f\leqq\frac{a}{2\sqrt{f(a+b)}}$, sonst ist immer, für alle α, Gleichgewicht vorhanden.

66. Neigung eines aufgehängten Bildes (Nr. 140): $G=S\cos\beta$, $N-S\sin\beta$, $G(a\sin\alpha+c\cos\alpha)=Sh\sin(\alpha+\beta)$, dazu $\sin\alpha:\sin\beta=l:h$. $\alpha=\beta=0$ ist eine Lösung, wenn $c=0$ ist. Seien c und α klein, $\cos\alpha\doteq 1$, $\cos\beta\doteq 1$, $S\doteq G$, $a\sin\alpha+c\doteq h(\sin\alpha+\sin\beta)$ oder $\sin\alpha\doteq\frac{c}{h+l-a}$.

67. Drei balanzierte Gewichte (Nr. 140): Momentensatz bezüglich OP z. B. gibt $Q\sin\gamma=R\sin\beta$ oder $Q:R=\sin\beta:\sin\gamma$ usw. Also $P:Q:R=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$, woraus wegen $\alpha+\beta+\gamma=4\pi$ das Behauptete folgt.

68. Kugelpyramide (Nr. 140): Der Winkel α, den die Verbindungslinien der Mittelpunkte der drei unteren Kugeln mit dem der oberen gegen die Horizontalebene bildet, berechnet sich bekanntlich aus $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$. Da bei den unteren Kugeln Gewicht und Gegendruck der Unterlage durch den Berührungspunkt mit dieser gehen, muß das auch der Druck der oberen Kugel tun. Dieser geht aber andererseits durch den Berührungspunkt der oberen Kugel mit der jeweiligen unteren hindurch. Folglich weicht der Druck der oberen Kugel auf die unteren von der Zentralen um $\beta=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$ ab und der Reibungswinkel der Kugeln gegeneinander muß also größer als dieser Winkel sein. Der Druck der oberen Kugeln gegen die unteren ist $\frac{1}{3}\frac{G}{\cos\beta}$, also ist an den unteren Stützpunkten $N=G$

$+\frac{1}{3}\frac{G}{\cos\beta}\cdot\cos\beta=\frac{4}{3}G,\; R=\frac{1}{3}G\operatorname{tg}\beta$. Mithin muß der dortige Reibungskoeffizient größer als $\frac{1}{4}\operatorname{tg}\beta$ sein. $\varphi<\beta$ ergibt $f>0{,}32$ zwischen den Kugeln. Unten genügt $f>0{,}08$.

69. Balken zwischen zwei horizontalen Stützen (Nr. 140): Man zeichne an den Berührungsstellen die Reibungskegel. L muß dann das gemeinsame Gebiet beider Kegel schneiden.

70. Körper in horizontaler Rinne (Nr. 140): G muß wieder das gemeinsame Gebiet beider Reibungskegel treffen.

71. Gleichgewicht eines Stabes (Nr. 140): $\operatorname{tg}\vartheta=\frac{Ga}{G(a+b)}$.

72. Stab in einer Halbkugel (Nr. 140): N_1, N_2, G müssen sich in einem Punkte treffen. Daraus $\cos\vartheta=\frac{l}{16a}\left(1+\sqrt{1+128\frac{a^2}{l^2}}\right)$. Damit also eine reelle Lösung existiert, muß das kleiner wie 1 sein, d. h. $l<4a$. Damit außerdem die Drucke positiv werden, muß $\frac{\pi}{2}-2\vartheta>0$, d. h. $\vartheta<\frac{\pi}{4}$, $\cos\vartheta>\frac{1}{\sqrt{2}}$, was stets erfüllt ist. Damit aber der Stützpunkt am Rande materiell ist, muß $2a\cos\vartheta<l$, d. h. $l>2a\sqrt{\frac{2}{3}}$ sein.

73. Gleichgewicht gegen Fortschieben und Umkippen (Nr. 140): Der Normaldruck N greife in dem zunächst unbekannten Abstande x vor G an. Dann ergeben die drei Gleichgewichtsbedingungen $R=k$, $N=G$ und $x=\frac{kh}{G}$. $R<fN$ ergibt $k\leqq fG$ und $x<a$ ergibt $kh<aG$.

74. Briefwage (Nr. 142): $Ga\sin\alpha=Lb\cos\alpha$, also $\operatorname{tg}\alpha=L\frac{b}{aG}$.

75. Doppelwägung (Nr. 142): $Ga=pb$ und $Gb=qa$, also $G=\sqrt{pq}$.

76. Falltüre (Nr. 142):

$$ka\cos\alpha=Ga\frac{4}{3\pi}\cos\vartheta;\quad\text{also } k=\frac{4}{3\pi}G\frac{\cos\vartheta}{\cos\alpha}.$$

$$A_x=\frac{-k(1+\sin\alpha)+G\cos\vartheta\,\frac{4}{3\pi}}{2},\quad A_y=\frac{2}{3\pi}G\sin\vartheta,$$

$$B_x=\frac{1}{2}\left(-k(1-\sin\alpha)+\frac{4}{3\pi}G\cos\vartheta\right),\quad B_y=\frac{2}{3\pi}G\sin\vartheta.$$

(x-Achse senkrecht zur Platte, y-Achse in der Platte gelegen.)

77. Lagerreaktionen eines Balkens (Nr. 142): Man fange die Seilkonstruktion in O an. Dann ergibt sich alles von selbst. Die Aufgabe ist ja keine andere als die, ein Kräftesystem in zwei Kräfte zu zerlegen: von der einen kennt man die Angriffsgerade, von der anderen einen Angriffspunkt O.

78. Hebelpresse (Nr. 144): Man hat von dem Schnittpunkte von N mit P eine Tangente an den Reibungskreis um O zu zeichnen: das gibt die Richtung des Lagerdruckes. Aus den Richtungen der drei Kräfte und aus der Größe von N ist dann das Kräftedreieck zu zeichnen, was P ergibt. Von den beiden möglichen Tangenten an den Reibungskreis ist diejenige zu wählen, welche für den Hebel ein der Bewegung entgegengerichtetes Moment ergibt; ihr gehört auch das größere P zu.

79. Winde mit Zapfenreibung (Nr. 144):

$$P' = 6{,}67,\quad D_1 = \sqrt{144 + 0{,}04\,P^2 - 4{,}8\,P\sin\alpha},$$

$$D_2 = \sqrt{64 + 1{,}41\,P^2 + 19{,}2\,P\sin\alpha},$$

$$P'' = 6{,}67 + \frac{1}{60}\sqrt{145{,}8 - 24\sin\alpha} + \frac{1}{60}\sqrt{128(1 + \sin\alpha)}.$$

Für $\alpha = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}$ gibt das die Korrekturen 0,39 bzw. 0,45 bzw. 0,39 und 0,22. σ berechnet sich zu 0,023, so daß die nächste Korrektur nur ca. 2% der ersten ausmacht und die ganze Korrektur höchstens $\frac{\sigma}{1-\sigma}$, d. h. ca. denselben prozentualen Anteil.

80. Reibungsarbeit (Nr. 144):

$$L = \frac{15000 \cdot 0{,}015 \cdot 0{,}15 \cdot 2\pi \cdot 100}{60 \cdot 75} = \frac{3\pi}{2} = 4{,}71 \text{ P.S.}$$

81. Schraube mit Stirnreibung (Nr. 148):

$$M = P[f_1 r_m + r\,\mathrm{tg}(\alpha + \varphi)].$$

82. Wirkungsgrad einer Schraube (Nr. 149): $\eta \doteq \frac{1}{80}$.

83. Bockleiter (Nr. 152): Man braucht in dem vorangehenden Beispiel nur $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ zu setzen. $|H_1| < f V_1$ und $|H| < f V_2$ geben die gesuchten Ungleichheiten.

84. Stabpolygon (Nr. 154):

$$S_a = k\frac{2a}{\sqrt{4a^2 - (l-b)^2}},\quad S_b = k\frac{l-b}{\sqrt{4a^2 - (l-b)^2}}.$$

85. Kniepresse (Nr. 155):

$$D = P\frac{a}{b}\,\frac{\cos\eta}{\sin(\eta + \vartheta)},\ \text{wobei}\ \sin\eta = \frac{b}{l}\sin\vartheta.$$

85a. Beanspruchung eines Balkens (Nr. 161): $R_1 = 12$, $R_2 = 11$ kg; $B = 26$ mkg, $V = 0$.

86. Beanspruchung eines eingemauerten Balkens (Nr. 161): $B_0 = 85$ mkg, $R = 25$ kg, $V = 25$ kg, $B = 60$ mkg.

87. Beanspruchung eines verlängerten Balkens (Nr. 161): $R_1 = 23$, $R_2 = 10$ kg. Für y ist links von A der Abstand der beiden zur Zusatzlast gehörenden Seilstrahlen zu nehmen. Um die Nullstelle von B resp. y rechnerisch zu finden, versuchen wir, ob sie für den Abstand $x < 1$ eintritt. Dann muß $(1 + x)10 = x \cdot 23$ sein, was $x = \frac{10}{13}$ ergibt, das wirklich kleiner wie 1 ist. (Wäre das nicht eingetroffen, so müßte man der Reihe nach die Abschnitte zwischen den Einzellasten probieren.)

88. Momentenlinie (Nr. 166): $B = \frac{cl^2}{6}x - \frac{cx^3}{6}$, $V = \frac{cl^2}{6} - \frac{1}{2}cx^2$, Maximum von B bei $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$, $R_1 = \frac{cl^2}{6}$, $R_2 = \frac{cl^2}{3}$.

89. Polonceauträger (Nr. 169): Man bestimme erst die Reaktion in A und B graphisch oder nach der Momentenmethode. Dann nach dem Ritterschen Verfahren die gesuchten Spannungen.

90. Drahtseil (Nr. 180): $H_0 = \frac{1}{8}\frac{20}{0{,}1} \cdot 20 \cdot 0{,}03^2 \cdot \pi \cdot 8000$ kg $=$ 11304 kg.

91. Hängendes steifes Seil (Nr. 191): Der Endpunkt des Seiles (genauer: der Schwerpunkt des angehängten Körpers) muß vertikal unter dem Aufhängepunkte liegen. Im übrigen kann das Seil jede Gestalt haben, die in den Streifen paßt, der von der Vertikalen nach jeder Seite um r absteht.

92. Äquivalente Kraft (Nr. 192): $P = G\frac{b\cos\alpha}{(a+b)\sin\alpha - h}$. (Das Gegenteil von P muß G das Gleichgewicht halten).

93. Radfahrer (Nr. 199): $\operatorname{tg}\beta = \frac{a\omega^2}{g} = \frac{v^2}{ag}$; $|\operatorname{tg}(\alpha - \beta)| \leqq f$; also $\beta + \varphi \geqq \alpha \geqq \beta - \varphi$.

94. Zugspannung in einem rotierenden Ring (Nr. 201): $\int\limits_{1/2 m} y\omega^2 dm = \frac{1}{2}y^*\omega^2 m$, wo y^* der Schwerpunktsabstand des halben Ringes von der Mitte. Also nach Nr. 53: $\frac{2}{8\pi}\mu d(R^3 - r^3)\pi\omega^2$.

95. Doppelte schiefe Ebene (Nr. 202): $m_1 g \sin\alpha = m_2 g \sin\beta$; also Bewegungsgleichung $m_1 g \sin\alpha - m_1 w = m_2 g \sin\beta + m_2 w$, wenn w die Beschleunigung von m_1 abwärts. Mithin $w = g\frac{m_1\sin\alpha - m_2\sin\beta}{m_1 + m_2}$.

96. Invarianz von $\nabla \cdot A$ (Nr. 205):

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{x'}}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'}(\bar{\sigma}_x \cos(x, x') + \bar{\sigma}_y \cos(y, x') + \bar{\sigma}_z \cos(z, x'))$$

$$= \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} \cos^2(x, x') + \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial y} \cos(x, x') \cos(y, x') + \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial z} \cos(x, x') \cos(z, x')$$

$$+ \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial x} \cos(y, x') \cos(x, x') + \cdots$$

Bildet man analog $\frac{\partial \bar{\sigma}_{y'}}{\partial y'}$ und $\frac{\partial \bar{\sigma}_{z'}}{\partial z'}$ und addiert, so ergeben die Koeffizienten von $\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x}$ zusammen 1 wegen $\cos^2(x,x') + \cos^2(x,y') + \cos^2(x,z') = 1$, dasselbe die von $\frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y}$ und $\frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z}$; die anderen Koeffizienten werden Null wegen $\cos(x,x')\cos(y,x') + \cos(x,y')\cos(y,y') + \cos(x,z')\cos(y,z') = 0$.

97. Insekt auf dem Drehschemel (Nr. 212): $\vartheta = -\frac{mr^2}{T + mr^2}\varphi$.

98. Integration von $\ddot{x} = \frac{g'' + \varkappa x}{1 - \lambda x}$ (Nr. 216):

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = -\frac{g''\lambda + \varkappa}{\lambda^2} \lg(1 - \lambda x) - \frac{\varkappa}{\lambda} x + h,$$

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{2h - \frac{2\varkappa}{\lambda} x - 2\frac{g''\lambda + \varkappa}{\lambda^2} \lg(1 - \lambda x)}}.$$

99. Lagerreaktion einer Welle mit exzentrischem Zusatzgewicht (Nr. 218): $r_x = \frac{G}{g} a\omega^2$, $r_y = -\frac{G}{g} a\dot{\omega}$, $D_{y,z} = 0$, $D_{x,z} = \frac{G}{g} ab$. Also $R_x = \frac{G}{g} ab\dot{\omega}$, $R_y = \frac{G}{g} ab\omega^2$. Daraus berechnen sich die Lagerdrucke X_1, Y_1, X_2, Y_2 an den Enden nach dem Momentensatz zu:

$$X_1 = -\frac{1}{2}\frac{G}{g} a\dot{\omega} + \frac{1}{l}\frac{G}{g} ab\dot{\omega}, \quad X_2 = -\frac{1}{2}\frac{G}{g} a\dot{\omega} - \frac{1}{l}\frac{G}{g} ab\dot{\omega},$$

$$Y_1 = \frac{1}{2}\frac{G}{g} a\omega^2 + \frac{1}{l}\frac{G}{g} ab\omega^2, \quad Y_2 = \frac{1}{2}\frac{G}{g} a\omega^2 - \frac{1}{l}\frac{G}{g} ab\omega^2.$$

100. Massenwirkung eines Rades (Nr. 218): $r_x = ms\omega^2$, $r_y = 0$, $R_x = -D_{y,z}\omega^2$, $R_y = D_{x,z}\omega^2$. Seien $D'_{y,z}$, $D'_{x,z}$ die Deviationsmomente zu parallelen Achsen durch den Schwerpunkt. Dann ist nach Nr. 252 $D_{y,z} = D'_{y,z}$ und $D_{x,z} = D'_{x,z}$, ferner nach Nr. 248 $D'_{y,z} = 0$, $D'_{x,z} = -\frac{1}{2}(C - A)\sin 2\alpha$. Also $R_x = 0$, $R_y = -\frac{1}{2}(C - A)\sin 2\alpha\omega^2$.

101. Eulersche Formel (Nr. 223): $x = c_x + a\cos\vartheta - b\sin\vartheta$, also $\dot{x} = \dot{c}_x - (a\sin\vartheta + b\cos\vartheta)\omega = \dot{c}_x - (y - c_y)\omega$ usw.

102. Momentanzentrum der Schwinge (Nr. 225) liegt im Schnitt von OA mit $O'B$.

103. Momentanzentrum der Stange (Nr. 225) liegt auf der Horizontalen durch A und auf der Vertikalen durch B.

104. Rollende Walze (Nr. 225): a) $v = r\omega$, weil der Berührungspunkt Momentanzentrum; b) weil die Bewegung aus der Translation c und der Kreisbewegung um den Mittelpunkt besteht.

105. Spurkurve beim Schubkurbelgetriebe (Nr. 226): $OK = x = r\cos\vartheta + l\cos\eta$, $KM = y = x\operatorname{tg}\vartheta = r\sin\vartheta + l\cos\eta\operatorname{tg}\vartheta$. Dazu $r : l = \sin\eta : \sin\vartheta$. Daraus wären y und ϑ zu eliminieren. Man erhält $(x^2 + y^2)(x^2 + r^2 - l^2)^2 = 4r^2x^4$. Setzt man $CM = \varrho'$, $\eta + \vartheta = \vartheta'$, so lautet die Gleichung der Polkurve in Polarkoordinaten: $\varrho' = l\dfrac{l + r\cos\vartheta'}{r + l\cos\vartheta'}$; in rechtwinkligen Koordinaten: $l^2(l - x)^2(x^2 + y^2) = r^2(x^2 + y^2 - lx)^2$, wenn x längs CK von C aus gezählt wird.

106. Für die geführte Stange (Fig. 195) (Nr. 227) ist $c_x = OB = l\cos\vartheta$, $c_y = 0$, also $\dfrac{dc_x}{d\vartheta} = -l\sin\vartheta$, mithin $x_0 = l\cos\vartheta$, $y_0 = -l\sin\vartheta$. (Das Zeichen darf nicht Wunder nehmen, denn wenn OB als x-Richtung genommen ist, so muß OA die negative y-Richtung sein.) Mithin $x_0^2 + y_0^2 = l^2$ Gleichung der Spurkurve. Dagegen

$$a_0 = \sin^2\vartheta\, l = \frac{1}{2}l(1 - \cos 2\vartheta),\quad b_0 = -l\sin\vartheta\cos\vartheta = -\frac{1}{2}l\sin 2\vartheta.$$

Mithin $\left(a_0 - \frac{1}{2}l\right)^2 + b_0^2 = \frac{1}{4}l^2$ Gleichung der Polkurve. (Kreis durch den Anfangspunkt.)

107. Polbahnen des fallenden Körpers (Nr. 227): M liegt auf der Horizontalen durch den Schwerpunkt im Abstand x, so daß $x\omega = gt$, also $x = \dfrac{gt}{\omega}$. Da die Höhe von M gleich $y = \frac{1}{2}gt^2$, so ist $y = \dfrac{1}{2}\dfrac{\omega^2}{g}x^2$ die Spurkurve (Parabel). Für die Polkurve nehme man die Polarkoordinaten bezogen auf den Schwerpunkt und eine feste Richtung im Körper: $x = \dfrac{gt}{\omega}$, $\vartheta = \omega t$. Mithin Spurkurve: $x = \dfrac{g}{\omega^2}\vartheta$, eine archimedische Spirale.

108. Relatives Momentanzentrum (Nr. 230): Das der Kurbel gegen den absoluten Raum liegt in O, das des Kolbens gegen den absoluten Raum im Unendlichen senkrecht zu OK, also liegt das gesuchte Momentanzentrum erstens auf einer Senkrechten durch O zu OK. Das Momentanzentrum der Kurbel gegen die Lenkstange ist C, das der Lenkstange gegen den Kolben ist K, also liegt das gesuchte Momentanzentrum zweitens auf CK. Deshalb fällt es mit D zusammen.

109. **Relatives Momentanzentrum bei der Schwinge** (Nr. 230): Es liegt im Schnittpunkt von AB mit OO'. Beweis wie bei 108.

110. **Verschiebungsplan** (Nr. 230): Momentanzentrum M von 5, 6, 7 auf einer Senkrechten zu OO' in O' und auf 2. Momentanzentrum von 1 und 2 ist O. Das von 4 liegt einmal auf 1, dann auf der Linie durch M und den Knoten, in dem 4, 7 zusammenstoßen.

111. **Beschleunigung der Walzenmitte** (Nr. 234): $\overline{\dot\omega(\overline{r}-\overline{r}_0)}$ ist der Ebene parallel und gleich $r\dot\omega$; $\overline{\omega(\overline{\omega(\overline{r}-\overline{r}_0)})}$ ist gleich $r\omega^2$ und auf den Berührungspunkt (Momentanzentrum) zugerichtet. $\varrho=\infty$, also $\dot r_0=-r\omega$ und $-\overline{\omega\dot r_0}$ gleich $r\omega^2$ und vom Berührungspunkt fortgerichtet. Die beiden letzten Bestandteile heben sich also auf und es bleibt $r\dot\omega$ parallel zur Ebene.

112. **Walzen übereinander** (Nr. 234): Betrachten wir den Punkt auf der Vertikalen in der Entfernung x unter dem Mittelpunkt der oberen Walze. $\dot r_0=\omega\frac{r\varrho}{r+\varrho}$, also Mittelpunktgeschwindigkeit der oberen Walze $v=\dot r_0\frac{r+\varrho}{\varrho}=\omega r$ (an sich klar). Deshalb vertikale Beschleunigung (nach unten positiv gerechnet) $\frac{v^2}{r+\varrho}-x\omega^2=\omega^2\left(\frac{r^2}{r+\varrho}-x\right)$, also Null für $x=\frac{r^2}{r+\varrho}$.

113. **Gleitfreier Antrieb einer Walze** (Nr. 239): $N=G$, $mr\dot\omega=H+R$, $T\dot\omega=H(h-r)-Rr$. Daraus $R=H\left(\frac{rh}{r^2+\sigma^2}-1\right)$, wenn σ Trägheitsradius bezogen auf den Mittelpunkt. $|R|\leqq fN$ ergibt $\frac{r^2+\sigma^2}{r}-f\frac{G}{H}\leqq h\leqq\frac{r^2+\sigma^2}{r}+f\frac{G}{H}$. Für $f=0$ muß also $h=\frac{r^2+\sigma^2}{r}=l$, d. h. gleich der reduzierten Pendellänge für den Berührungspunkt sein.

114. **Herabgleitender Stab** (Nr. 239): 1. $m\ddot y=-my+N+R'$; 2. $m\ddot x=-R+N'$ (N, R am Boden, N', R' an der Wand); 3. $T\dot\omega=Na\cos\vartheta-Ra\sin\vartheta-N'b\sin\vartheta-R'b\cos\vartheta$. Dabei $R=fN$, $R'=f'N'$, $x=b\cos\vartheta$, $y=a\sin\vartheta$. $\omega=-\dot\vartheta$.

115. **Fallender Stab** (Nr. 239): a) ohne Reibung: 1. $m\ddot y=-mg+N$; 2. $m\ddot x=0$; 3. $T_s\dot\omega=-Na\cos\vartheta$. Dabei $y=a\sin\vartheta$, $\omega=\dot\vartheta$. Der Schwerpunkt fällt also vertikal herab. Durch Elimination von y und N erhält man eine Bewegungsgleichung für ϑ. b) mit Reibung: 1. der untere Punkt haftet: $m\ddot x=R$, $m\ddot y=-mg+N$, $(T_s+ma^2)\dot\omega=-mga\cos\vartheta$. $y=a\sin\vartheta$, $x=a\cos\vartheta$. Daraus sind ϑ, N, R zu berechnen. Die Voraussetzung ist solange erfüllbar, als

$|R| < fN$ bleibt; 2. der untere Punkt gleitet der x-Richtung entgegen: $m\ddot{x} = R$, $m\ddot{y} = -mg + N$, $T_s\dot{\omega} = -Na\cos\vartheta + Ra\sin\vartheta$. Dabei $R = fN$, $y = a\sin\vartheta$. Elimination von N, R, y gibt zwei Differentialgleichungen für x, ϑ.

116. Abheben eines Gewichtes (Nr. 239): 1. Das Gewicht bleibe auf der Platte: $m'w = m'g - N$, $T\dot{\omega} = mgs + Na$, $w = a\dot{\omega}$. Daraus folgt $\dot{\omega} = \frac{mgs + m'ga}{T + m'a^2}$ und $N = m'g\left(1 - \frac{mas + m'a^2}{T + m'a^2}\right)$. Wegen $N > 0$ muß $T + m'a^2 > mas + m'a_s$, d. h. $a < \frac{T}{ms} = l$ sein. Das Gewicht hebe sich ab: $w = g$, $T\dot{\omega} = mgs$, $w < a\dot{\omega}$ gibt $a > \frac{T}{ms} = l$. Beide Möglichkeiten schließen sich tatsächlich aus. 2. $(T + m'a^2)\dot{\omega} = (mgs + m'ga)\cos\vartheta$. $m'a\dot{\omega} = m'g\cos\vartheta - N$, $-m'a\omega^2 = m'g\sin\vartheta - R$. Daraus berechnen sich $N = m'(g\cos\vartheta - a\dot{\omega}) = m'g\cos\vartheta\left(1 - \frac{msa + m'a^2}{T + m'a^2}\right)$. $R = m'g\sin\vartheta + m'a\omega^2$, was nach dem Energiesatz (§ 44) $\frac{1}{2}(T + m'a^2)\omega^2 = (mgs + m'ga)\sin\vartheta$ ergibt $R = m'g\sin\vartheta\left(1 + 2\frac{msa + m'a^2}{T + m'a^2}\right)$. $R < fN$ liefert die Grenze: $\operatorname{tg}\vartheta < \frac{T - msa}{T + 2msa + 3m'a^2}$. Wird dieser Winkel überschritten, so gleitet der Körper und es gelten die Gleichungen $T\dot{\omega} = mgs\cos\vartheta + Nx$, $m'(\ddot{x} - x\omega^2) = m'g\sin\vartheta - R$, $m'(x\dot{\omega} + 2\dot{x}\omega) = mg\cos\vartheta - N$, $R = fN$. (x die variabele Entfernung. Unbekannte: ϑ, x, N.) Das gilt solange, als $N > 0$ bleibt. Dann fliegt die Last frei davon.

117. Rollpendel und anderes (Nr. 241): $T_s\dot{\omega} = -Ns\sin\vartheta - R(s\cos\vartheta - r)$, $m\ddot{x} = R$, $m\ddot{y} = -N + mg$. Dabei $x = s\sin\vartheta - r\vartheta$, $y = s\cos\vartheta$. Durch Elimination von N, R folgt die alte Gleichung. Zu 113: $(T_s + mr^2)\dot{\omega} = Hh$ usw. Zu 114: Bezogen auf den unteren Punkt: $T_s\dot{\omega} - m\ddot{x}a\sin\vartheta - m\ddot{y}a\cos\vartheta = mga\cos\vartheta - N'(a + b)\sin\vartheta - R'(b + b)\cos\vartheta$ usw.

118. Arbeit zur Bewegung einer Walze (Nr. 244): $A = E = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\mu l r^4\pi\omega^2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{8000}{9{,}81}\cdot 2\cdot\frac{1}{2^4}\cdot\pi\cdot\left(\frac{\pi\, 100}{30}\right)^2 \doteq 7500$ mkg.

118a. Energiegleichung des fallenden Stabes (Nr. 246): $\frac{1}{2}(T_s\omega^2 + m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2) + mgy = h$. Die Normaldrucke stehen senkrecht auf ihrer Bewegungsrichtung. Von der Reibungswirkung ist abgesehen.

119. Trägheitsmoment der Kugel (Nr. 256): $T = \int_{-R}^{R}\frac{1}{2}\varrho^4\pi\,dz$. Dabei $\varrho^2 = R^2 - z^2$, also $T = \frac{1}{2}\pi\left(R^4z - \frac{2}{3}R^2z^3 + \frac{1}{5}z^5\right)\Big|_{-r}^{+R} = \frac{8}{15}\pi R^5$.

120. **Trägheitsmoment des U-Eisens** (Nr. 258): $F = 1475\,\mathrm{mm}^2$. $T \doteq 33\,\mathrm{cm}^4$.

120a. **Coriolisbeschleunigung bei Ostbewegung** (Nr. 269) liegt in der Ebene des Parallelkreises auf die Erdachse zugerichtet und ist gleich $2\omega v_r$.

121. **Radiale Bewegung als Relativbewegung** (Nr. 269): $\ddot{r}$ Relativbeschleunigung, $-r\omega^2$ und $r\dot{\omega}$ Komponenten der Führungsbeschleunigung, $\bar{w}_c$ liegt senkrecht zu $\bar{\omega}$ und $\bar{v}_r$ also in der Ebene senkrecht zum Radius und hat die Größe $2\dot{r}\omega$.

122. **Rotationsenergie** (Nr. 270):

$$E_r = \frac{1}{2} \mathsf{S}\, dm[(\omega_y z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2 + (\omega_x y - \omega_y z)^2]$$
$$= \frac{1}{2}[\omega_x^2 \mathsf{S}\, dm(z^2 + y^2) - 2\omega_x\omega_y \mathsf{S}\, dm\, yz \ldots]$$
$$= \frac{1}{2}[\omega_x^2 T_x - 2\omega_x\omega_y D_{yz} \ldots].$$

Am elegantesten folgt das Resultat mittels der Dyadenrechnung (siehe Anhang IV). $\bar{J} = \mathsf{S}\, dm\, s(\overline{\omega s}) = -\mathsf{S}\, dm\, \overline{s(s\omega)} = -\mathsf{S}\, dm(\bar{s} \times \bar{s}) \cdot \bar{\omega} = \varDelta \cdot \bar{\omega}$, wo

$$\varDelta = \begin{Bmatrix} T_x & -D_{xy} & -D_{xy} \\ -D_{xy} & T_y & D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{yz} & T_z \end{Bmatrix}$$

die Trägheitsdyade ist. Damit ist II resp. II′ aus Nr. 271 gewonnen, woraus die Formel für E sofort aus $E = \frac{1}{2}\mathsf{S}\, dm\, \overline{s\omega}^2 = \frac{1}{2}\bar{\omega} \cdot \mathsf{S}\, dm\, \overline{s(\omega s)} = \frac{1}{2}\bar{\omega} \cdot \bar{J}$ folgt.

123. **Analogie zwischen Rotation und Translation** (Nr. 273): Sofort zu sehen. Wegen dieser Analogie wird in englischen Büchern auch $m\bar{v}$ vielfach Impuls genannt.

124. **Kreisel** (Nr. 282): $C = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5^4 \pi = 7850\,\mathrm{gcm}^2$, $A = B = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{1}{4} r^4 \pi\mu + x^2 r^2 \pi \mu\right) dx = \frac{1}{4} r^2 \pi \mu l \left(r^2 + \frac{1}{3} l^2\right) = 3990\,\mathrm{gcm}^2$. $J = C\omega = 7850 \cdot \frac{\pi \cdot 1000}{30} = 822000 \frac{\mathrm{gcm}^2}{\mathrm{sec}}$.

125. **Gestoßener Kreisel** (Nr. 282): $\varDelta J = 98100 \cdot 5$ Dyn cm sec $= 490500 \frac{\mathrm{gcm}^2}{\mathrm{sec}}$. Also springt der Impuls um den Winkel ϑ_0 zur

Seite, für den $\operatorname{tg}\vartheta_0 = \frac{490500}{822000}$, $\vartheta_0 = 30^0\,49'$. Nachher wird um diese neue Richtung von $\bar{J}$ die Figurenachse auf einem Kreiskegel vom Winkel ϑ_0 rotieren.

126. Energiegleichung in einem fallenden Fahrzeug (Nr. 294): $\frac{1}{2}dmv_r^2 - dmgz\Big|_{t_0}^{t} = \int\limits_{t_0}^{t} d\bar{k}\cdot\bar{v}_r dt$, wo z die Relativhöhe.

127. Direkte Erklärung der Scheinkräfte (Nr. 294): 1. Fällt ein Punkt auf der Erde, so bringt er aus der Höhe eine größere Geschwindigkeit mit, als sie die Erdoberfläche besitzt. Daher wird er der Erde voreilen, d. h. nach Osten abweichen. Dasselbe gilt für einen im Meridian nach Norden fahrenden Zug: er bringt aus den niederen Breiten eine größere Absolutgeschwindigkeit nach Osten mit, die durch die Schienen zwangsweise reduziert wird, daher der Druck nach Osten. 2. Das $\bar{\omega}$ der Erde kann man in $\omega\sin\beta$ um die Vertikale und $\omega\cos\beta$ um die Horizontale zerlegen (β geographische Breite). Letztere hat keinen Einfluß auf das Pendel, erstere dreht die Umgebung des Pendels gegen dieses, scheinbar also letzteres gegen die Umgebung, was wegen $\lambda = \omega\sin\beta$ und der Kleinheit von λ gegen α mit Nr. 291 übereinstimmt.

128. Gebremstes Fahrzeug (Nr. 294): Beim Bremsen besteht eine nach vorn gerichtete Scheinkraft, gegen die man sich unwillkürlich zurückneigt. Hört das Bremsen plötzlich auf, so fällt auch die Scheinkraft fort und es entsteht eine Störung des Gleichgewichts, die die Gefahr des Rückwärtsfallens mit sich bringt.

129. Elastischer Stoß gleicher Massen (Nr. 295): $\varepsilon = 1$, $M = m$ gibt aus I sofort $U_2 = u_1$, $u_2 = U_1$.

130. Stoß gegen die ruhende Erde (Nr. 295): $M = \infty$ gibt: $U_2 = U_1$, $u_2 = -\varepsilon u_1 + \varepsilon U_1$, also bei $U_1 = 0$, $u_2 = -\varepsilon u_1$, $\Delta E = \frac{m}{2}(1-\varepsilon^2)u_1^2$.

131. Restitutionskoeffizient des Balls (Nr. 295): Verlust an potentieller Energie $^3/_4$ des alten Betrages, also derselbe an kinetischer Energie, da während der stoßfreien Epoche keine Energie verloren geht. Mithin $1 - \varepsilon^2 = \frac{3}{4}$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

132. Plötzliches Anhalten eines Stabes (Nr. 302): $x = 0$, $\omega = 0$, also $\omega_1 = -v\frac{my}{T_A} = -v\frac{y}{\sigma_A^2} = -v\frac{9}{8l} = -5{,}625$. $h_x = my\omega_1 + mv = \frac{1}{9{,}81}\left(-\frac{9v}{16} + v\right) = \frac{7}{16}\cdot 5\cdot\frac{1}{9{,}81} = 2{,}23$ seckg. $h_y = 0$.

133. Doppelpendel (Nr. 309): $T_{I,0}\ddot{\vartheta} = -m_I g a \sin\vartheta + Hc\cos\vartheta - Vc\sin\vartheta$, $T_{II,s}\ddot{\varphi} = Hb\sin\varphi - Vb\cos\varphi$, $m_{II}\ddot{x}^* = m_{II}g - V$, $m_{II}\ddot{y}^* = -H$. Dabei $x^* = c\cos\vartheta + b\cos\varphi$, $y^* = c\sin\vartheta + b\sin\varphi$. Elimination von H und V gibt die gesuchten Gleichungen.

134. Doppelwalze (Nr. 309): 1. $m_{II}\ddot{x}_{II}^* = N'\sin\varphi - R'\cos\varphi$, $m_{II}\ddot{y}_{II}^* = -m_{II}g + N'\cos\varphi + R'\sin\varphi$, $T_{II,s}\ddot{\varphi} = R'a$. 2. $m_I\ddot{x}_I^* = -N\sin\varphi + R'\cos\varphi + R$, $0 = -m_I g - N'\cos\varphi - R'\sin\varphi + N$, $T_{I,s}\ddot{\vartheta} = R'r - Rr$. Dabei ist: $x_I^* = x = r\vartheta + \text{const.}$, $x_{II}^* = x + (r + a)\sin\varphi$; $y_{II}^* = r + (r + a)\cos\varphi$. Elimination von R', N', R, N gibt zwei Bewegungsgleichungen. $|R'| < f'N$, $|R| < fN$ gibt die Schranken, innerhalb deren die vorausgesetzte Bewegungsart möglich ist.

135. Schwinge (Nr. 309): $T_I\ddot{\vartheta} = M_{III} - Hr\sin\vartheta - Vr\cos\vartheta$; $m_{II}\ddot{x}_{II}^* = X - H$, $m_{II}\ddot{y}_{II}^* = Y - V$, $T_{II,s}\ddot{\varphi} = M_{II} - Ha\sin\varphi - Va\cos\varphi - H'b\sin\varphi - V'b\cos\varphi$; $T_{III}\ddot{\eta} = M_{III} + H'r'\sin\eta + V'r'\cos\eta$. (Dabei sind die M, X, Y die wirkenden eingeprägten Momente resp. Kräfte.) Elimination von H, V, H', V' ergibt eine reine Bewegungsgleichung. Zwischen ϑ, φ, η bestehen die Gleichungen: $r\cos\vartheta + (a + b)\cos\varphi - r'\cos\eta = OO'$. $r\sin\vartheta = (a + b)\sin\varphi + r'\sin\eta$. Endlich ist $x_{II}^* = r\cos\vartheta + a\cos\varphi$, $y_{II}^* = r\sin\vartheta - a\sin\varphi$.

136. Weiteres über die Doppelwalze (Nr. 310): $2h = \varepsilon^2 + 2\frac{\alpha}{\gamma}\lg(\beta + \gamma)$, $\omega = -\frac{\alpha'}{\alpha}\sqrt{\varepsilon^2 + 2\frac{\alpha}{\gamma}\lg\left(\frac{\beta + \gamma}{\beta + \gamma\cos\varphi}\right)}$. Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ werden $\dot{\varphi} = \sqrt{\varepsilon^2 + 2\frac{\alpha}{\gamma}\lg\left(\frac{\beta + \gamma}{\beta}\right)}$ und $\omega = -\frac{\alpha'}{\alpha}\sqrt{\varepsilon^2 + 2\frac{\alpha}{\gamma}\lg\frac{\beta + \gamma}{\beta}}$.

137. Dreifaches Pendel (Nr. 310): 1. Für den dritten Körper in bezug auf das dritte Gelenk C: $T_{III,s}\ddot{\psi} - m_{III}\ddot{x}_{III}s_{III}\sin\psi + m_{III}\ddot{y}_{III}s_{III}\cos\psi = -m_{III}gs_{III}\sin\psi$. 2. Für die beiden letzten Körper in bezug auf das zweite Gelenk B, nach Abzug der ersten Gleichung: $T_{II,s}\ddot{\varphi} - m_{II}\ddot{x}_{II}s_{II}\sin\varphi + m_{II}\ddot{y}_{II}s_{II}\cos\varphi - m_{III}\ddot{x}_{III}l_{II}\sin\varphi + m_{III}\ddot{y}_{III}l_{II}\cos\varphi = -m_{II}s_{II}g\sin\varphi - m_{III}gl_{II}\sin\varphi$. 3. Endlich für das ganze System in bezug auf den ersten Drehpunkt A nach Abzug der ersten und zweiten Gleichung: $T_{I,s}\ddot{\vartheta} - m_I s_I\ddot{x}_I\sin\vartheta + m_I\ddot{y}_I s_I\cos\vartheta - (m_{II}\ddot{x}_{II} + m_{III}\ddot{x}_{III})l_I\sin\vartheta + (m_{II}\ddot{y}_{II} + m_{III}\ddot{y}_{III})l_I\cos\vartheta = -m_I g s_I\sin\vartheta - (m_{II} + m_{III})gl_I\sin\vartheta$. Dabei ϑ, φ, ψ die drei Drehwinkel, l die Längen von A zu B zu C, s die Schwerpunktsabstände. $x_I = s_I\sin\vartheta$, $y_I = s_I\cos\vartheta$, $x_{II} = l_I\sin\vartheta + s_{II}\sin\varphi$, $y_{II} = l_I\cos\vartheta + s_{II}\cos\varphi$, $x_{III} = l_I\sin\vartheta + l_{II}\sin\varphi + s_{III}\sin\psi$, $y_{III} = l_I\cos\vartheta + l_{II}\cos\varphi + s_{III}\cos\psi$. Zur Theorie der Gelenksysteme siehe außer Heuns Kinematik noch seine Arbeiten: Die Bedeutung des D'Alembertschen Prinzips für starre Systeme und Gelenkmechanismen (Archiv für Math.) und Zeitschr. für Math. u. Phys., Bd. 56 (1908), sowie das Buch von Otto Fischer: Theoretische Grundlagen für eine Mechanik der lebenden Körper.

138. Zugbrücke (Nr. 313): $G_2\delta z_2 - G_1\delta z_1 = 0$, also $G_2 z_2 - G_1 z_1 = \text{const.}$ Nun ist: $z_2 = r\cos\varphi$, $z_1 = s\cos\vartheta = s\frac{a^2+h^2-(l-r)^2}{2ah}$. Somit $G_2 r\cos\varphi - G_1 s\frac{a^2+h^2-(l-r)^2}{2ah} = -G_1 s\frac{a^2+h^2-l^2}{2ah}$, weil $r = 0$ möglich sein soll. Mit $\frac{2ah}{s}\frac{G_2}{G_1} = b$ wird daraus $r = 2l - b\cos\varphi$, die Gleichung einer Herzkurve.

139. Robervalsche Wage (Nr. 313): Weil sich die virtuellen Wege nicht ändern. Denn FG und JH sind parallel geführt.

140. Gleichgewicht zweier Massenpunkte (Nr. 313): $m_{\mathrm{I}}g\delta x_1 + m_{\mathrm{II}}g\delta x_2 = 0$. $x_2^2 + h^2 = (l - x_1)^2$ (l Länge des Fadens, h Abstand der Rolle von der Führung). Also $x_2\delta x_2 = -\delta x_1(l - x_1)$. Somit $m_{\mathrm{I}}x_2 - m_{\mathrm{II}}(l - x_1) = 0$. $x_2 = \frac{h m_{\mathrm{II}}}{\sqrt{m_{\mathrm{I}}^2 - m_{\mathrm{II}}^2}}$ und $l - x_1 = \frac{h m_{\mathrm{I}}}{\sqrt{m_{\mathrm{I}}^2 - m_{\mathrm{II}}^2}}$. $m_{\mathrm{I}} > m_{\mathrm{II}}$ ist nötig.

141. Lagerreaktion des Erdbebenpendels (Nr. 319): $-H = m(\ddot{c} + l\ddot{\vartheta}\cos\vartheta - l\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta) \doteq m(\ddot{c} + l\ddot{\vartheta}) = -mg\vartheta$, w. z. b. w.

142. Schaukel (Nr. 312): $\frac{1}{2}(2T_{\mathrm{I}} + m_{\mathrm{II}}l^2\cos^2\vartheta)\omega^2 - [m_{\mathrm{I}}g(s+s') + m_{\mathrm{II}}gl]\cdot\cos\vartheta = h$. Denn $l\omega\cos\vartheta$ ist die Geschwindigkeit des Brettes. Durch den beweglichen Punkt m' kommt zur kinetischen Energie hinzu $\frac{1}{2}m'(\dot{x}^2 + x^2\omega^2)$, zur potentiellen der Schwere: $-m'gx\cos\vartheta$. Für den Punkt gelten die Bewegungsgleichungen: $m'(\ddot{x} - x\omega^2) = X + mg\cos\vartheta$, $m'(x\dot{\omega} + 2\dot{x}\omega) = Y - mg\sin\vartheta$. X, Y sind die Kraftkomponenten, welche die Stange auf den Punkt ausübt. Die relative Arbeit dieser Kräfte ist also $\int X\,dx = \frac{1}{2}m'(\dot{x}^2 - \dot{x}_0^2) - m'\int\omega^2 x\,dx - m'g\int\cos\vartheta\,dx$. Nicht periodische Glieder geben $-m'\int\omega^2 x\dot{x}\,dt$ und $-m'g\int\cos\vartheta\,\dot{x}\,dt$. Letzteres nämlich $+m'g\frac{1}{2}\int\sin^2\frac{\vartheta}{2}\dot{x}\,dt\left(\cos\vartheta = 1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)$. Dieses Glied stört die Schlußfolgerungen des Textes nicht. Damit positive Arbeit geleistet werde, muß $\dot{x} > 0$, wenn ω klein, ϑ groß, $\dot{x} < 0$, wenn ω groß, ϑ klein. Kleine ϑ aber fallen tatsächlich mit großen ω zusammen und umgekehrt.

Namenverzeichnis.

(Die angegebenen Ziffern beziehen sich auf die Nummern.)

Sachregister.

(Die beigefügten Ziffern beziehen sich auf die Nummern.)

Mechanik, unter Mitwirkung von M. Abraham, C. Cranz, P. u. T. Ehrenfest, S. Finsterwalder, O. Fischer, Ph. Forchheimer, Ph. Furtwängler, M. Grübler, L. Henneberg, K. Heun, G. Jung, A. Kriloff, H. Lamb, A. E. H. Love, R. v. Mises, L. Prandtl, H. Reißner, A. Schoenflies, P. Stäckel, O. Tedone, H. E. Timerding, A. Timpe, A. Voß, G. T. Walker, G. Zemplén, redigiert von F. Klein und C. H. Müller. A. u. d. T.: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Band IV, in 4 Teilbänden.

Bisher erschienen:

I. Teilband. [XVI u. 691 S.] 1901—1908. Geh. *M.* 20.40, in Originalband geb. *M.* 24.—
II. — 1. Heft. 1904. *M.* 4.40.
III. — [XI u. 598 S.] 1901—1908. Geh. *M.* 17.60, in Originalband geb. *M.* 20.60.
IV. — 1. Heft. 1907. *M.* 3.60. 2. Heft. 1907. *M.* 5.20. 3. Heft. 1910. *M.* 3.40.

Ebert, Dr. H., Professor an der Technischen Hochschule zu München, Lehrbuch der Physik. Nach Vorlesungen an der Technischen Hochschule zu München. In 2 Bänden. I. Band: Mechanik und Wärmelehre. Mit 168 Abbildungen. [XX u. 661 S.] gr. 8. 1912. In Leinwand geb. *M.* 14.— [Band II in Vorbereitung.]

Ebner, Dr. F., Oberlehrer an der Kgl. Maschinenbauschule zu Einbeck, Leitfaden der technisch wichtigen Kurven. Mit 93 Figuren. [VIII u. 197 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand *M.* 4.—

Föppl, Dr. A., Professor an der Kgl. Technischen Hochschule zu München, Vorlesungen über technische Mechanik. 6 Bände. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Band. Einführung in die Mechanik. 4. Auflage. Mit 104 Textfiguren. [XV u. 424 S.] 1911. *M.* 10.—
II. — Graphische Statik. 2. Auflage. Mit 176 Textfiguren. [XII u. 471 S.] 1903. *M.* 10.—
III. — Festigkeitslehre. 4. Auflage. Mit 86 Textfiguren. [XVI u. 426 S.] 1909. *M.* 10.—
IV. — Dynamik. 3., stark veränderte Aufl. Mit 71 Textfiguren. [VIII u. 422 S.] 1909. *M.* 10.—
V. — Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie. Mit 44 Figuren. [XII u. 391 S.] 1907. *M.* 10.—
VI. — Die wichtigsten Lehren der höheren Dynamik. Mit 30 Figuren. [XII u. 490 S.] 1910. *M.* 12.—

Fuhrmann, Geheimer Hofrat Dr. **Arwed**, weiland Professor zu Dresden, Aufgaben aus der analytischen Mechanik. Übungsbuch und Literaturnachweis für Studierende der Mathematik, Physik, Technik usw. In 2 Teilen. gr. 8. Geb.

Einzeln:

I. Teil. Aufgaben aus der analytischen Statik fester Körper. 3., verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 34 Textfiguren. [XII u. 206 S.] 1904. Geb. *M.* 3.60.
II. — Aufgaben aus der analytischen Dynamik fester Körper. 2., verbesserte und vermehrte Auflage. Mit Textfiguren. [VI u. 222 S.] 1882. Geb. *M.* 4.20.

Grimsehl, E., Direktor der Oberrealschule auf der Uhlenhorst zu Hamburg, Lehrbuch der Physik. Zum Gebrauch beim Unterricht, bei akademischen Vorlesungen und zum Selbststudium. 2. Aufl. Mit 1091 Figuren, 2 farb. Tafeln und Tabellen physikalischer Konstanten und Zahlentabellen. [ca. 1100 S.] gr. 8. 1912. Geh. ca. *M.* 15.—, in Leinwand geb. ca. *M.* 16.—

Henneberg, Geh. Hofrat Dr. L., Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt, die graphische Statik der starren Systeme. Mit 394 Figuren. [XV u. 732 S.] gr. 8. 1911. In Leinwand geb. *M.* 24.—

Heun, Dr. K., Professor an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik. Mit 18 Figuren. [VI u. 123 S.] gr. 8. 1900. Geh. *M.* 4.—

v. Ihering, Geh. Regierungsrat A., die Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper.

I. Teil: Die Mechanik der festen Körper. Mit 61 Abbildungen. [IV u. 114 S.] 8. 1910. Geh. *M.* 1.—, geb. *M.* 1.25.
II. — [Erscheint Ende 1911.]
III. — [In Vorbereitung.]

Kirchhoff, Dr. **Gustav**, weiland Professor der Physik an der Universität Berlin, Vorlesungen über Mechanik. Mit Figuren. 4. Auflage, von Dr. W. Wien, Professor an der Universität Würzburg. [X u. 464 S.] 1897. Geh. *M.* 13.— in Leinwand geb. *M.* 15.—

Routh, Edward John, weil. Professor an der Universität Cambridge, die Dynamik der Systeme starrer Körper. In 2 Bänden mit zahlreichen Beispielen. Autorisierte deutsche Ausgabe von Adolf Schepp, weil. Oberleutnant a. D. in Wiesbaden. Mit einem Vorwort von F. Klein. gr. 8. 1898. In Leinwand geb. ℳ 24.—

I. Band. Die Elemente. Mit 57 Figuren. [XII u. 472 S.] ℳ 10.—
II. — Die höhere Dynamik. Mit 38 Figuren. [XII u. 544 S.] ℳ 14.—

Schlink, Dr. W., Dipl.-Ing., Professor an der Technischen Hochschule zu Braunschweig, Statik der Raumfachwerke. Mit 214 Abbildungen und 2 Tafeln. [XIV u. 390 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. ℳ 9.—

Starke, Dr. H., Professor an der Universität Greifswald, experimentelle Elektrizitätslehre, verbunden mit einer Einführung in die Maxwellsche und die Elektronentheorie der Elektrizität und des Lichts. 2., umgearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 334 Abbildungen. [XVI u. 662 S.] gr. 8. 1910. In Leinwand geb. ℳ 12.—

Stephan, Regierungsbaumeister P., Oberlehrer an der Kgl. Maschinenbauschule zu Dortmund, die technische Mechanik. Elementares Lehrbuch für mittlere maschinentechnische Fachschulen und Hilfsbuch für Studierende höherer technischer Lehranstalten. 2 Teile. gr. 8.

I. Teil. Mechanik starrer Körper. Mit 255 Figuren. [VIII u. 341 S.] 1904. In Leinwand geb. ℳ 7.—
II. — Festigkeitslehre und Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper. Mit 200 Figuren. [VIII u. 332 S.] 1906. In Leinwand geb. ℳ 7.—

Study, E., Professor an der Universität Bonn, Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. Mit 46 Figuren und 1 Tafel. [XIII u. 603 S.] gr. 8. 1903. Geh. ℳ 21.—, in Halbfranz geb. ℳ 23.—

Tesar, L., Professor an der Staatsrealschule zu Wien, die Mechanik. Eine Einführung mit einem metaphysischen Nachwort. Mit 111 Figuren. [XIV u. 220 S.] gr. 8. 1909. Geh. ℳ 3.20, geb. ℳ 4.—

Timerding, Dr. H. E., Professor an der Technischen Hochschule zu Braunschweig, Geometrie der Kräfte. Mit 27 Figuren. [XII u. 381 S.] gr. 8. 1908. In Leinwand geb. ℳ 16.—

Volkmann, Dr. P., Professor an der Universität Königsberg i. P., Einführung in das Studium der theoretischen Physik, insbesondere in das der analytischen Mechanik. Mit einer Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntnis. [XVI u. 370 S.] gr. 8. 1900. Geh. ℳ 9.—, in Leinwand geb. ℳ 10.20.

Weber, Dr. H., und Dr. **J. Wellstein,** Professoren an der Universität Straßburg i. E., Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Band. Elementare Algebra und Analysis. Bearbeitet von H. Weber. 3. Auflage. Mit 40 Figuren. [XVIII u. 532 S.] 1910. ℳ 10.—
II. — Elemente der Geometrie. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. 2. Auflage. Mit 251 Figuren. [XII u. 596 S.] 1907. ℳ 12.—
III. — Angewandte Elementar-Mathematik. 2. Auflage. I. Teil: Mathematische Physik. Mit einem Buch über Maxima und Minima von H. Weber und J. Wellstein. Bearbeitet von R. H. Weber, Professor in Rostock. Mit 254 Figuren. [XII u. 536 S.] 1910. ℳ 12.— II. Teil: Graphik, Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Versicherungsmathematik, Astronomie. [Unter der Presse.]

Webster, A. G., Ph. D., Professor of Physics, Clark University, Worcester, the Dynamics of Particles, and of rigid, elastic, and fluid Bodies being Lectures on mathematical Physics. Mit zahlreichen Figuren. [XII u. 588 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. ℳ 14.—

DATE DUE
